Kleyers Encyklopädie.

Lehrbuch

des

Projektionszeichnens

Dritter Teil II. Hälfte

von

Prof. J. Vonderlinn

Ma.
o.
1908 m
4.

Kleyers

Encyklopädie

der gesamten

mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Abteilung:

Das Projektionszeichnen.

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK BAMBERG

Lehrbuch

des

Projektionszeichnens.

Dritter Teil. Zweite Hälfte:

Centralcollineation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie.

Mit 218 Erklärungen und 210 in den Text gedruckten Figuren.

Für den Schulunterricht und das Selbststudium

bearbeitet

nach System Kleyer

von

J. Vonderlinn

Lehrer an der Kgl. Oberreal- und Baugewerkschule in Breslau.

Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK BAMBERG

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

Vorwort.

Hiermit übergebe ich die zweite Hälfte des III. Teiles meines Lehrbuches über „Projektionszeichnen“ der Oeffentlichkeit.

Das Buch enthält die Lehre von den „Kegelschnitten“ nur insoweit, als die Kenntnis der Entstehung und Eigenschaften dieser wichtigen Kurven für das Studium der „darstellenden Geometrie“ unbedingt erforderlich ist.

Die „Collineation ebener und räumlicher Systeme“ wurde nur kurz behandelt und bezüglich der letzteren geometrischen Verwandtschaft nur soviel angeführt, als mir für das Verständnis der „Reliefperspektive“ ausreichend erschien.

Eingehender behandelte ich dagegen die „Axonometrie“ und zwar sowohl die rechtwinklige, wie die schiefwinklige; es dürfte dies wohl begründet sein durch die besondere Bedeutung, welche diese Projektionsmethode sowohl als selbständige Projektionsart, als auch in ihrer Anwendung auf das technische Zeichnen besitzt.

Mit diesem Teile schliesst das Projektionszeichnen, gewissermassen die Methodenlehre der darstellenden Geometrie. Es hätten freilich noch weitere Projektionsmethoden angeführt werden können, allein ich glaube, wer die vorgetragenen Projektionsmethoden gründlich sich angeeignet hat, wird mühelos auch die übrigen in anderen Lehrbüchern noch erwähnten Methoden verstehen können.

Leider hat sich die Fertigstellung dieses Bandes, infolge von anderweitigen und dringenden Arbeiten, welche ich zu übernehmen genötigt war, wiederum verzögert.

Der folgende IV. Teil wird sich ausschliesslich mit der „darstellenden Geometrie der krummen Oberflächen beschäftigen.

Der geehrten Verlagshandlung gebührt für die ausserordentlich sorgfältige Herstellung und Ausstattung des Buches meine vollste Anerkennung und mein herzlichster Dank.

Breslau, Oktober 1891.

J. Vonderlinn.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

1. Ueber die Centralprojektion, bezw. Centralcollineation ebener Systeme 1

A. Ueber die Centralprojektion, bezw. Centralcollineation ebener Systeme im allgemeinen 1

B. Verschiedene Werte der Charakteristik einer Centralcollineation . . 3

C. Arten der Centralprojektion, bezw. Centralcollineation bei allgemeiner Charakteristik A 5

a) Affinität 6
b) Aehnlichkeit 8
c) Kongruenz 9
d) Parabolische Involution 9

D. Collineation ebener Systeme in allgemeiner Lage 10

E. Ueberführung collinearer ebener Systeme aus der allgemeinen in die centrische Lage 11

F. Ungelöste Aufgaben 14

2. Ueber die Centralprojektion, bezw. Centralcollineation eines Kreises 17

A. Ueber die Centralprojektion eines Kreises im allgemeinen 17

B. Die Ellipse als Centralprojektion eines Kreises 20

a) Bestimmung der wahren Gestalt der Kreisprojektion, Pol und Polare der Kegelschnitte. Arten der Kegelschnitte 20
b) Eigenschaften der Ellipse, Brennpunkte, verschiedene Erzeugungsarten der Kurve, Beziehungen zwischen ihren Tangenten und Normalen 23
c) Hauptachsengleichung der Ellipse, Länge der Tangente, Subtangente, Normalen, Subnormalen. Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt 28
d) Gelöste Aufgaben 35

C. Die Hyperbel als Centralprojektion eines Kreises 45

a) Bestimmung der wahren Gestalt der Kreisprojektion 45
b) Eigenschaften der Hyperbel, Brennpunkte, verschiedene Erzeugungsarten der Kurve, Beziehungen zwischen ihren Tangenten und Normalen . . . 47
c) Hauptachsengleichung der Hyperbel, Länge von Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale. Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt 50
d) Gelöste Aufgaben 52

D. Die Parabel als Centralprojektion eines Kreises 55

a) Bestimmung der wahren Gestalt der Kreisprojektion 55
b) Eigenschaften der Parabel, Brennpunkte, verschiedene Erzeugungsarten der Kurve, Beziehungen zwischen ihren Tangenten und Normalen . . . 56
c) Scheitelgleichung der Parabel, Länge der Tangente, Subtangente, Normalen, Subnormalen, Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt 59
d) Gelöste Aufgaben 61
e) Ungelöste Aufgaben 66

Seite

E. Ueber einige projektive Eigenschaften der Kegelschnitte 67

a) Beziehungen zwischen Pol und Polare, conjugierte Pole und Polaren, die zu einem Kegelschnitt gehörigen Punkt-, bezw. Strahleninvolutionen, Konstruktion conjugierter Punkt-, bezw. Strahlenpaare einer Involution, Involutionen mit gemeinsamem Träger, bezw. Mittelpunkt, besondere Centralcollineation zwischen Kreis- und Kegelschnitt 67
b) Satz von Pascal und Brianchon, Zahl der Bestimmungsstücke eines Kegelschnittes, das umbeschriebene Vier- und Dreiseit 75
c) Besondere Lagen von Pol und Polare, Mittelpunkt und conjugierte Durchmesser eines Kegelschnittes, Gleichung der Kegelschnitte, bezogen auf conjugierte Durchmesser. Brennpunkte eines Kegelschnittes; Centralcollineation zwischen Kreis- und Kegelschnitt, wobei ein Brennpunkt im Collineationscentrum liegt 81
d) Gelöste Aufgaben 89
e) Ungelöste Aufgaben 99
f) Gelöste Aufgaben 100
g) Ungelöste Aufgaben 104
h) Gelöste Aufgaben 105
i) Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt der Kegelschnitte, welche durch fünf Bestimmungsstücke gegeben sind 114
k) Gelöste Aufgaben 116

3. Die Kegelschnitte als Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen, bezw. Strahlbüschel in allgemeiner Lage 120

A. Die Kegelschnitte als Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen . . 120

B. Die Kegelschnitte als Erzeugnis zweier projektiven Strahlbüschel in allgemeiner Lage 125

a) Gelöste Aufgaben 126
b) Ungelöste Aufgaben 127

4. Ueber die Polar-Reciprocität ebener Systeme 128

A. Ueber reciproke ebene Systeme im allgemeinen 128

B. Ueber die Polar-Reciprocität ebener Systeme bezüglich eines Kegelschnittes 129

Ungelöste Aufgaben 130

5. Ueber die rechtwinklige Axonometrie 131

A. Ueber die rechtwinklige Axonometrie im allgemeinen 131

a) Begriff und Zweck der rechtwinkligen Axonometrie 131
b) Axonometrisches Bild des Achsenkreuzes, Neigung der Koordinatenachsen zur Bildebene 131
c) Axonometrisches Bild eines Körpers 133
d) Konstruktion des Achsenkreuzes aus den gegebenen Verhältniszahlen . . 135

B. Ueber die besonderen axonometrischen Projektionsarten 143

a) Die besonderen axonometrischen Projektionsarten im allgemeinen . . . 143
b) Die trimetrische Projektion 144
c) Die axometrischen Massstäbe 146
d) Die hypothetische Vergrösserung einer axonometrischen Projektion . . . 147
e) Die verschiedenen axonometrischen Ansichten 148
f) Gelöste Aufgaben 150
g) Ungelöste Aufgaben 152
h) Die dimetrische Projektion 152
i) Gelöste Aufgaben 155
k) Ungelöste Aufgaben 159
l) Die isometrische Projektion 159
m) Gelöste Aufgaben 161
n) Ungelöste Aufgaben 162
o) Die Ueber-Eck-Projektion 162
p) Gelöste Aufgaben 163
q) Ungelöste Aufgaben 164

Seite

C. Ueber die direkten axonometrischen Konstruktionen unter Benützung eines gegebenen Achsenkreuzes 164
a) Darstellung eines Punktes 165
b) Darstellung einer Geraden 166
c) Darstellung einer Ebene 170
d) Ueber die gegenseitigen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen zu einander 171
α) Lagen von Punkt und Gerade 171
β) Lagen zweier Geraden 171
γ) Lagen einer Geraden zu einer Ebene 172
δ) Lagen eines Punktes zu einer Ebene 173
ε) Lagen zweier Ebenen 173
e) Senkrechtstehen einer Geraden zu einer Ebene 174
f) Gelöste Aufgaben 177
g) Das Umlegen einer Ebene in die Bildebene 178
α) Gelöste Aufgaben 179
β) Ungelöste Aufgaben 181
h) Axonometrische Darstellung eines Kreises 182
α) Der Kreis liegt in einer der Koordinatenebenen 182
β) Der Kreis liegt in einer projizierenden Ebene 184
γ) Der Kreis liegt in einer gegen die Koordinatenebenen beliebig geneigten Ebene 186
i) Gelöste Aufgaben 187
k) Ungelöste Aufgaben 191

6. Ueber die schiefwinklige Axonometrie 193

A. Die schiefwinklige Axonometrie im allgemeinen 193
a) Begriff und Zweck der schiefwinkligen Axonometrie 193
b) Axonometrisches Bild des Achsenkreuzes 194
c) Gelöste Aufgaben 203
d) Ungelöste Aufgaben 204

B. Ueber die besonderen schiefwinkligen axonometrischen Projektionsarten 205
a) Die besonderen schiefwinkligen axonometrischen Projektionsarten im allgemeinen 205
b) Die Vogelperspektive und ihre besonderen Fälle 207
c) Gelöste Aufgaben 209
d) Ungelöste Aufgaben 212

C. Ueber die direkten axonometrischen Konstruktionen in schiefwinkliger Darstellung unter Benützung eines gegebenen Achsenkreuzes und Spurendreieckes 212
a) Darstellung der Raumgrössen in schiefwinkliger Axonometrie 212
b) Gelöste Aufgaben 213
c) Ungelöste Aufgaben 220

7. Ueber die Centralprojektion, bezw. Centralcollineation räumlicher Systeme . . 220

A. Ueber die Centralcollineation räumlicher Systeme im allgemeinen . . 220

B. Verschiedene Werte der Charakteristik einer räumlichen Centralcollineation 223

C. Arten der räumlichen Centralcollineation bei allgemeiner Charakteristik Δ 224

D. Collineation räumlicher Systeme in allgemeiner Lage 225
a) Gelöste Aufgaben 226
b) Ungelöste Aufgaben 229

8. Andeutungen zu den Lösungen der ungelösten Aufgaben 230

Das Projektionszeichnen.

Dritter Teil, Zweite Hälfte.

---

1. Ueber die Centralprojektion, bezw. Centralcollineation ebener Systeme.

A. Ueber die Centralprojektion, bezw. Centralcollineation ebener Systeme im allgemeinen.

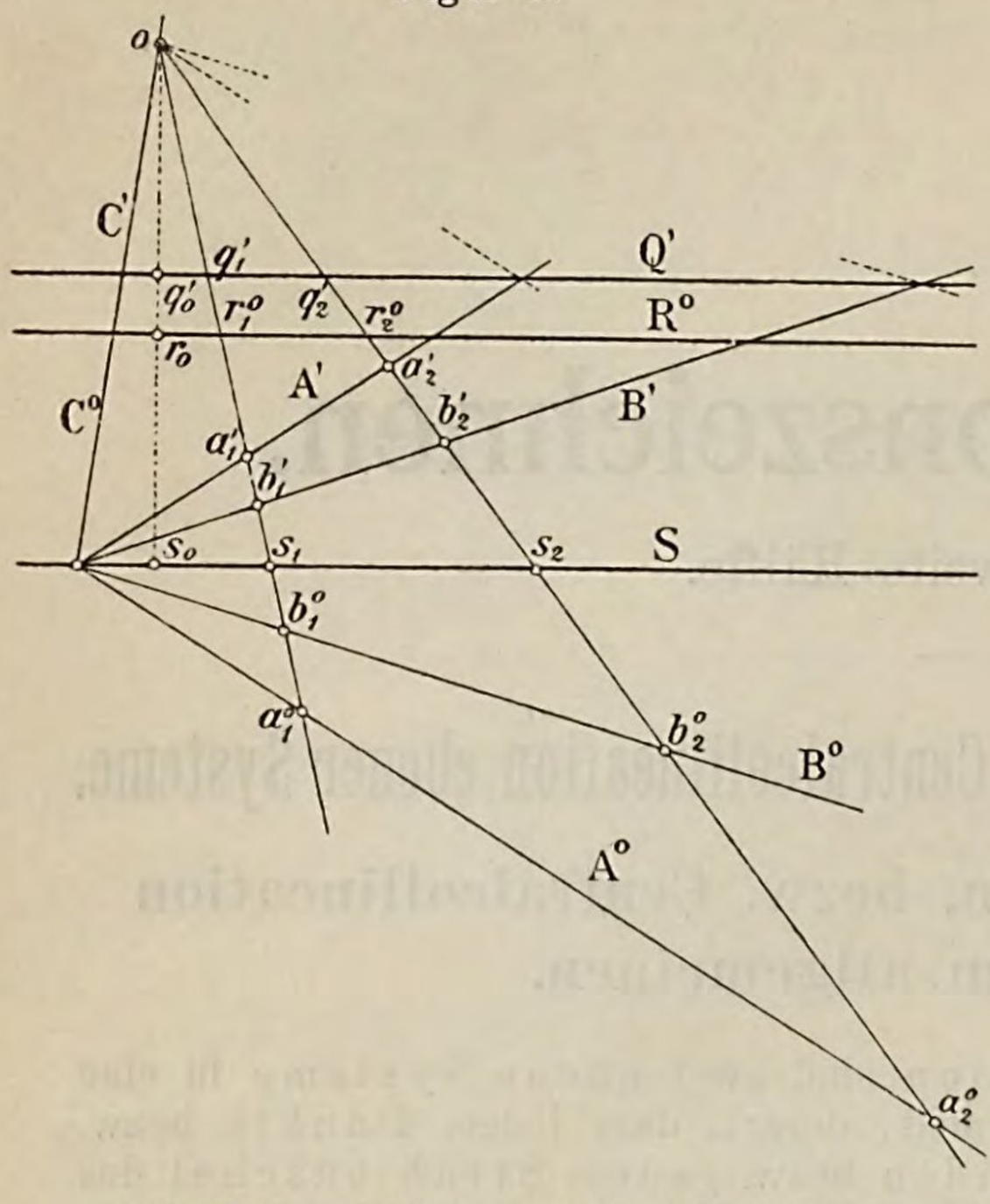
Anmerkung 1. Durch die Centralprojektion sind zwei ebene Systeme in eine gewisse Abhängigkeit von einander gebracht, derart, dass jedem Punkte bezw. jeder Punktreihe oder jeder Geraden bezw. jedem Strahlbüschel des einen Systems wieder ein Punkt oder eine Punktreihe, bezw. Gerade oder ein Strahlbüschel in ganz bestimmter Weise im anderen Systeme entspricht. Dieser Abhängigkeit wurde schon früher Erwähnung gethan, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, Band II, Frage 15 u. ff., und von den daselbst entwickelten Eigenschaften anlässlich der Konstruktion der Pyramidenschnitte Gebrauch gemacht. Dreht man das eine System um die beiden Systemen gemeinsame Achse, die Collineationsachse, so bleiben die beiden Systeme unverändert in dem erwähnten centrisch-collinearen Zusammenhange, insbesondere auch dann, wenn die Ebene des einen Systems mit der Ebene des anderen zusammenfällt. Man erhält dann zwei centrisch-collineare Systeme in ein und derselben Ebene oder die centrische Collineation in der Ebene. Umgekehrt bleiben zwei centrisch-collineare Systeme in derselben Ebene. durch Drehung des einen Systems um die Collineationsachse stets in centrisch-collinearer Beziehung zu einander und es gibt in jeder Lage der beiden Ebenen einen ganz bestimmten Punkt im Raume, welcher als Collineations- oder Projektionscentrum für die beiden ebenen Systeme genommen werden kann. Zwei centrisch-collineare ebene Systeme derselben Ebene können auf unendlich viele Arten aus zweien durch Centralprojektion miteinander verknüpften Ebenen hervorgehen.

Je nach der Lage des Centrums zu den Achsen der centrischen Collineation sind nun verschiedene centrische Collineationen bezw. Centralprojektionen möglich, von denen die wichtigsten im Nachfolgenden behandelt werden sollen.

Frage 1. In welcher Weise ist der projektivische Zusammenhang zwischen zweien centrisch-collinearen Systemen einer Ebene durch ein Doppelverhältnis ausdrückbar?

Antwort. Sind, siehe Figur 1, durch S, Q', R^0 und o die Achsen, sowie das Centrum einer centrischen Collineation gegeben, sind ferner A^0, A' bezw. B^0, B', entsprechende Gerade beider Systeme und zieht man durch o einen beliebigen Strahl, so trifft derselbe die obengenannten Geraden in Punkten a_1^0, a_1', b_1^0, b_1', und diese Punkte gehören zweien projektiven auf dem Strahle

Figur 1.



Erkl. 1. Führt man in Gleichung 1) statt eines ganz beliebigen Paares entsprechender Punkte die Punkte auf den Gegenachsen, d. h. die Gegenpunkte, ein, so lässt sich Gleichung 1) auch so anschreiben:

4) . . . $(os_1, a_1^0 a_1') = (os_1, r_1^0 \infty)$
$= (os_1, \infty q_1') = \Delta$

welche Gleichung aber wie folgt umgeformt werden kann:

$$\frac{\overline{oa_1^0}}{\overline{s_1a_1^0}} : \frac{\overline{oa_1'}}{\overline{s_1a_1'}} = \frac{\overline{or_1^0}}{\overline{s_1r_1^0}} : \frac{\overline{o\infty}}{\overline{s_1\infty}} = \Delta$$

oder:

5) . . . $\frac{\overline{oa_1^0}}{\overline{s_1a_1^0}} : \frac{\overline{oa_1'}}{\overline{s_1a_1'}} = \frac{\overline{or_1^0}}{\overline{s_1r_1^0}} = \Delta$

Ferner:

$$\frac{\overline{oa_1^0}}{\overline{s_1a_1^0}} : \frac{\overline{oa_1'}}{\overline{s_1a_1'}} = \frac{\overline{o\infty}}{\overline{s_1\infty}} : \frac{\overline{oq_1'}}{\overline{s_1q_1'}} = \Delta$$

oder:

6) . . . $\frac{\overline{oa_1^0}}{\overline{s_1a_1^0}} : \frac{\overline{oa_1'}}{\overline{s_1a_1'}} = \frac{\overline{s_1q_1'}}{\overline{oq_1'}} = \Delta$

In den Gleichungen 5) und 6) ist das charakteristische Doppelverhältnis der Collineation durch ein einfaches Verhältnis ersetzt und zwar durch das einfache Teilverhältnis, nach welchem auf jedem durch das Collineationscentrum gehenden Strahle die zwischen dem Centrum und der Collineationsachse liegende Strecke $\overline{OS}$ bezw. $\overline{SO}$ durch die Gegenachse Q' bezw. R^0 geteilt wird.

Fällt man insbesondere vom Centrum o eine Senkrechte zu den Achsen der Collineation, welche durch o liegenden Punktreihen an, deren Doppelpunkte durch das Collineationscentrum o sowie durch den Schnittpunkt s_1 des Strahles mit der Collineationsachse gegeben sind. Desgleichen bilden die Strahlen A^0, $B^0 \cdots$ bezw. A', $B' \cdots$ zwei concentrische projektive Strahlbüschel mit den Doppelstrahlen S und C. Mit Bezug auf das eben Gesagte finden nun folgende Doppelverhältnisgleichheiten statt:

Es ist:

$$(os_1, a_1^0 b_1^0) = (os_1, a_1' b_1')$$

d. h.:

$$\frac{\overline{oa_1^0}}{\overline{s_1a_1^0}} : \frac{\overline{ob_1^0}}{\overline{s_1b_1^0}} = \frac{\overline{oa_1'}}{\overline{s_1a_1'}} : \frac{\overline{ob_1'}}{\overline{s_1b_1'}}$$

oder:

$$\frac{\overline{oa_1^0}}{\overline{s_1a_1^0}} : \frac{\overline{oa_1'}}{\overline{s_1a_1'}} = \frac{\overline{ob_1^0}}{\overline{s_1b_1^0}} : \frac{\overline{ob_1'}}{\overline{b_1b_1'}}$$

oder:

1) . . . $(os_1, a_1^0 a_1') = (os_1, b_1^0 b_1')$

Schneidet ein zweiter durch o gehender Strahl die Geraden A^0, A', B^0, B' bezw. in den Punkten a_2^0, a_2', b_2^0, b_2', so hat man in gleicher Weise die Doppelverhältnisgleichheit:

2) . . . $(s_2o, a_2^0 a_2') = (s_2o, b_2^0 b_2')$

und die eben angeschriebenen Doppelverhältnisse sind jenem in Gleichung 1) angeschriebenen an Wert gleich, weil die vier Geraden A^0, A', B^0, B' sich in einem Punkte der Collineationsachse begegnen.

Die Gleichungen 1) und 2) enthalten folgenden Satz:

„Bei einer centrischen Collineation in der Ebene bestimmen entsprechende Paare von Punkten mit dem Collineationscentrum und dem Schnittpunkt jenes Strahles, auf dem sie liegen mit der Collineationsachse ein Doppelverhältnis, das weder von einem Paar zum anderen im nämlichen Strahl, noch von einem Strahl zum anderen seinen Wert verändert."

Die angegebenen Doppelverhältnisse sind ihrem Werte nach aber auch noch gleich dem Doppelverhältnisse jener vier auf der Collineationsachse sich schneidenden Strahlen, welche die oben bezeichneten Punkte enthalten, nämlich der Strahlen S, C, A^0, A' und S, C, B^0, B', so dass demnach folgende Gleichheiten bestehen:

3) . . $(s_1o, a_1^0 a_1') = (s_1o, b_1^0 b_1') = (s_2o, a_2^0 a_2')$
$= (s_2o, b_2^0 b_2') = (SC, A^0 A')$
$= (SC, B^0 B') = \text{konst.} = \Delta$

dieselben in den Punkten r_0, q_0' und s_0 trifft, so gilt die Beziehung:

$$7) \ldots \frac{\overline{o\,r_0}}{\overline{s_0\,r_0}} = \frac{\overline{s_0\,q_0'}}{\overline{o\,q_0'}} = \Delta$$

als Ausdruck für die Charakteristik der centrischen Collineation der Ebene, siehe auch Lehrbuch des Projektionszeichnens, II. Teil, Erkl. 50, Gleichung 24).

Erkl. 2. Bilden die Ebenen E und E' beider Systeme einen Winkel α, siehe Figur 2, und teilt die durch o und die Achse S gehende Ebene denselben in zwei Winkel β und γ, so lässt sich der in Gleichung 7), siehe Erkl. 1, bezeichnete Wert von Δ noch in anderer Weise ausdrücken; es ist nämlich in diesem Falle offenbar:

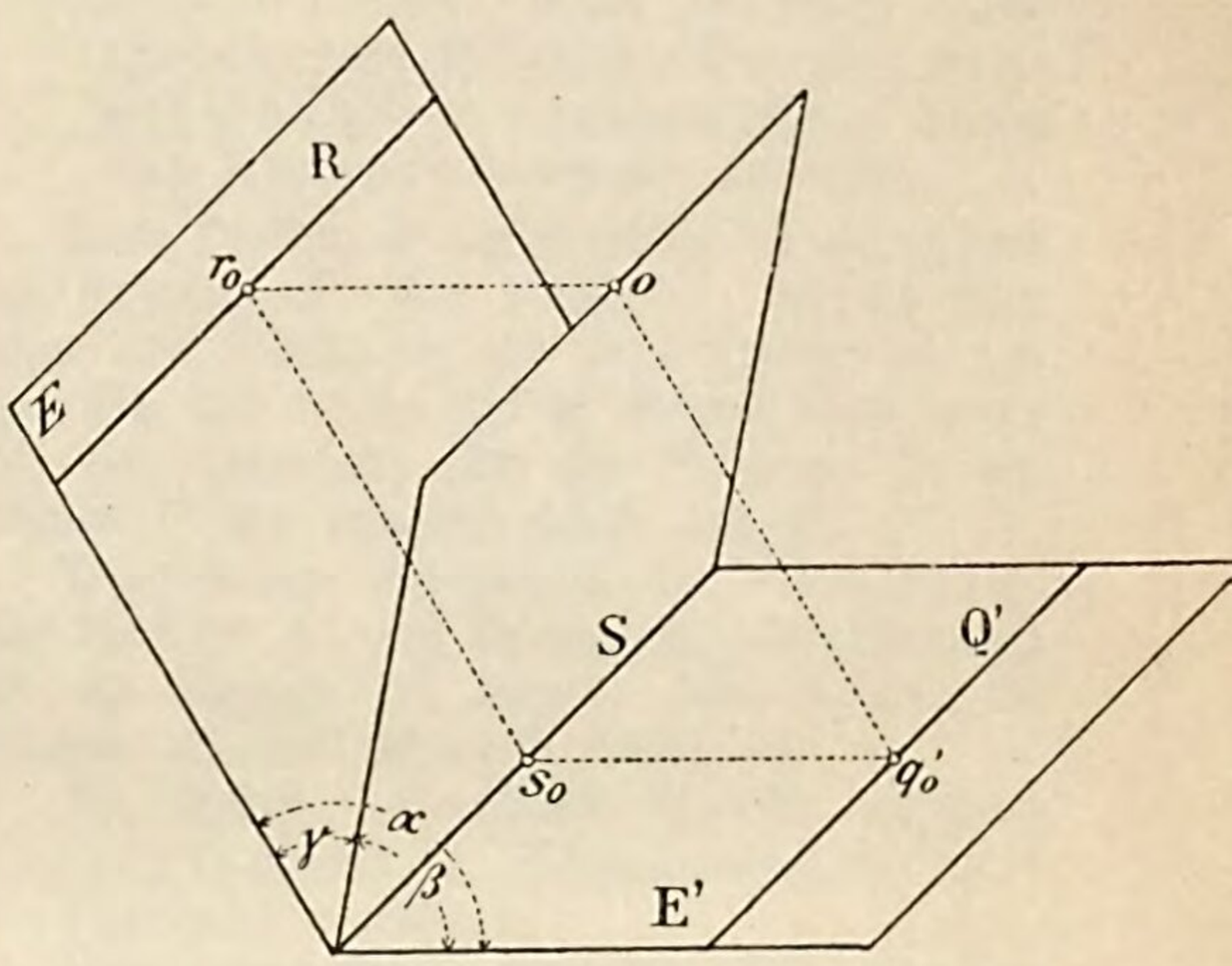
$$8) \ldots \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\overline{o\,r_0}}{\overline{s_0\,r_0}} = \frac{\overline{s_0\,q_0'}}{\overline{o\,q_0'}} = \Delta$$

aus welcher Gleichung sich der Satz ableitet:

„Das charakteristische Teilverhältnis oder die Charakteristik einer centrischen Collineation zweier ebenen Systeme, d. h. einer Centralprojektion, ist das Teilverhältnis des Winkels α für die durch das Centrum und die Collineationsachse bestimmte Ebene."

Der Wert Δ für die in Gleichung 3) angeführten Doppelverhältnisse ist für die in Rede stehende Collineation der Ebene charakterstisch. Man nennt aus diesem Grunde auch den Wert Δ das charakteristische Doppelverhältnis oder die Charakteristik der centrischen Collineation, bezw. Centralprojektion.

Figur 2.



B. Verschiedene Werte der Charakteristik einer Centralcollineation.

Frage 2. Welche speziellen Werte kann die Charakteristik einer centrischen Collineation annehmen, und welche besonderen Lagen des Centrums zu den Ebenen der Systeme folgen hieraus?

Antwort. Die speziellen Werte der Charakteristik können sein:

$$1) \ldots \Delta = 0$$
$$2) \ldots \Delta = \infty$$
$$3) \ldots \Delta = +1$$
$$4) \ldots \Delta = -1$$

Der Fall $\Delta = o$ ist nur möglich, wenn entweder $\overline{o\,r_0} = o$ oder $\overline{s_0\,q'_0} = o$ ist. Es liegt aber dann das Centrum in einer der beiden Ebenen E oder E'. Nach dem Umlegen beider Ebenen in eine Ebene fällt o mit R^0 bezw. Q' zusammen. Fällt o in die Ebene E, so entspricht jedem Punkte bezw. jedem Strahle durch o von E_1 in der Ebene E' ein Punkt in der Achse S, jeder nicht durch o gehenden Geraden in E die Achse S. Liegt dagegen o in E', so entspricht analog jedem Punkte bezw. jedem Strahle durch o von E' in der

Ebene E ein Punkt der Achse S, jeder nicht durch o gehenden Geraden von E' in der Ebene E die Achse S.

Der Fall $\Delta = \infty$ ist nur möglich, wenn entweder $\overline{s_0 r_0} = o$ oder $\overline{o q_0'} = o$ ist, es liegt dann wieder o in einer der beiden Ebenen und zwar im ersten Falle in der Ebene E', im zweiten Falle in der Ebene E.

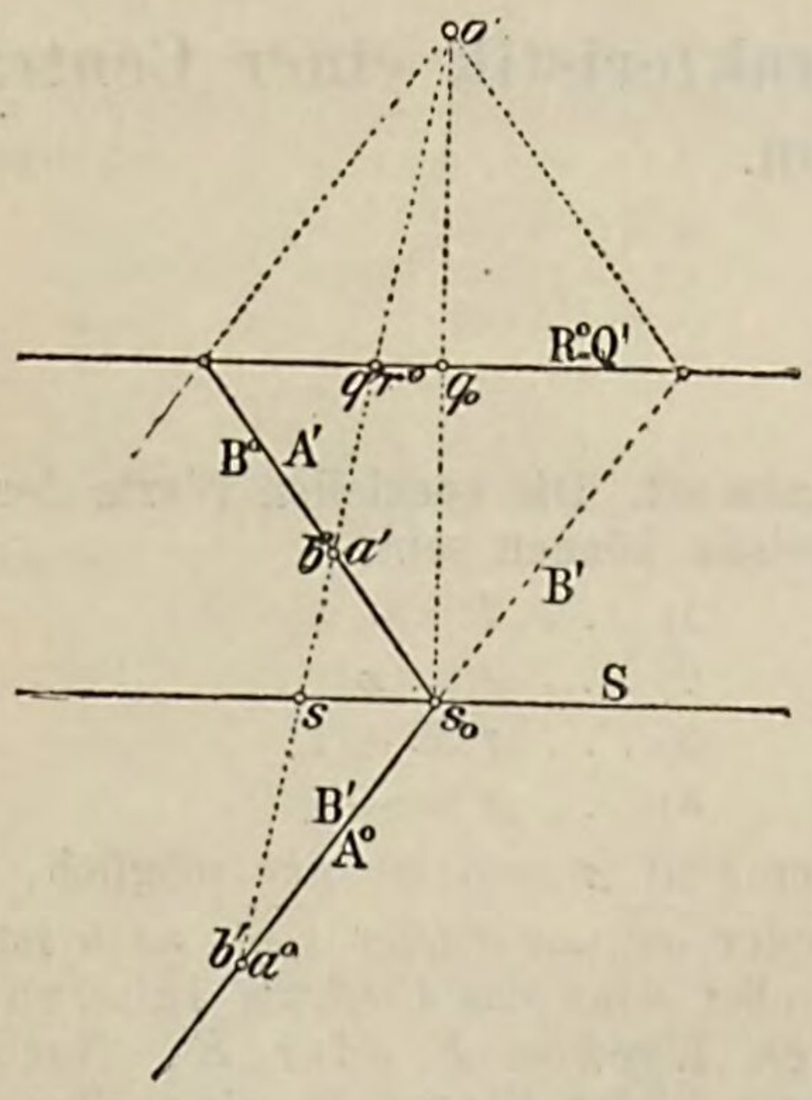
Der Fall $\Delta = +1$ tritt ein, wenn $\overline{o r_0} = \overline{s_0 r_0}$ oder $\overline{s_0 q_0'} = \overline{o q_0'}$ ist, d. h. wenn das Centrum in der Halbierungsebene des Winkels der Ebenen E und E' liegt und zwar in der Halbierungsebene jenes Winkels, um welchen die Drehung bei der Umlegung nicht erfolgt. Bei der Collineation in der Ebene liegen die beiden Gegenachsen R^0 und Q' auf beiden Seiten von S und gleichweit von dieser Linie abstehend; das Centrum o fällt in die Linie S.

Es ist noch ein zweiter Fall von Centralprojektion denkbar, für welchen die Charakteristik $\Delta = +1$ wird, wenn nämlich die in den beiden Ebenen E und E' liegenden collinearen Gebilde kongruente nach der Umlegung sich deckende Systeme sind. In diesem Falle ist sowohl das Centrum als auch die Collineationsachse unbestimmt.

Eine besondere Wichtigkeit kommt schliesslich noch dem letzten in Antwort der Frage 2 genannten Falle zu, wenn nämlich die Charakteristik Δ den Wert gleich der negativen Einheit besitzt.

In diesem Falle liegt wieder das Centrum in der Halbierungsebene des Winkels der beiden Ebenen E und E', nunmehr aber in der Halbierungslinie jenes Winkels, um welchen bei der Umlegung die Drehung stattfindet. Nach der Umlegung fallen offenbar die Achsen R und Q' zusammen und stehen sowohl vom Centrum o, wie von der Achse S gleichweit ab, siehe Figur 3.

Figur 3.



Schreibt man für ein Paar entsprechender Punkte oder Strahlen das charakteristische Doppelverhältnis an, so erhält man z. B.:

$$(os,\ a' a^0) = -1$$

$$\frac{\overline{o\,a'}}{\overline{s\,a'}} : \frac{\overline{o\,a^0}}{\overline{s\,a^0}} = -1$$

oder:

$$\frac{\overline{o\,a^0}}{\overline{s\,a^0}} : \frac{\overline{o\,a'}}{\overline{s\,a'}} = -1$$

d. h. es ist:

9) . . . $(os, a'a^0) = (os, a^0a')$

für jedes Paar entsprechender Punkte.

Hieraus folgt aber auch die Gleichheit:

10) . . . $(CS, A'A^0) = (CS, A^0A')$

Die Gleichungen 9) und 10) enthalten den Satz:

„Bei einer centrischen Collineation mit der Charakteristik $\Delta = -1$ kann man je zwei entsprechende Punkte oder Strahlen miteinander vertauschen ohne das Entsprechen zu stören.

Dem Punkte a^0 im Systeme E entspricht im Systeme E' der Punkt a', nimmt man aber den Punkt a^0 als dem System E' angehörig und nennt ihn in diesem Falle etwa b', so entspricht ihm im Systeme E ein Punkt b^0 der zusammenfällt mit a'.

Desgleichen entspricht der Geraden A^0 die Gerade A', und umgekehrt der Geraden B' die Gerade B^0 derart, dass A^0 und B' ebenso A' und B^0 sich decken.

Bei dieser Collineation besteht demnach projektivisches Entsprechen mit Vertauschbarkeit.

Man nennt diese besondere Art der centrischen Collineation die harmonische Centralcollineation.

Bei derselben entstehen auf allen durch das Centrum gehenden Strahlen involutorische Punktreihen, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, III. Teil, 1. Hälfte, Seite 129, mit den Doppelpunkten o und s.

Die Mittelpunkte aller dieser Involutionen liegen im Schnittpunkt des betreffenden Strahles mit den vereinigten Gegenachsen R^0Q'.

Desgleichen bilden die Punkte s der Collineationsachse die Mittelpunkte von involutorischen Strahlbüscheln mit den Doppelstrahlen so und S.

Erkl. 2a. Mit Bezugnahme auf den Inhalt der Antwort der Frage 2 kann man auch sagen:

„Bei einer harmonischen Centralcollineation bilden je ein Paar entsprechender Punkte mit dem Centrum als dem Schnittpunkte ihres projizierenden Strahles mit der Collineationsachse vier harmonische Punkte.“

Oder:

„Bei einer harmonischen Centralcollineation bilden je ein Paar entsprechender Geraden, sowie der Verbindungsstrahl ihres Schnittpunktes mit dem Centrum und die Collineationsachse vier harmonische Strahlen.“

C. Arten der Centralprojektion, bezw. Centralcollineation bei allgemeiner Charakteristik Δ.

Frage 3. Welche speziellen Lagen können bei der allgemeinen Charakteristik Δ das Centrum und welche Lagen die Collineationsachse zu einander einnehmen?

Antwort. Das Centrum und die Collineationsachse können folgende Lagen einnehmen:

1) Das Centrum liegt unendlich fern, die Collineationsachse dagegen im Endlichen.

2) Das Centrum liegt im Endlichen, die Collineationachse dagegen unendlich fern.

3) Das Centrum und die Collineationsachse liegen uunendlich fern.

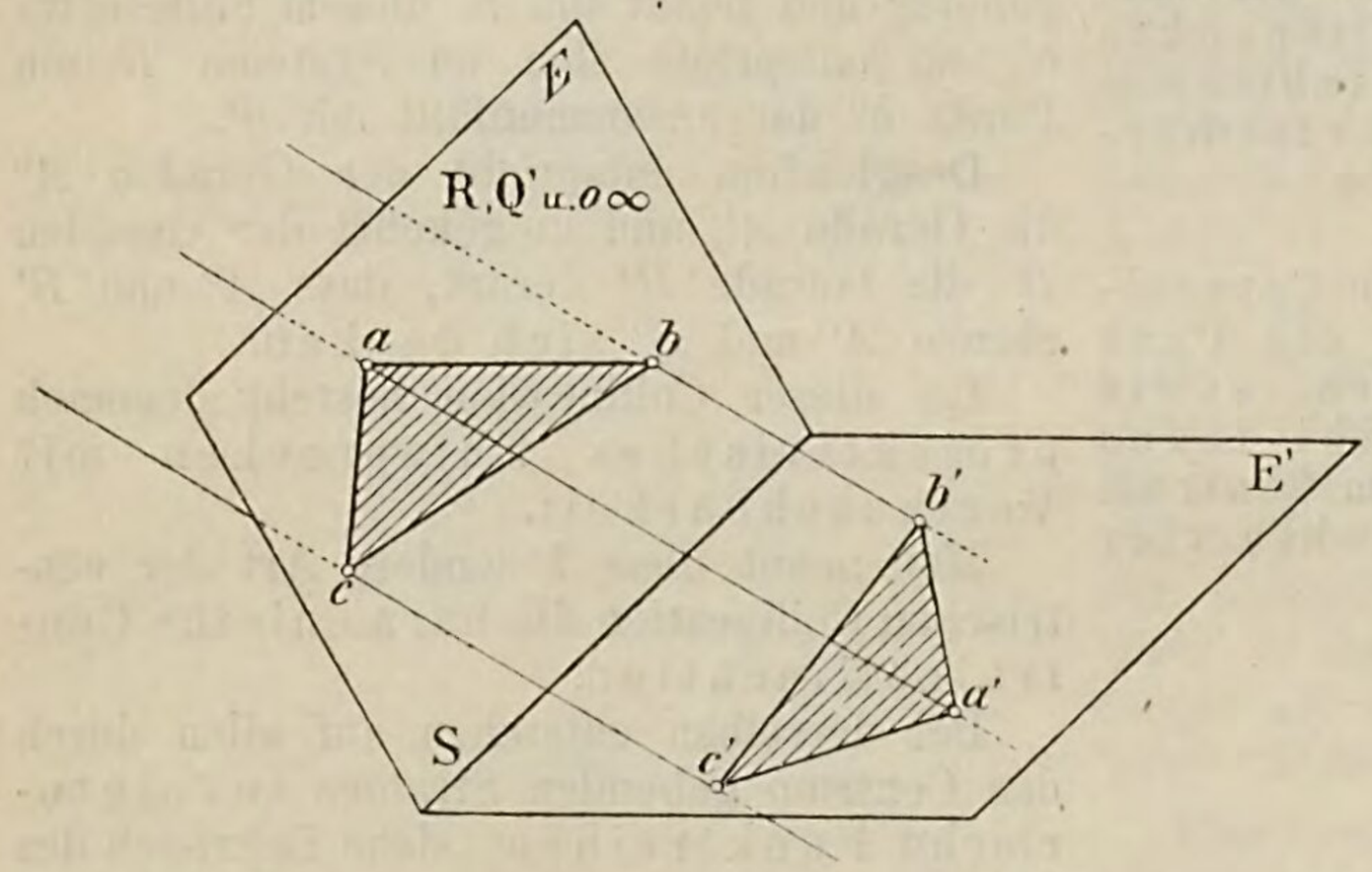
4) Das Centrum liegt in der Collineationsachse.

---

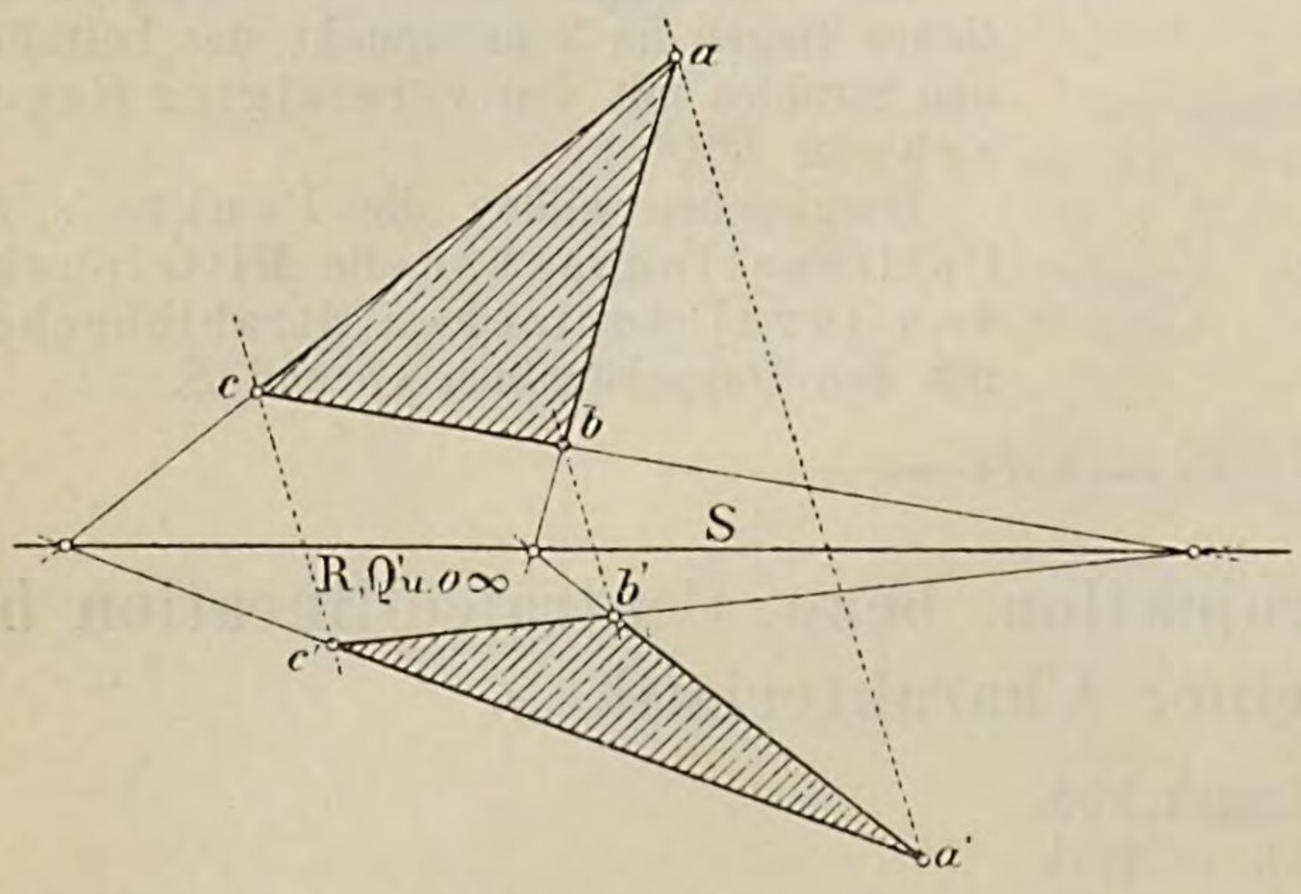
a) Affinität.

Frage 4. Welche Beziehungen ergeben sich für die in der Antwort der Frage 3 unter Ziffer 1) genannten Lagen von Centrum und Achse?

Figur 4.



Figur 5.



NB. Der Punkt s_1 ist der Schnittpunkt des Strahles aa' mit der Achse S.

Antwort. Im Falle der Antwort 1) der Frage 3 ergibt sich der Zusammenhang, wie er in Figur 4 vor und in Figur 5 nach der Umlegung dargestellt ist.

Man erhält Parallelprojektion und die ebenen Systeme stehen in dem Zusammenhange der Affinität (siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, I. Teil).

Für ein Paar entsprechender Punkte $a'a$, siehe Figur 5, hat man das charakteristische Doppelverhältnis:

$$(\infty s_1, a'a) = \Delta$$

oder:

$$\frac{\overline{\infty a'}}{\overline{s_1 a'}} : \frac{\overline{\infty a}}{\overline{s_1 a}} = \Delta$$

oder:

11) . . . $\dfrac{\overline{s_1 a'}}{\overline{s_1 a}} = \Delta =$ konstant

für alle Paare entsprechender Punkte, d. h. die Reihen in den Collineationsstrahlen sind ähnlich mit dem Aehnlichkeitspunkt in der Achse S.

Mit anderen Worten lässt sich das eben gewonnene Resultat auch so ausdrücken:

„Die Strecken zwischen entsprechenden Punkten auf den Collineationsstrahlen werden durch die Durchschnittspunkte mit der Achse S in konstantem Verhältnis Δ geteilt."

Hieraus ergibt sich aber unmittelbar als weitere Folgerung: dass die Flächeninhalte entsprechender Figuren in dem konstanten Verhältnis Δ zu einander stehen müssen.

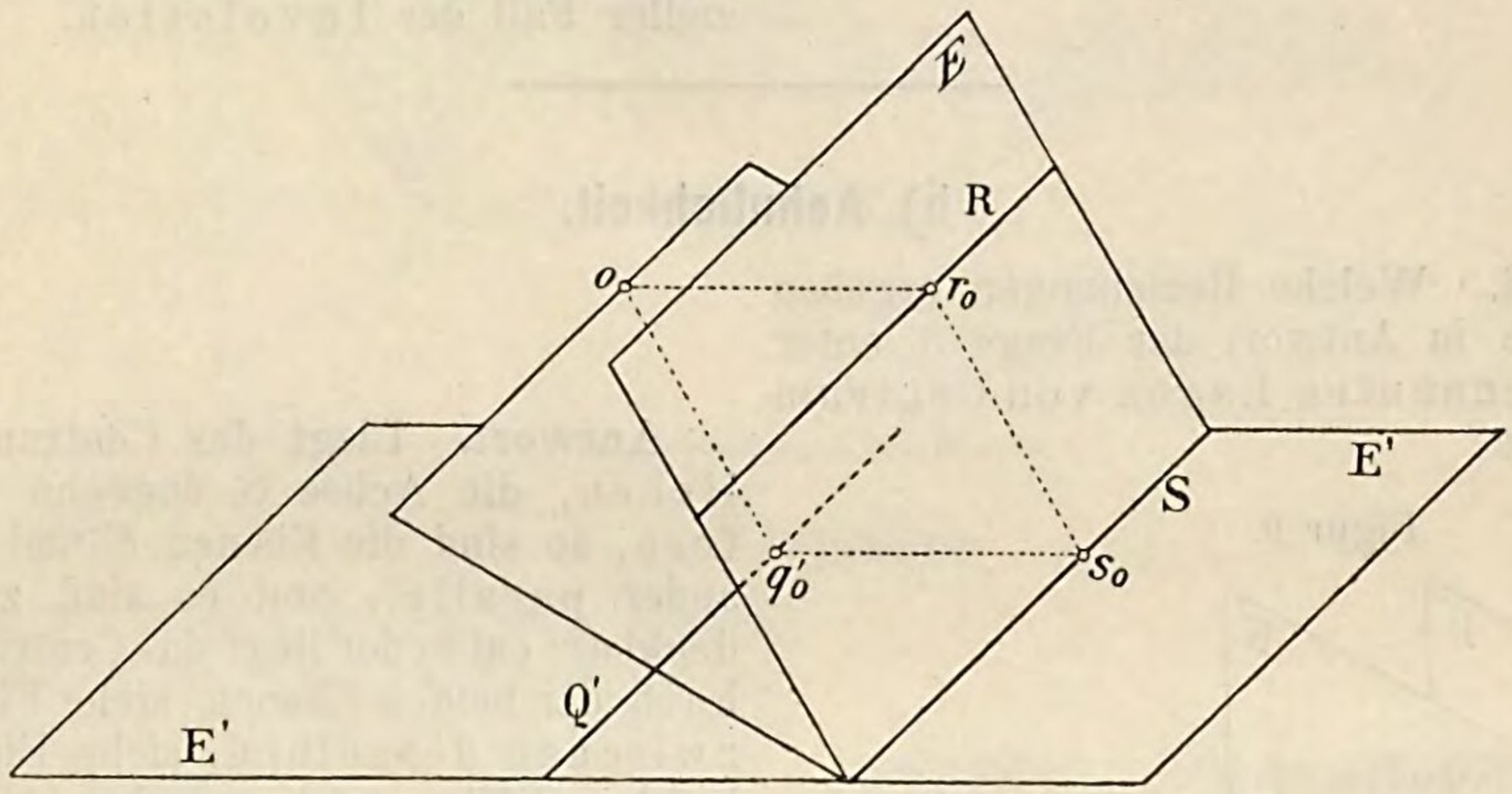
Für die Gegenpunkte r und q' erhält man:

12) . . . $(\infty s_1, r\infty) = (\infty s_1, \infty q') = \Delta$

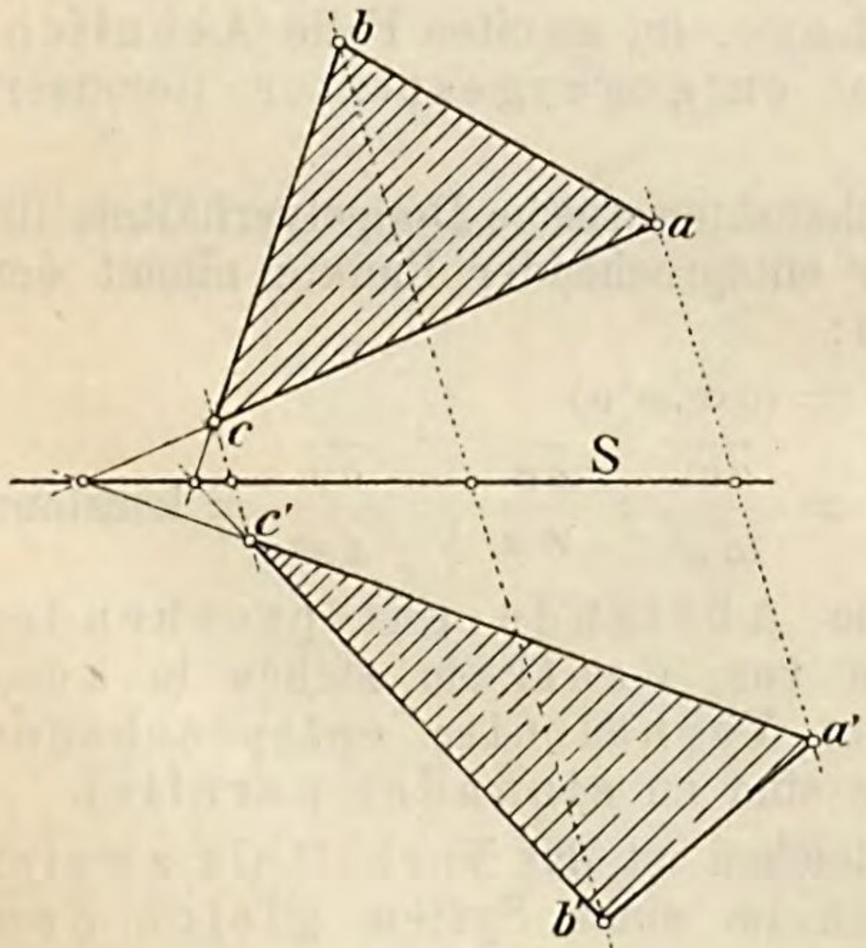
d. h. die Gegenpunkte liegen unendlich fern und damit auch die Gegenachsen selbst.

Hieraus folgt ferner, dass parallelen Geraden im einen System auch parallele Gerade im anderen System entsprechen.

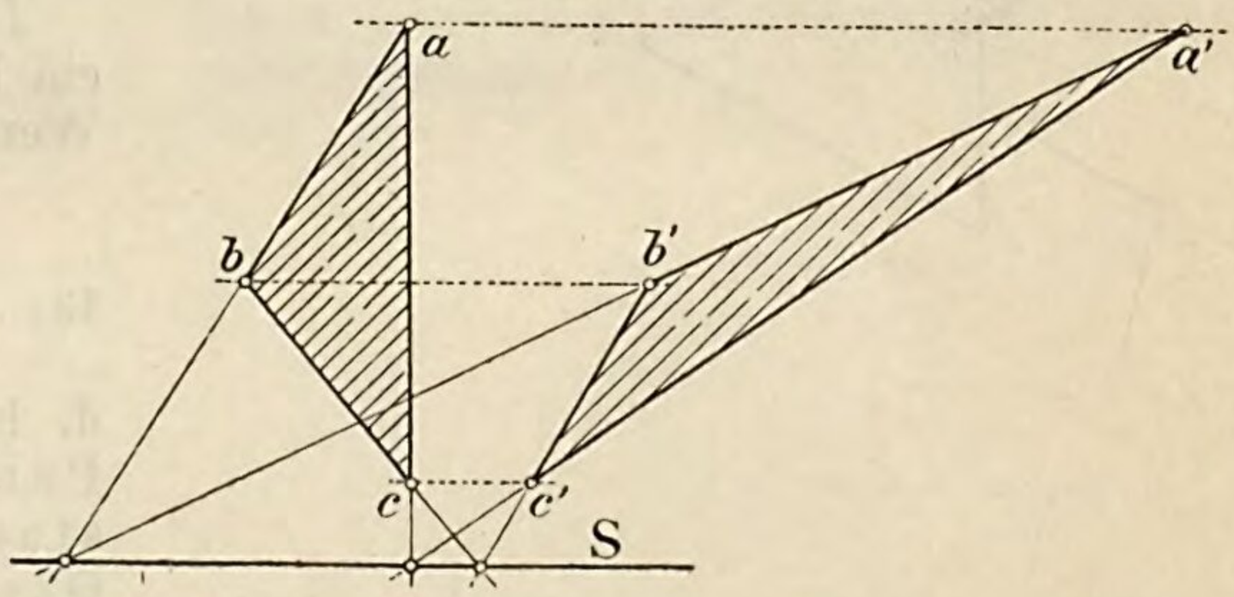
Figur 6.



Figur 7.



Figur 8.



Frage 5. Welche Beziehungen erhält man, wenn im Falle der Affinität die Charakteristik noch insbesondere den Wert $\Delta = -1$ annimmt?

Erkl. 3. Liegt das Centrum unendlich fern und in der Halbierungsebene jenes Winkels, um welchen die Drehung nicht stattfindet, so nimmt bekanntlich die Charakteristik den Wert $\Delta = +1$ an. Nach der Umlegung zeigen.

Antwort. In diesem besonderen Falle tritt zur Affinität noch die Involution hinzu; man erhält involutorische Affinität und die Anordnung, wie sie Figur 6 und 7 vor und nach der Umlegung zeigen.

Das Centrum liegt unendlich fern und zwar in der Halbierungsebene des

legung sind dann die Affinitätsstrahlen parallel zur Achse S und man erhält die Anordnung der Figur 8; affine Figuren sind wieder flächengleich.

Erkl. 4. Von dem in Erkl. 3 bezeichneten Fall der Affinität wurde schon vielfach Gebrauch gemacht anlässlich der Konstruktion der Schlagschatten ebener Figuren (siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, II. Teil, Seite 133 u. ff.).

Winkels, um welchen die Drehung stattfindet.

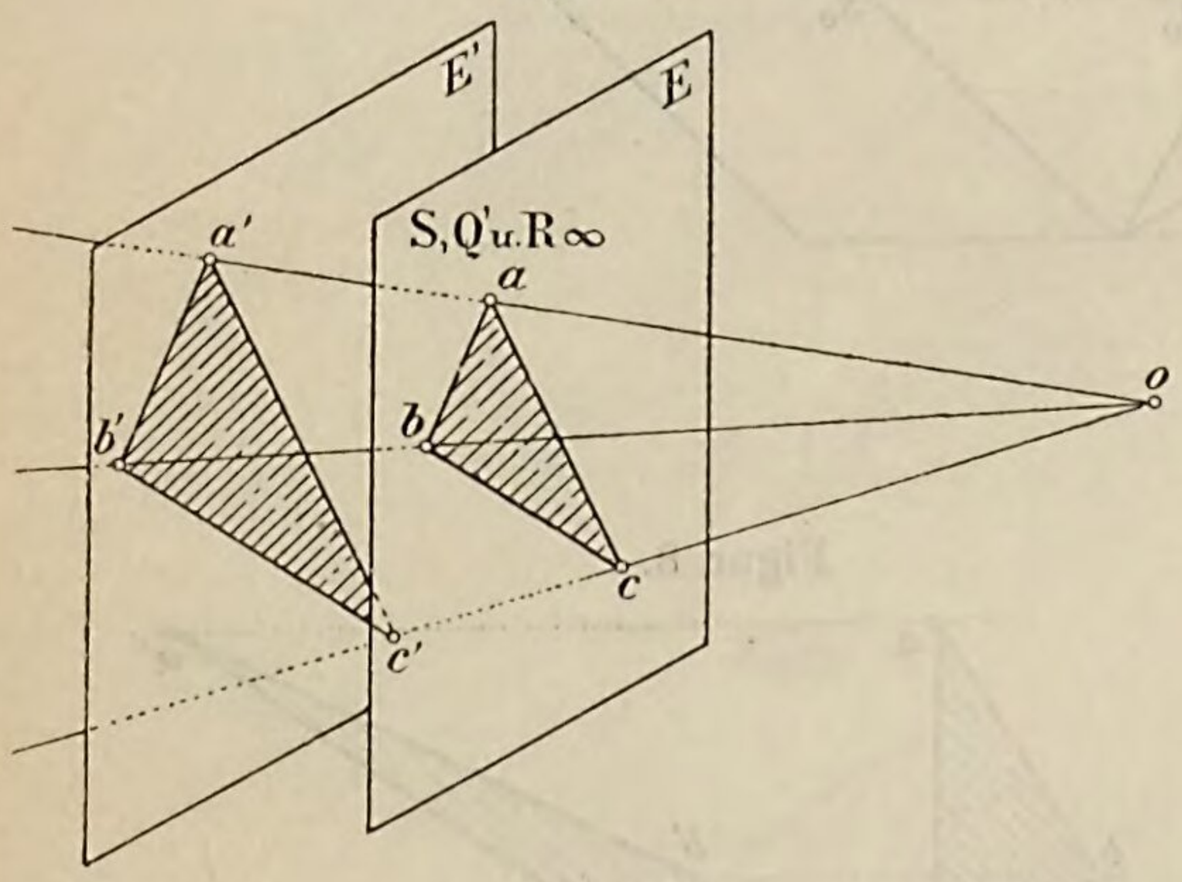
Nach der Umlegung haben entsprechende Punkte gleiche Entfernung von der Achse S; entsprechende Figuren werden flächengleich. Liegt insbesondere das Centrum noch in senkrechter Richtung zur Achse S, so tritt zur Flächengleichheit noch die Kongruenz hinzu; involutorische affine Systeme sind also stets symmetrisch und zwar schief oder rechtwinklig symmetrisch zur Collineationsachse angeordnet. Die Symmetrie ist ein spezieller Fall der Involution.

---

b) Aehnlichkeit.

Frage 6. Welche Beziehungen ergeben sich für die in Antwort der Frage 3 unter Ziffer 2) genannten Lagen von Centrum und Achse?

Figur 9.



Erkl. 5. Nimmt die Charakteristik den speziellen Wert $\Delta = -1$ an, so werden die Abstände entsprechender Punkte vom Centrum einander entgegengesetzt gleich, entsprechende Figuren liegen symmetrisch bezüglich des Centrums und sind demnach kongruent.

Antwort. Liegt das Centrum im Endlichen, die Achse S dagegen unendlich fern, so sind die Ebenen E und E' zu einander parallel, und es sind zwei Fälle denkbar: entweder liegt das Centrum ausserhalb der beiden Ebenen, siehe Figur 9, oder zwischen denselben, siehe Figur 10. In beiden Fällen tritt zwischen den projizierten Figuren Aehnlichkeit ein und zwar im ersten Falle Aehnlichkeit in ähnlicher Lage, im zweiten Falle Aehnlichkeit in entgegengesetzter (inverser) Lage.

Das charakteristische Doppelverhältnis für ein Paar entsprechender Punkte nimmt den Wert an:

$$\Delta = (o\,\infty, a'\,a)$$

$$13) \quad \ldots = \frac{\overline{o\,a'}}{\overline{\infty\,a'}} : \frac{\overline{o\,a}}{\overline{\infty\,a}} = \frac{\overline{o\,a}}{\overline{a\,a^0}} = \text{konstant},$$

d. h. die Abstände entsprechender Punkte vom Centrum stehen in konstantem Verhältnis; entsprechende Gerade sind zu einander parallel.

Desgleichen ist das Verhältnis zweier Strecken im einen System gleich dem Verhältnis der entsprechenden Strecken im anderen.

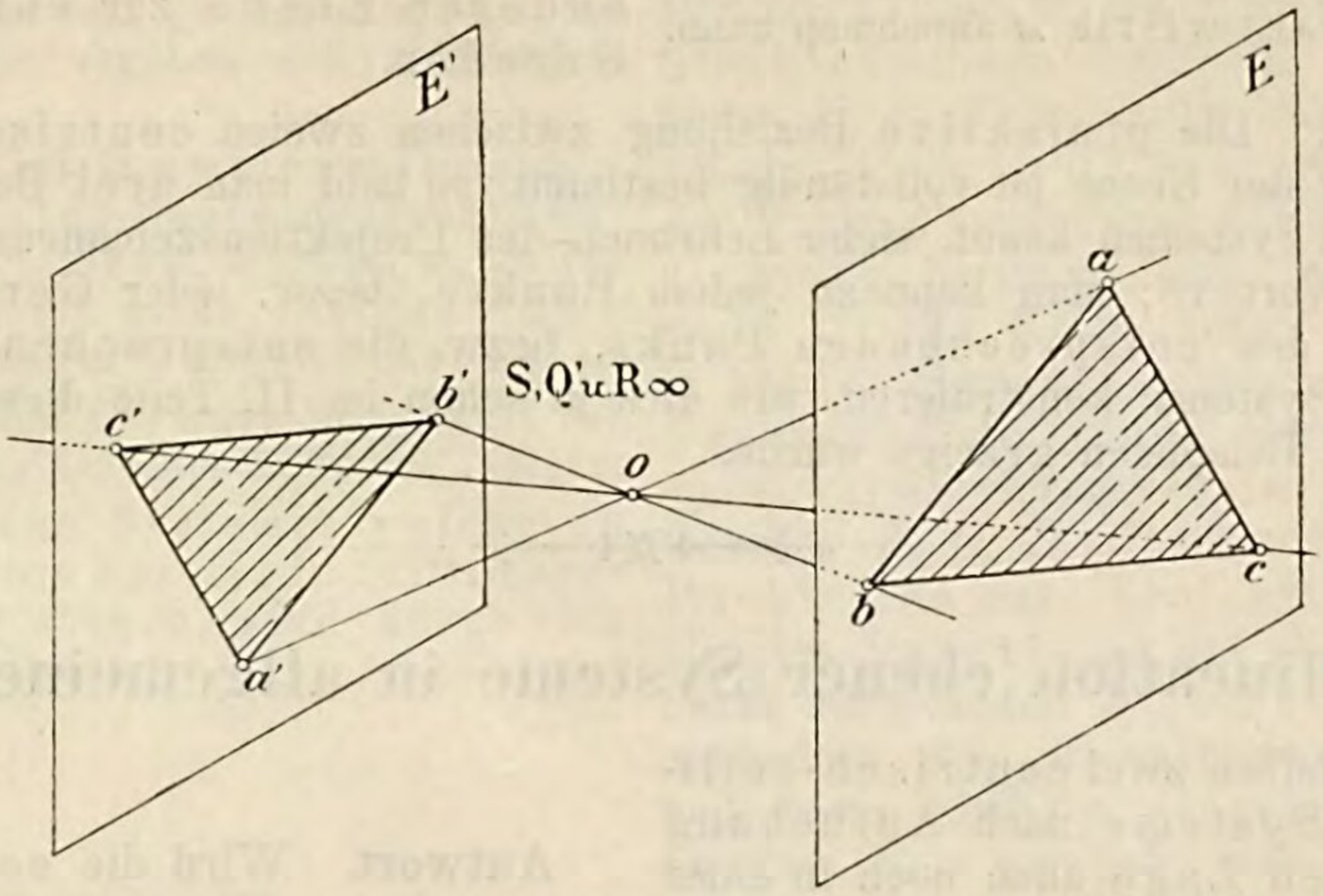
Die Gegenachsen fallen in unendliche Ferne.

Je nachdem der Wert von Δ positiv oder negativ ist, wird das Centrum äusserer oder innerer Aehnlichkeitspunkt zwischen den ähnlichen Systemen.

Die Flächeninhalte entsprechender Figuren haben ein konstantes Verhält-

nis zu einander und zwar gleich dem Quadrate der Charakteristik, also gleich Δ^2.

Figur 10.

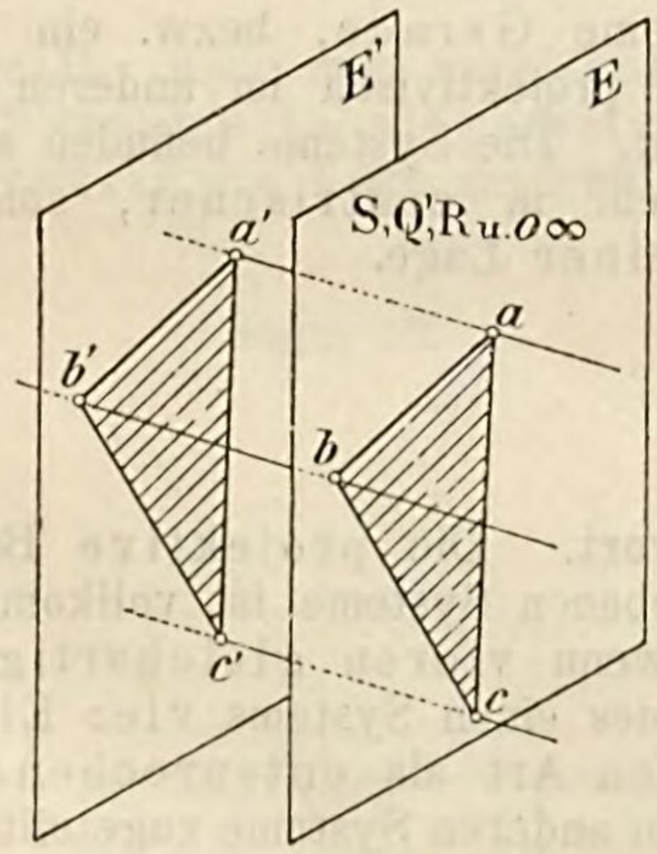


c) Kongruenz.

Frage 7. Welche Beziehungen ergeben sich für die in Antwort der Frage 3 unter Ziffer 3) genannten Lagen von Centrum und Achse?

Antwort. Liegen sowohl das Centrum wie die Collineationsachse unendlich fern, siehe Figur 11, so findet sowohl Affinität wie auch Aehnlichkeit in ähnlicher Lage statt; beides zusammen liefert aber kongruente Systeme, siehe Figur 11, welche durch parallele Verschiebung zur Deckung gebracht werden können.

Figur 11.



d) Parabolische Involution.

Frage 8. Welche Beziehungen ergeben sich für die in Antwort der Frage 3 unter Ziffer 4) genannte Lage des Centrums?

Erkl. 6. Die in Antwort der Frage 8 geschilderte besondere Art des Entsprechens nennt man die parabolische Involution.

Antwort. Liegt das Centrum in der Achse S, so fallen mit derselben selbstverständlich auch die Gegenachsen R und Q' zusammen. Jedem Punkte in der einen Ebene entspricht stets der Punkt o in der anderen, jeder Geraden der einen

Erkl. 7. In den Fragen und Antworten, Ziffern 3 bis 8 sind alle wichtigeren Fälle der Centralprojektion bezw. der centrischen Collineation der Ebene aufgeführt, unter Berücksichtigung der verschiedenen Werte, welche die Charakteristik Δ annehmen kann.

Ebene, die Achse S in der anderen. Jede das Centrum enthaltende Gerade der einen Ebene hat jede gleichfalls durch das Centrum gehende Gerade der anderen Ebene zur entsprechenden Geraden.

Anmerkung 2. Die projektive Beziehung zwischen zweien centrisch-collinearen Systemen der Ebene ist vollständig bestimmt, so bald man drei Bestimmungsstücke in beiden Systemen kennt, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, II. Teil, Frage und Antwort 18; man kann zu jedem Punkte, bezw. jeder Geraden des einen Systems den entsprechenden Punkt, bezw. die entsprechende Gerade des anderen Systems, konstruieren, wie dies ja schon im II. Teile dieses Lehrbuchs an einzelnen Beispielen gezeigt wurde.

D. Collineation ebener Systeme in allgemeiner Lage.

Frage 9. Bleiben zwei centrisch-collineare ebene Systeme nach Aufhebung der centrischen Lage auch noch in einer Beziehung zu einander und in welcher?

Antwort. Wird die centrische Lage von zweien collinearen ebenen Systemen aufgehoben, an der gegenseitigen Lage der einzelnen Punkte und Linien jedes Systems aber nichts geändert, so bleiben die beiden Systeme in projektiver, d. h. collinearer Beziehung zu einander, und zwar derart, dass jedem Punkte, bezw. jeder Punktreihe des einen Systems wieder ein Punkt, bezw. eine Punktreihe, jeder Geraden, bezw. jedem Strahlbüschel wieder eine Gerade, bezw. ein Strahlbüschel projektivisch im anderen Systeme entspricht. Die Systeme befinden sich aber nicht mehr in centrischer, sondern in allgemeiner Lage.

Frage 10. Wieviele Bestimmungsstücke können beliebig gegeben werden, damit zwei ebene Systeme in collinearen Zusammenhang zu einander treten und wie konstruiert man zu jedem Elemente des einen Systems das entsprechende Element im anderen?

Antwort. Die projektive Beziehung zweier ebenen Systeme ist vollkommen gegeben, wenn vieren gleichartigen Elementen des einen Systems vier Elemente derselben Art als entsprechende Elemente im anderen Systeme zugeteilt werden, mit der Einschränkung jedoch, dass bei vier Punkten keine drei auf einer Geraden liegen, bei vier Geraden keine drei durch denselben Punkt hindurchgehen dürfen.

Sind z. B. a, b, c, d die gegebenen Punkte im einen, a', b', c', d' die gegebenen Punkte des anderen Systems und soll zu einem Punkte p der entsprechende Punkt p' konstruiert werden, so nehme man etwa die Punkte a und a' als Mittelpunkte von projektiven Strahlbüscheln, deren Strahlen durch b, c, d, bezw. b', c', d' hindurchgehen; dem

Erkl. 8. Aus dem in der Antwort der Frage 10 Gesagten ergeben sich unmittelbar die Sätze:

„Decken sich in zweien collinearen Systemen vier Paare entsprechender Punkte, bezw. Strahlen, so ist dies bezüglich aller übrigen Paare entsprechender Elemente der Fall.“

Dabei gilt wieder die schon in Antwort der Frage 10 hervorgehobene Beschränkung, ferner:

„Zwei ebene Systeme, welche zu einem dritten System in collinearer Beziehung stehen, sind unter sich selbst collinear.“

den Punkt p enthaltenden Strahl P entspricht ein Strahl P' als geometrischer Ort für den Punkt p'.

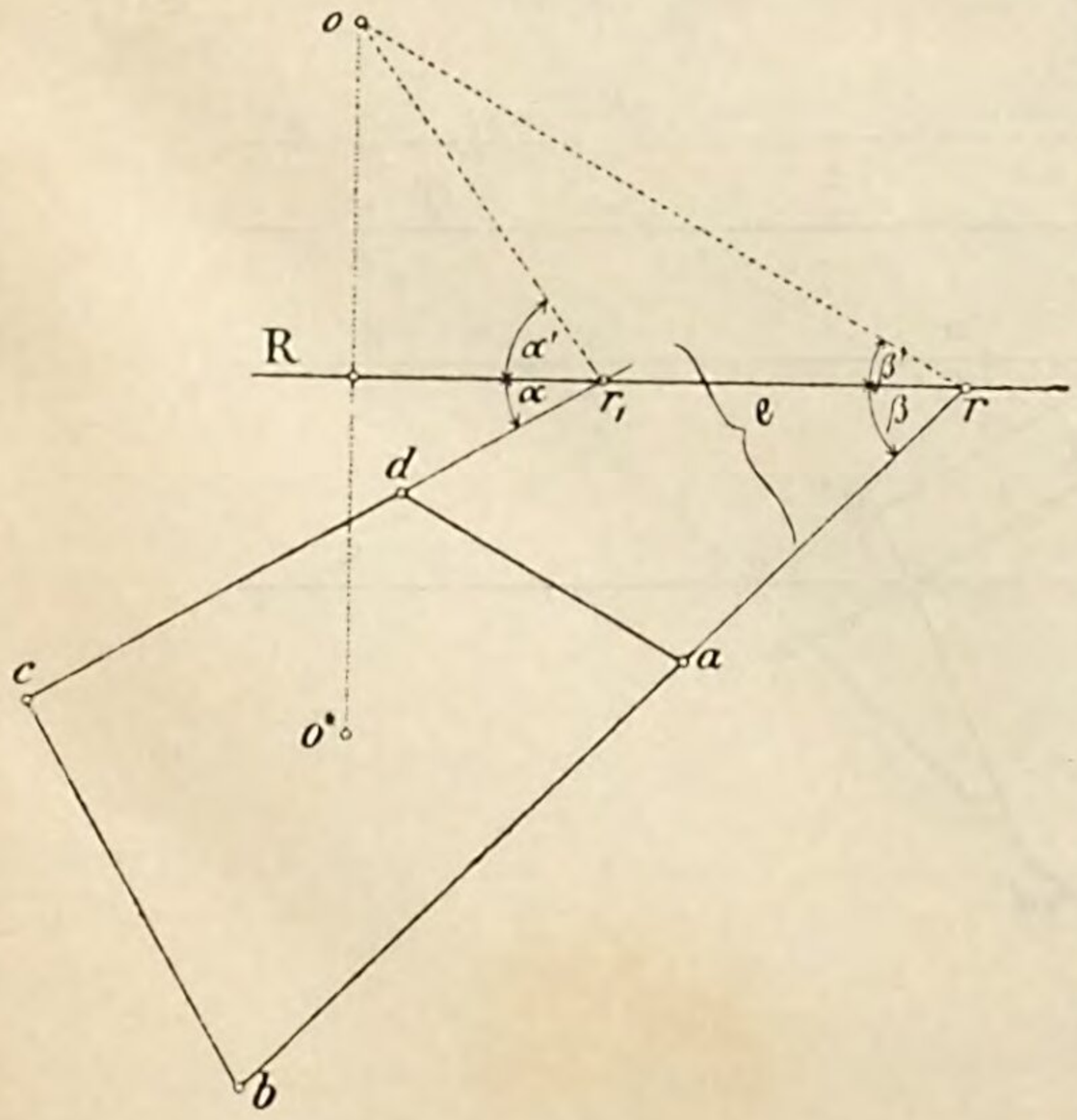
Wählt man in gleicher Weise etwa die Punkte b und b' als Mittelpunkte von Strahlbüscheln durch die Punkte a, c, d, bezw. a', c', d', so erhält man hierdurch im Büschel b' (a, c, d) einen zweiten Ort für den Punkt p' und damit den Punkt p' selbst.

Analog bestimmt man, wenn vier Gerade A, B, C, D, bezw. A', B', C', D' in beiden Systemen gegeben sind, zu einer Geraden P des einen Systems, die entsprechende Gerade P' im anderen. Die Geraden B, C, D, P schneiden auf A eine Punktreihe aus, projektiv der entsprechenden Punktreihe auf A', hervorgerufen durch die Geraden B', C', $D'\cdots$; demgemäss entspricht dem Schnittpunkt p von P und A ein Punkt p' der Geraden P'. Ein zweites Paar projektiver Punktreihen entsteht auf den Geraden B und B' durch die übrigen gegebenen Geraden, wodurch sich ein zweiter Punkt von P' bestimmt.

E. Ueberführung collinearer ebener Systeme aus der allgemeinen in die centrische Lage.

Frage 11. Kann man zwei collineare ebene Systeme in allgemeiner Lage in die centrische Lage zurückführen und wie?

Figur 12.

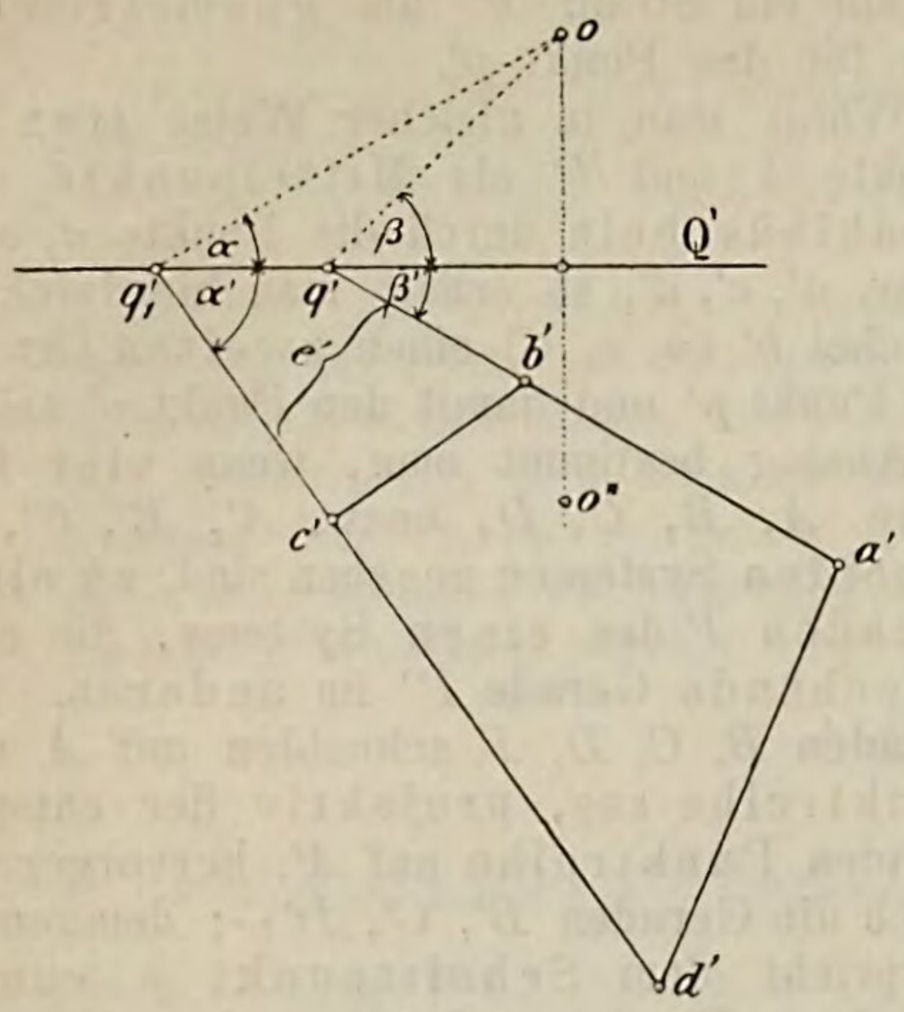


Antwort. Es seien zwei Vierecke $abcd$ und $a'b'c'd'$, siehe Figur 12 und 13, gegeben, derart, dass die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Punkte einander entsprechen sollen, so lassen sich diese Vierecke, und damit überhaupt die Ebenen beider Vierecke in centrische Lage wie folgt bringen:

Denkt man sich die beiden Vierecke $abcd$, und $a'b'c'd'$, siehe Fig. 12 und 13, in centrale Lage gebracht, siehe Figur 14, so erkennt man, dass die vom Centrum o nach den Schnittpunkten entsprechender Seitenpaare, wie ab, $a'b'$, cd, $c'd'$ mit den Gegenachsen gezogenen Strahlen mit den betreffenden entsprechenden Seiten sich je zu einem Parallelogramm ergänzen, dass demnach diese Seiten mit den zugehörigen Gegenachsen Winkel einschliessen gleich jenen der oben erwähnten Strahlen nach den bezüglichen Gegenpunkten. Es sind somit in der Figur 14 die gleich bezeichneten Winkel einander an Grösse gleich.

Bestimmt man in Rücksicht auf die Projektivität der Punktreihen $a, b, c\cdots$, $a'b'c'$,

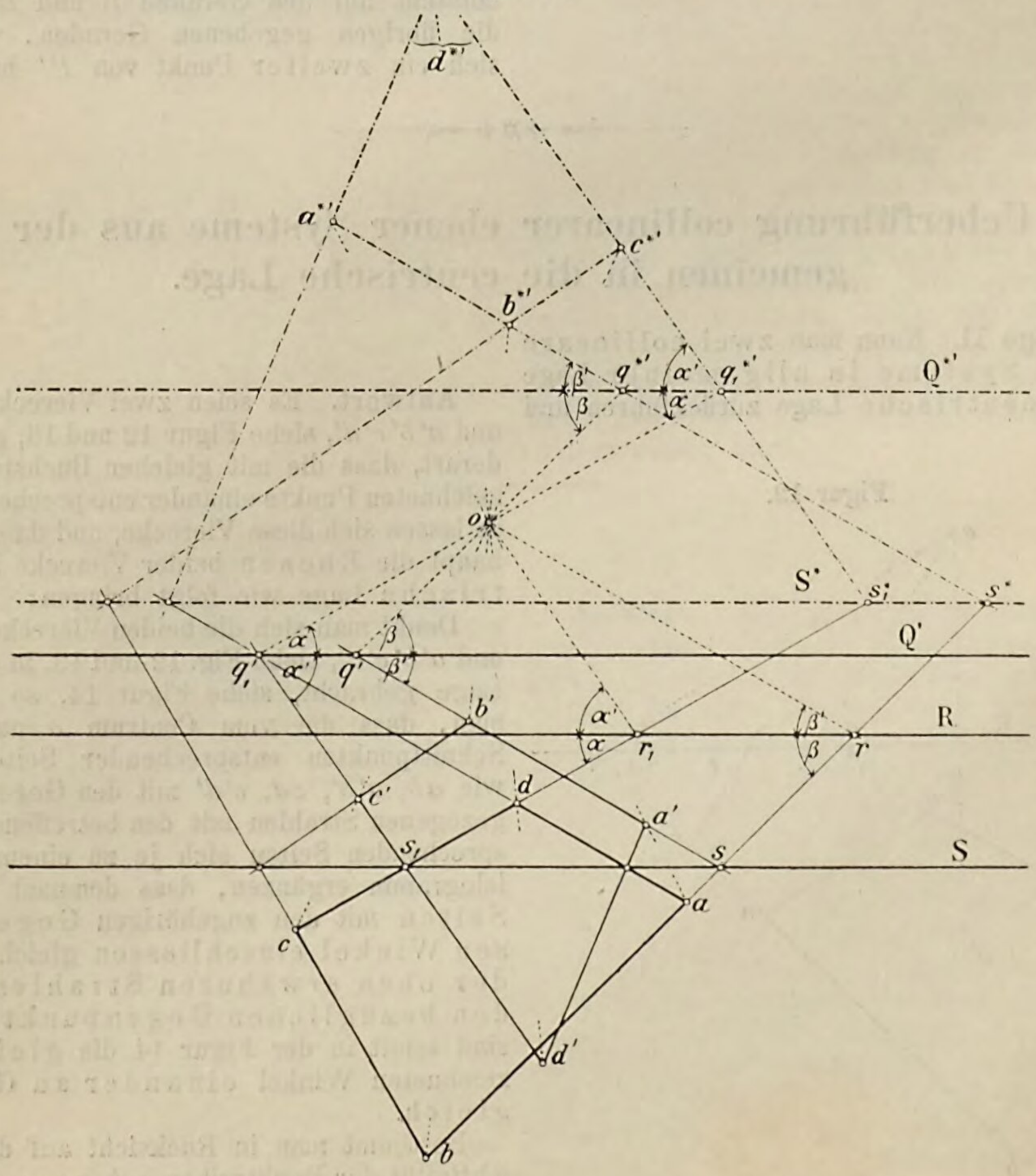
Figur 13.



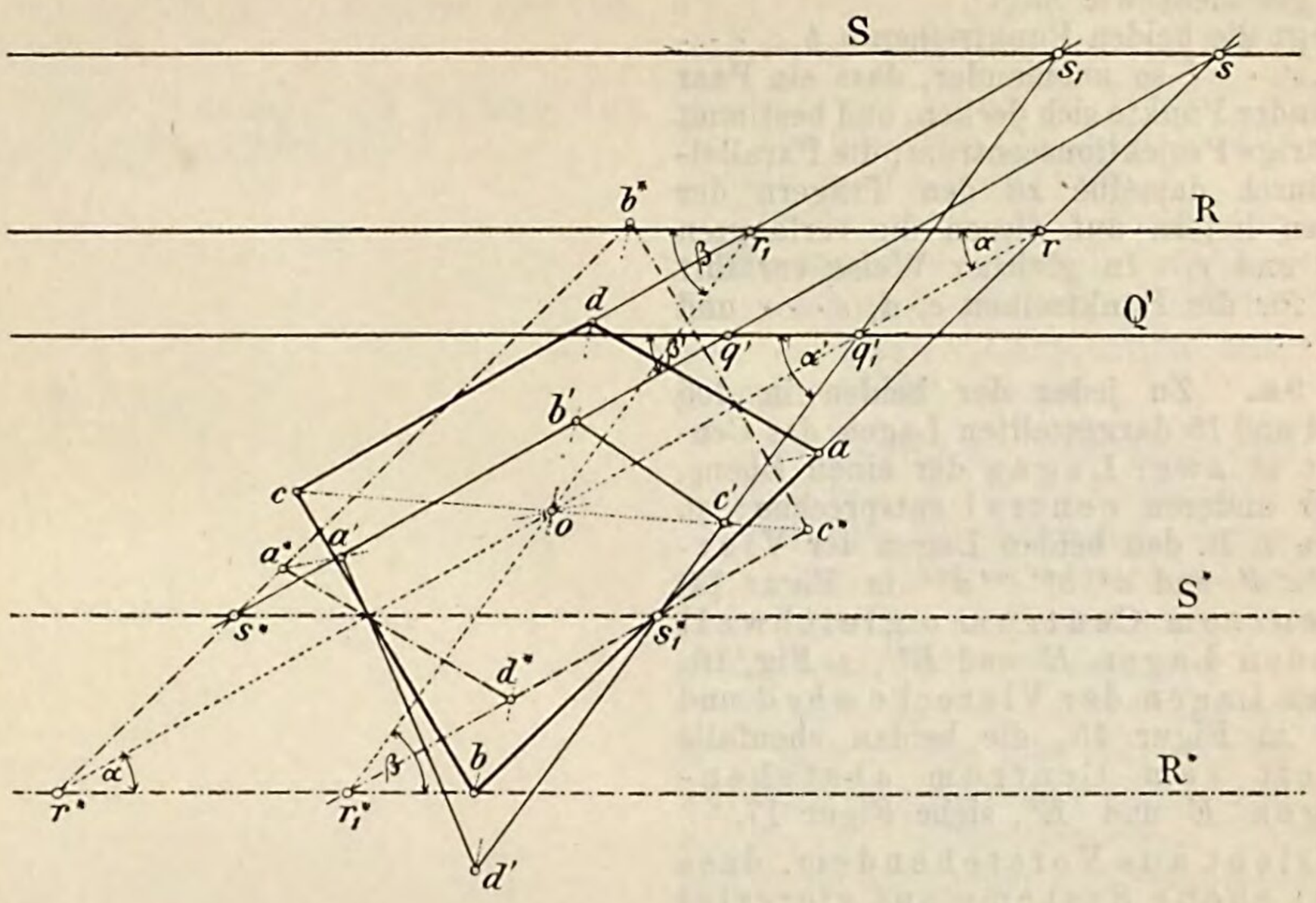
$c, d, f \cdots$, $c'\, d'\, f' \cdots$, siehe Figur 12 und 13, die zugehörigen Gegenpunkte r, q' und r_1, q_1', siehe Erkl. 10, so gewinnt man hierdurch die Gegenachsen R und Q', sowie die eben bezeichneten Winkel α, α', β und β', siehe Figur 12 und 13. Durch Antragen der Winkel α und β, bezw. α' und β' an die Achsen Q' und R ergeben sich endlich für jede der beiden Ebenen die möglichen Lagen o und o^*, ebenso o' und $o^{*\prime}$ des Centrums gegen die Achsen Q' und R.

Man hat jetzt nur noch nötig, die beiden Figuren 12 und 13 längs der Punkte $o\, o^*$ und $o'\, o^{*\prime}$ aneinander zu legen, so dass die Centra o und o' oder o^* und $o^{*\prime}$ zur Deckung gelangen, so hat man die Ebenen der Vierecke in die der Aufgabe entsprechende centrische Lage gebracht, siehe Figur 14 und 15.

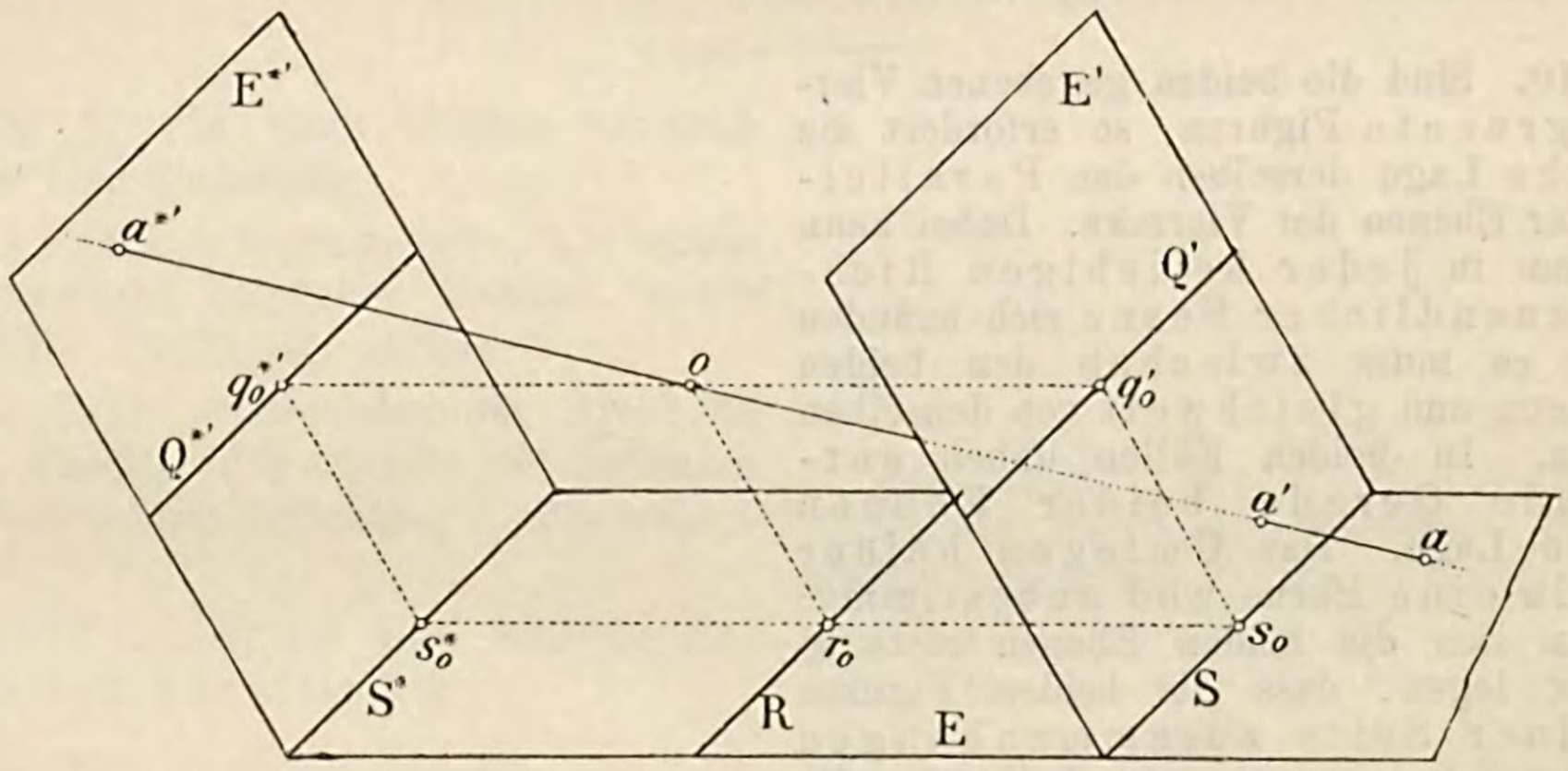
Figur 14.



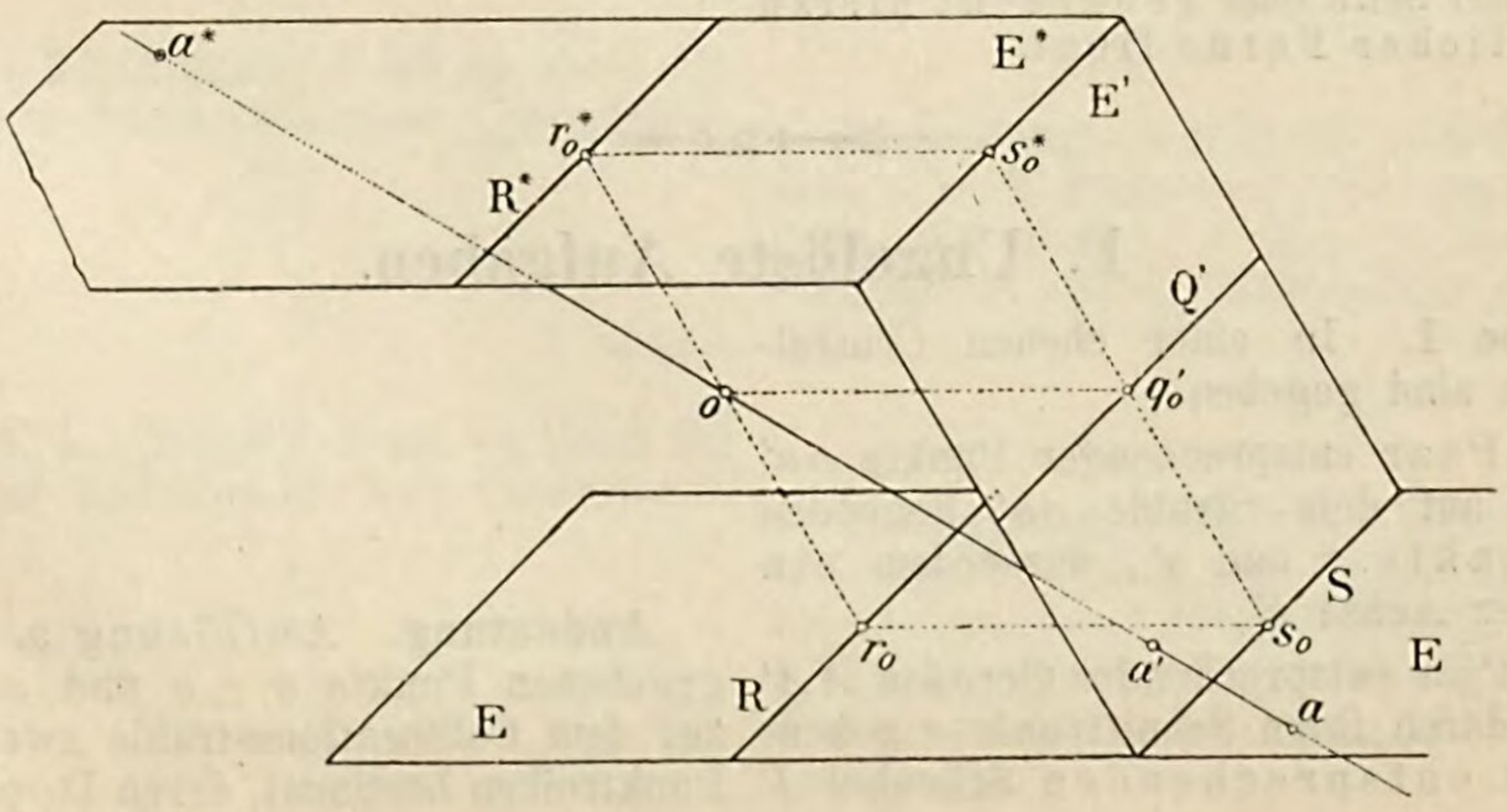
Figur 15.



Figur 16.



Figur 17.



Figur 18.

Erkl. 9. Die Ermittelung der Gegenpunkte geschieht wie folgt:

Man legt die beiden Punktreihen $a, b, c, \cdots$ und $a', b', c', \cdots$ so aneinander, dass ein Paar entsprechender Punkte sich decken, und bestimmt das zugehörige Projektionscentrum; die Parallelstrahlen durch dasselbe zu den Trägern der Punktreihen liefern auf diesen die verlangten Punkte q' und r. In gleicher Weise verfährt man auch für die Punktreihen c, d, $e \cdots$ und c', d' $e' \cdots$

Erkl. 9a. Zu jeder der beiden in den Figuren 14 und 15 dargestellten Lagen des Centrums gibt es zwei Lagen der einen Ebene, welche der anderen central entsprechen; so entsprechen z. B. den beiden Lagen der Vierecke $a'b'c'd'$ und $a^{*'}b^{*'}c^{*'}d^{*'}$ in Figur 14, die beiden vom Centrum o gleichweit abstehenden Lagen E' und $E^{*'}$, s. Fig. 16; den beiden Lagen der Vierecke $abcd$ und $a^*b^*c^*d^*$ in Figur 15, die beiden ebenfalls gleichweit vom Centrum abstehenden Lagen E und E^*, siehe Figur 17.

„Man sieht aus Vorstehendem, dass man zwei ebene Systeme auf viererlei Arten in centrisch-collineare Lage bringen kann."

Erkl. 10. Sind die beiden gegebenen Vierecke kongruente Figuren, so erfordert die centrische Lage derselben den Parallelismus der Ebenen der Vierecke. Dabei kann das Centrum in jeder beliebigen Richtung in unendlicher Ferne sich befinden oder aber es muss zwischen den beiden Ebenen liegen und gleichweit von denselben abstehen. In beiden Fällen haben entsprechende Gerade beider Ebenen parallele Lage. Das Umlegen beider Ebenen in eine Ebene wird unbestimmt; doch lassen sich die beiden Ebenen stets so aufeinander legen, dass die beiden Figuren längs einer Seite zusammenhängen und zu derselben symmetrisch liegen; die genannte Seite gibt die Collineationsachse, während das Centrum entweder im Halbierpunkt dieser Seite oder senkrecht hierzu in unendlicher Ferne liegt.

F. Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. In einer ebenen Centralcollineation sind gegeben:

a) ein Paar entsprechender Punkte aa' sowie die auf dem Strahle aa' liegenden Gegenpunkte r und q', ausserdem ein Punkt s der Achse S;

b) ein Paar entsprechender Geraden AA' sowie die durch ihren Schnittpunkt s gehenden nicht entsprechenden Schenkel R

Andeutung. Auflösung a. Durch die gegebenen Punkte a, r, q und a', r', q' sind auf dem Collineationsstrahle zwei projektive Punktreihen bestimmt, deren Doppelpunkte

und Q', der entsprechenden Rechtwinkelstrahlen RQ und $R'Q'$, ausserdem ein Collineationsstrahl.

Man soll Centrum und Achse der Collineation bestimmen.

g und h das Centrum sowie einen Punkt der Collineationsachse bestimmen. Dabei sind zwei Collineationen vorhanden, die eine mit dem Centrum g und der Achse hs, die andere mit gs als Achse und dem Punkte h als Centrum.

Für den Fall, dass Doppelpunkte nicht vorhanden sind, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, II. Teil, 1. Hälfte, Seite 130, gibt es keine Collineation unter den gegebenen Verhältnissen.

Auflösung b. Die gegebenen Strahlen A, R, Q und A', R', Q' bestimmen zwei concentrische Strahlbüschel, deren Doppelstrahlen die Collineationsachse, bezw. einen zweiten Collineationsstrahl und damit auch das Centrum festlegen.

Es sind wieder zwei Collineationen denkbar, je nachdem man den einen oder anderen Doppelstrahl als Achse S oder als zweiten Collineationsstrahl auffasst. Besitzen die obengenannten Strahlbüschel keine Doppelstrahlen, so sind auch die gegebenen Bestimmungsstücke nicht zu einer centrischen Collineation zu vereinigen.

Aufgabe 2. In einer ebenen Centralcollineation sind gegeben:

a) drei Paare entsprechender, auf einem Collineationsstrahl liegender Punkte, sowie ein beliebiger Punkt der Achse S;

b) drei Paare entsprechender, durch die nämlichen Punkte der Achse S gehender Geraden, sowie ein beliebiger Collineationsstrahl.

Man soll Centrum und Achse der Collineation bestimmen.

Andeutung. Auflösung a und b. Die Auflösung bleibt die nämliche, wie in den gleich benannten Fällen der Aufgabe 1, d. h. man bestimmt wieder die Doppelelemente der gegebenen Punktreihen bezw. Strahlbüschel und erhält hierdurch wieder Centrum und Achse der betreffenden Collineation.

Aufgabe 3. Aufgabe 1 ist zu lösen für den Fall der harmonischen Centralcollineation.

Andeutung. Auflösung bleibt die nämliche wie in Aufgabe 1, nur sind in diesem Falle die Punkte r und q' als auch die Strahlen R und Q' miteinander vereinigt.

Aufgabe 4. Aufgabe 2 ist zu lösen für den Fall der harmonischen Centralcollineation.

Andeutung. Auflösung bleibt die gleiche wie unter 1 und 2, nur dürfen im Falle der harmonischen Collineation nicht zwei Paare entsprechender Punkte bezw. Strahlen in der unter Aufgabe 1 genannten Lage gegeben sein.

Aufgabe 5. Zwei Dreiecke abc und $a'b'c'$ sind gegeben; dieselben sind in der Ebene so zu legen, dass zwischen ihnen harmonische Centralcollineation stattfindet.

Andeutung. Auflösung. Zu den durch die entsprechenden Seiten gegebenen Punkten, z. B. a, b, a', b', oder a, c, a', c' konstruiere man die Gegenpunkte r und q', indem zwei entsprechende Gerade wie ab und $a'b'$ unter beliebigem Winkel in dem Punkte aa' aneinander gelegt werden; das Centrum liegt dann in der Verbindungslinie bb' sowie in der inneren Halbierlinie des Winkels der beiden Geraden ab und $a'b'$. Die Parallelstrahlen durch o liefern auf ab bezw. $a'b'$ die Punkte r und q'. Die weitere Lösung ist wie in Antwort der Frage 11.

Aufgabe 6. Ein beliebiges Viereck $a'b'c'd'$ und ein Quadrat $abcd$ sind gegeben. Dieselben sind zu einer ebenen Centralcollineation zu verbinden.

Andeutung. Die Lösung bleibt im Grunde genommen die nämliche, wie in Antwort der Frage 11, nur vereinfacht sie sich insofern, als für das Quadrat die Gegenachse R unendlich ferne für das Viereck die Achse Q' mit der Verbindungslinie der Schnittpunkte e' und f', der Gegenseitenpaare $a'b'$, $d'c'$ und $b'c'$, $a'd'$ zusammenfällt.

Aufgabe 7. Die Aufgabe 1 ist unter entsprechender Anpassung der gegebenen Bestimmungsstücke zu lösen für den Fall, dass:

1) Affinität,

2) Aehnlichkeit

der Systeme stattfinden soll.

Andeutung. Auflösung 1a. Statt der Gegenpunkte r und q' muss im vorliegenden Falle das Verhältnis m gegeben sein, in welchem die Verbindungslinie entsprechender Punkte durch die Achse S geteilt wird; kennt man aber dieses, so gewinnt man damit einen zweiten Punkt der Collineationsachse und hierdurch diese selbst.

Auflösung 1b. Statt der Geraden R und Q' muss wieder das Verhältnis gegeben sein, nach welchem die Achse S den Winkel entsprechender Geraden teilt. Kennt man dieses, so ist dadurch die Lage der Collineationsachse bestimmt.

Auflösung 2a. Zur Bestimmung der Collineation dürfen nur ein Paar entsprechender Punkte, sowie das Verhältnis gegeben sein, nach welchem durch das Centrum die durch ein Paar entsprechender Punkte bestimmte Strecke geteilt wird.

Auflösung 2b. Entsprechende Gerade müssen zu einander parallel und ausserdem muss das in 2a genannte Verhältnis gegeben sein.

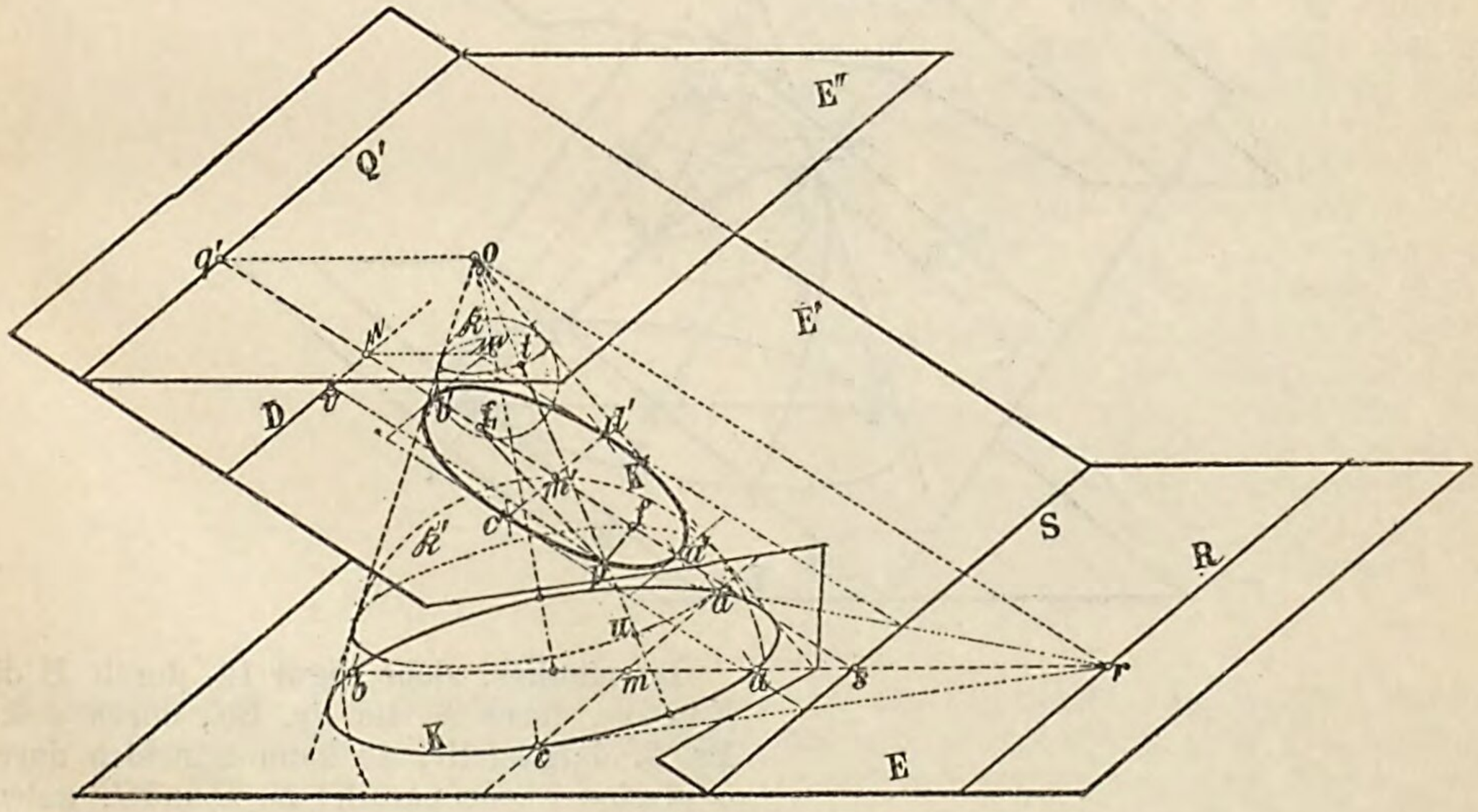
Aufgabe 8. Ein Dreieck abc ist gegeben. Es soll ein dem Dreieck abc ähnlich und ähnlich liegendes Dreieck $a'b'c'$ so gezeichnet werden, dass seine Ecken auf dreien gegebenen Geraden A, B, C sich befinden.

Andeutung. Auflösung. Sind abc und $a'b'c'$ die Dreiecke in der durch die Aufgabe verlangten Lage, so nehme man auf A zwei Punkte a_1 und a_2 ganz beliebig an und ziehe durch dieselben Parallele zu ab, so geben diese auf B zwei Punkte b_1 und b_2. Die durch letztere Punkte gezogenen Parallelen zu BC, liefern auf C zwei Punkte c_1 und c_2. Die Parallelen hierdurch zu ac, bestimmen auf A zwei weitere Punkte a_1' und a_2', welche im Verein mit a_1 und a_2 zwei projektive ähnliche Punktreihen festlegen, deren einer im Endlichen befindliche Doppelpunkt eine Ecke a' des gesuchten Dreiecks $a'b'c'$ bildet.

2. Ueber die Centralprojektion, bezw. Centralcollineation eines Kreises.

A. Ueber die Centralprojektion eines Kreises im allgemeinen.

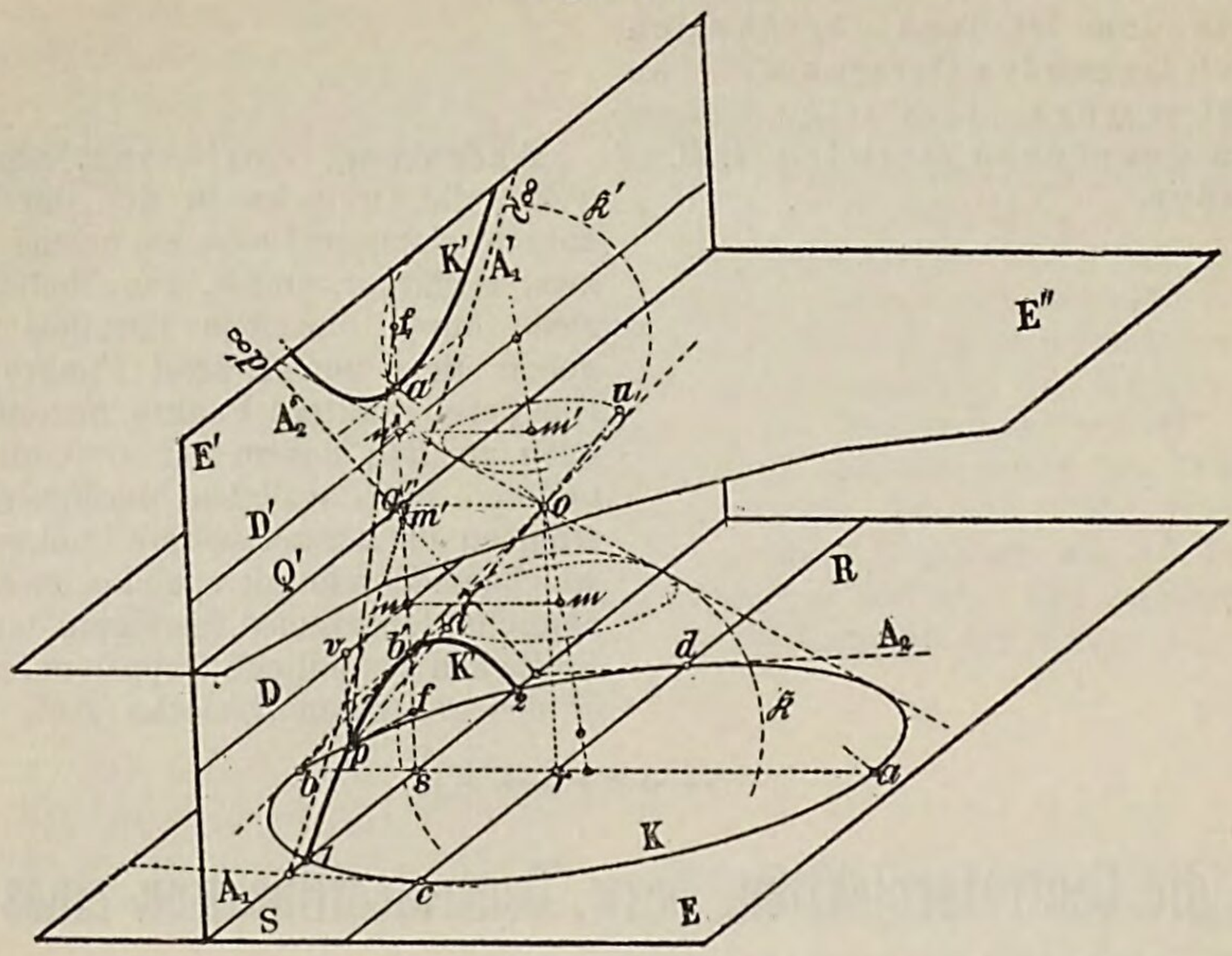
Figur 18.



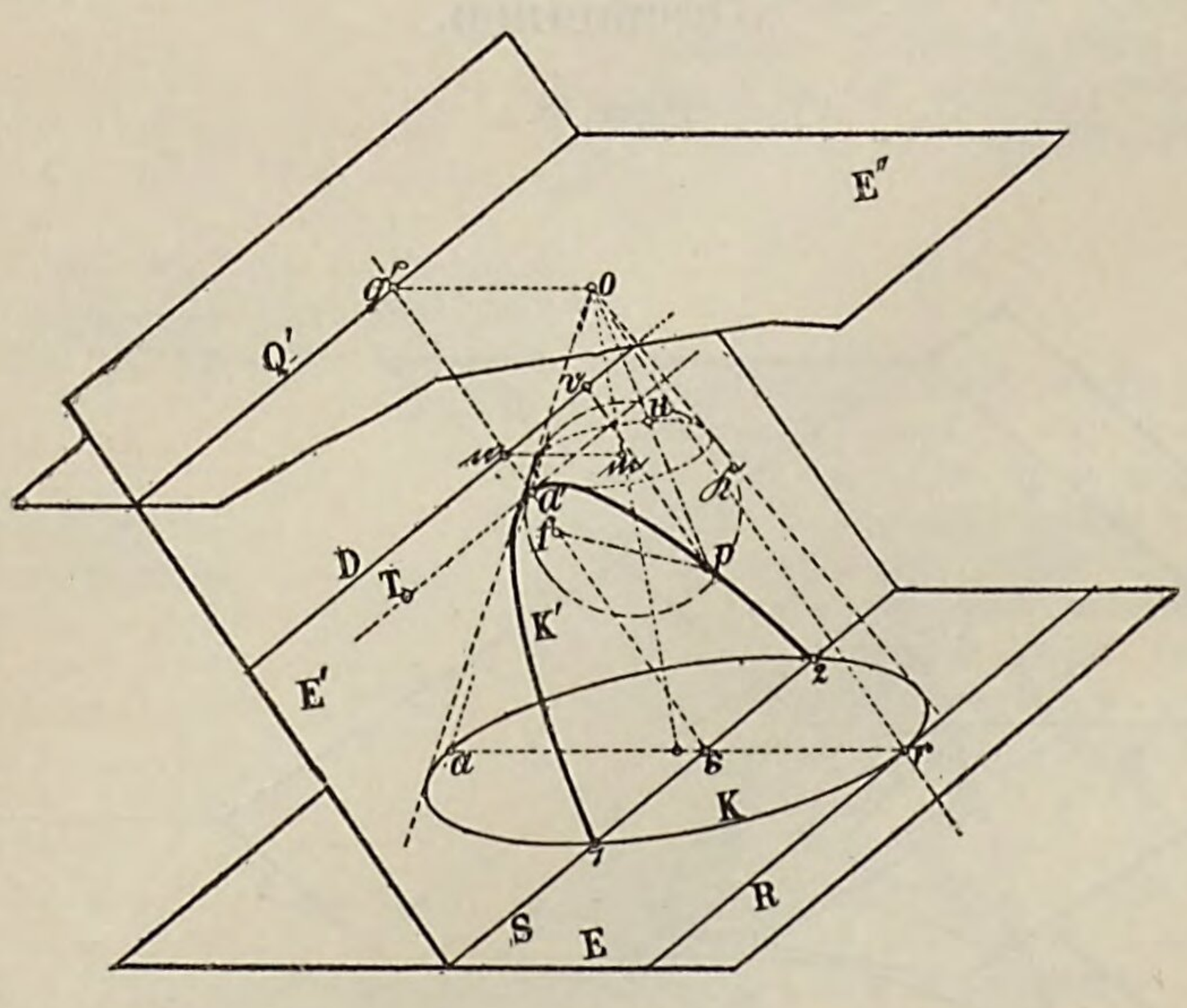
Frage 12. Was für eine Linie erhält man als Centralprojektion eines Kreises?

Antwort. Die Centralprojektion eines Kreises kann verschiedene Gestalt besitzen, welche abhängt von der Lage des **Pr. C.** gegen die Kreis- und Projektions-Ebene.

Figur 19.



Figur 20.



Ist nämlich, siehe Figur 18, durch E die Kreis-, durch E' die **Pr. Eb.**, durch o das **Pr. C.** dargestellt, so kann man sich durch o je eine Ebene parallel zu E und E' gelegt denken; es schneidet dann die Parallelebene zu E die Ebene E' nach einer Geraden Q', die Parallelebene zu E' die **Pr. Eb.** nach einer Geraden R, während Kreis- und **Pr. Eb.** die Gerade S gemeinsam haben, siehe Anmerkung 3. Die Geraden Q' und R sind

die Gegenachsen für die centrisch-collinearen ebenen Systeme E und E'. Die durch o nach sämtlichen Punkten des Kreises K gezogenen geraden Linien durchschneiden die Ebene E nach einer Linie K', der centralen Projektion des Kreises.

Die Gestalt der Linie K' hängt nun ab, von der Lage der in der Kreisebene liegenden Gegenachse R gegen die Kreislinie K. Erstere kann aber:

a) mit der Kreislinie K keinen Punkt gemein haben, wie in Figur 18, oder:

b) die Kreislinie K in zweien Punkten c und d schneiden, wie in Figur 19, oder endlich:

c) die Kreislinie K in einem Punkte r berühren, wie in Figur 20.

Im Falle a) entspricht jedem Punkte z. B. c der Kreislinie ein ganz bestimmter Punkt c' von K', so dass sämtliche Punkte von K' im Endlichen liegen und somit eine geschlossene Kurve K' bilden, welche Ellipse heisst.

Im Falle b) entsprechen den beiden Durchschnittspunkten c und d der Linie R zwei Punkte c' und d' liegend auf R', und weil diese Linie in unendlicher Ferne sich befindet, so liegen auch die Punkte c' und d' in unendlicher Ferne.

Es entspricht somit jedem der Kreisbögen cad und cbd je ein in unendliche Ferne sich erstreckendes Kurvenstück $c'a'd'$ und $c'b'd'$ in centraler Projektion und diese beiden die unendlich fernen Punkte $c'd'$ gemeinsam besitzenden Kurvenstücke bilden zusammen die centrale Projektion des Kreises und somit eine einzige zusammengehörige Kurve, welche man Hyperbel nennt.

Im Falle c) endlich entspricht dem Berührungspunkte r der Geraden R mit K ein Punkt r' auf K', also wieder ein unendlich ferner Punkt. Sämtliche übrigen Punkte von K' befinden sich in endlicher Ferne. Man erhält als centrale Projektion eines Kreises eine nach einem unendlich fernen Punkte hinstrebende Kurve, welche Parabel heisst.

Anmerkung 3. Zur bequemeren Ableitung der im folgenden angegebenen wichtigsten Eigenschaften der centralen Kreisprojektionen ist das **Pr. C.** nicht ganz willkürlich gewählt worden, sondern es wurde dasselbe auf der durch den Kreismittelpunkt zur Kreisebene gezogenen Senkrechten, auf letzterer aber beliebig gewählt. Die von o nach den Punkten von K gezogenen geraden Linien bilden dann die Mantellinien eines senkrechten Kreiskegels, dessen Schnitt mit der **Pr. Eb.** die gesuchte centrale Projektion von K liefert. Aus letzterem Grunde führen die in Antwort der Frage 12 genannten Kurven auch den gemeinsamen Namen Kegelschnitte. Es ist schon früher, siehe III. Teil, 1. Hälfte

dieses Buches, angegeben worden, dass diese Kurven sich auch auf dem schiefen Kreiskegel als Schnitte von Ebenen mit demselben ergeben, oder was dasselbe ist, dass man dieselben Linien auch bei ganz willkürlicher Lage des **Pr. C.** gegen die Kreisebene erhält.

In Rücksicht auf das in Antwort der Frage 1 Gesagte kann man folgenden Satz aussprechen:

„Die **centrisch-collinearen** Figuren oder die **centralen Projektionen** eines Kreises sind **Ellipsen, Parabeln** oder **Hyperbeln**, je nachdem der Kreis die Gegenachse seines Systems **nicht** trifft, sie **berührt** oder in **zweien** Punkten schneidet."

Da überdies zwei für dasselbe Centrum zu einer dritten Kurve centrisch-collineare Kurven sich selbst centrisch-collinear entsprechen, so lässt sich obiger Satz noch allgemeiner so ausdrücken:

„Die **centrisch-collinearen** Figuren oder die **centralen Projektionen** eines **Kegelschnittes** sind **Ellipsen, Parabeln** oder **Hyperbeln**, je nachdem der Kegelschnitt die Gegenachse seines Systems **nicht** trifft, sie **berührt** oder in **zweien** Punkten schneidet."

Fällt das Centrum in unendliche Ferne, so entsteht die Affinität und es folgt aus der Lage der Gegenachsen, dass die affine Figur eines Kegelschnittes wieder ein Kegelschnitt derselben Gattung ist.

Dabei ist selbstverständlich der Kreis zur Gattung der **Ellipse** zu rechnen.

Die **affine** Figur einer Ellipse kann demnach nur wieder eine Ellipse oder ein Kreis sein, einer Hyperbel kann nur eine Hyperbel und einer Parabel nur eine Parabel affin entsprechen.

B. Die Ellipse als Centralprojektion eines Kreises.

a) Bestimmung der wahren Gestalt der Kreisprojektion, Pol und Polare der Kegelschnitte. Arten der Kegelschnitte.

Frage 13. Wie bestimmt sich die wahre Gestalt der Centralprojektion eines Kreises für den Fall, dass dieselbe eine Ellipse wird?

Erkl. 11. Die Punkte $a'b'm'$ und der unendlich ferne Punkt sind vier harmonische Punkte, somit sind auch die ihnen entsprechenden Punkte abm und r harmonisch. Da nun allen durch r gehenden Kreissekanten Ellipsensekanten parallel zu $a'b'$ entsprechen, so bilden stets die Schnittpunkte dieser Sekanten mit dem Kreise in Verbindung mit dem Punkte r und dem Schnittpunkte mit cd vier harmonische Punkte. In gleicher Weise bilden die Endpunkte der durch m gehenden Kreissehnen in Verhindung mit m und dem Schnittpunkt der verlängerten Sehne mit R vier harmonische Punkte.

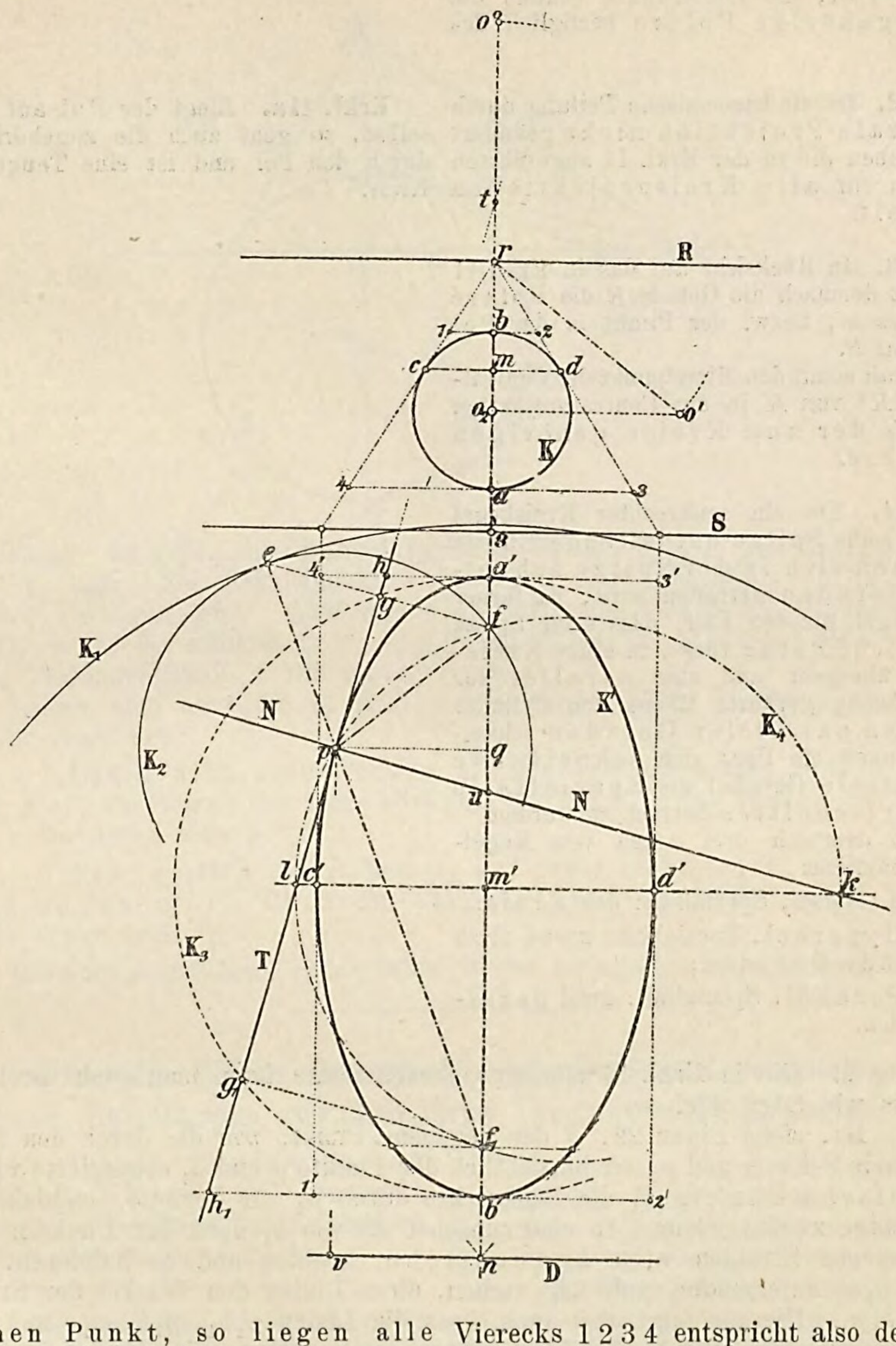
Aus dem eben Entwickelten ergeben sich folgende Sätze:

„Zieht man von einem Punkte ausserhalb eines Kreises Sekanten und konstruiert auf denselben den zu dem Punkte und den Schnittpunkten mit den Kreisen zugehörigen vierten harmo-

Antwort. Ist, siehe Figur 21, o_2 der Hauptpunkt, welcher bei der in Anmerkung 3 angegebenen Lage des **Pr. C.** mit dem Mittelpunkt des Kreises K zusammenfällt, o_2o' die Distanz, S die Schnittlinie, der Kreis- und Ellipsenebene, endlich R die Schnittlinie der durch o zur Ellipsenebene gelegten Parallelebene mit der Kreisebene, und denkt man sich die Ellipsenebene in die Kreisebene umgelegt, so sind Ellipse und Kreis centrisch-collinear bezüglich o^0 als Centrum, S als Collineationsachse und R als Gegenachse.

Das dem Kreise umbeschriebene Viereck 1234, dessen Seiten 14 und 23 durch den Schnittpunkt r von o_2o^0 mit R hindurchgehen, während die übrigen Seiten parallel zu letzterer Linie laufen, besitzt als Centralprojektion das der Ellipse umbeschriebene Rechteck $1'2'3'4'$; dessen Berührsehnen $\overline{a'b'}$ und $\overline{c'd'}$ stellen somit die Hauptachsen der Ellipse dar. Dem Schnittpunkt m der Berührsehnen $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ des oben genannten

Figur 21.



nischen Punkt, so liegen alle diese Punkte auf einer Geraden, und zwar auf der Berührsehne der von dem Punkte an den Kreis gezogenen Tangenten."

„Zieht man durch einen Punkt innerhalb eines Kreises Sehnen und konstruiert auf denselben den zu dem angenommenen Punkte und den Endpunkten der betreffenden Sehne gehörigen vierten harmonischen Punkt, so liegen alle diese Punkte auf einer Geraden, welche ganz ausserhalb des Kreises liegt."

Vierecks 1 2 3 4 entspricht also der Mittelpunkt m' der Ellipse.

Jede durch r gehende Kreissekante schneidet aus dem Kreise eine Sehne aus, welcher in der Ellipse eine zu $a'b'$ parallele Sehne entspricht, die durch die Linie $c'd'$ gehälftet wird.

Jeder durch m gehenden Kreissehne entspricht ein Ellipsendurchmesser.

In beiden Fällen heisst der angenommene Punkt der Pol, die konstruierte Gerade die zum Pol gehörige Polare bezüglich des Kreises.

Erkl. 12. Da die harmonische Teilung durch eine centrale Projektion nicht geändert wird, so haben die in der Erkl. 11 angeführten Sätze auch für alle Kreisprojektionen Gültigkeit.

Erkl. 13. In Rücksicht auf das in Erkl. 11 Gesagte ist demnach die Gerade R die Polare des Punktes m, bezw. der Punkt m der Pol der Geraden R.

Man erhält somit den Mittelpunkt der Centralprojektion K' von K in der Centralprojektion des Poles der zum Kreise gehörigen Gegenachse.

Erkl. 14. Da ein senkrechter Kreiskegel durch eine seine Spitze enthaltende Ebene nach zweien sich in der Spitze schneidenden Geraden getroffen wird, da ferner ein Kreiskegel für den Fall, dass seine Spitze in unendliche Ferne rückt, in einen Kreiscylinder übergeht und eine parallel zur Cylinderrichtung geführte Ebene den Cylinder nach zweien parallelen Geraden schneidet, so können ein Paar sich schneidende oder parallele Geraden als Spezialfälle eines Kegelschnittes betrachtet werden.

Es gibt demnach drei Arten von Kegelschnitten, nämlich:

1) die Ellipse, Spezialfall: der Kreis;

2) die Hyperbel, Spezialfall: zwei sich schneidende Geraden;

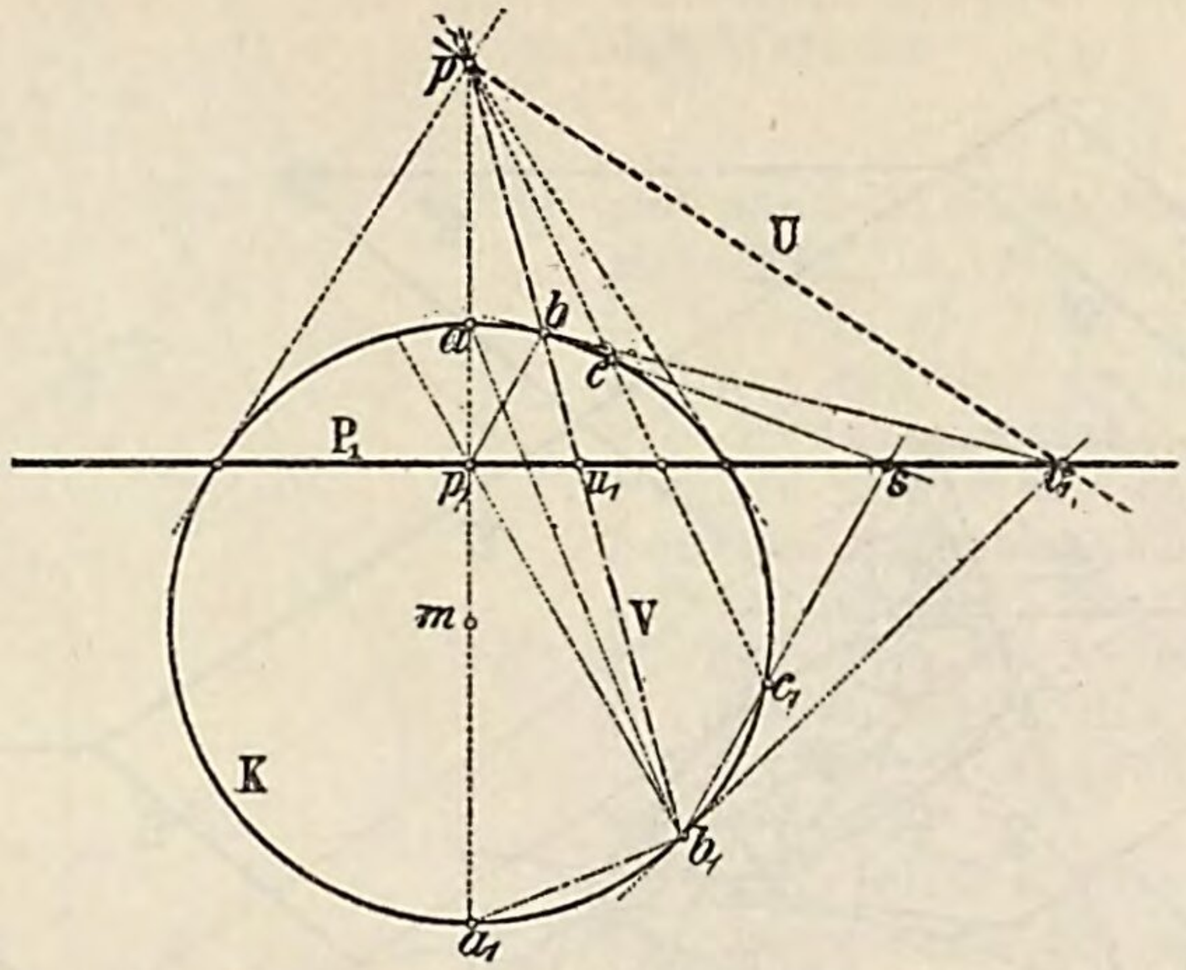
3) die Parabel, Spezialfall: zwei parallele Geraden.

Erkl. 11a. Liegt der Pol auf dem Kreise selbst, so geht auch die zugehörige Polare durch den Pol und ist eine Tangente an den Kreis.

Anmerkung 4. Die in Erkl. 11 ausgesprochenen Sätze kann man auch direkt für den Kreis wie folgt ableiten:

Ist, siehe Figur 22, p der gegebene Punkt, pm die durch den Mittelpunkt gehende Sekante und p_1 der hinsichtlich der Punkte a und a_1 conjugierte vierte harmonische Punkt, P_1 die Senkrechte durch p_1 zur Sekante, endlich pbb_1 eine beliebige zweite Sekante, so sind zunächst die von b_1 nach den Punkten p, a, p_1, a_1 gezogenen Strahlen vier harmonische Strahlen und es halbieren, weil b_1a und b_1a_1 aufeinander senkrecht stehen, diese Linien den Winkel der Strahlen b_1p und b_1p_1. Hieraus folgt aber auch, dass die Linien p_1b_1, p_1b, p_1s und p_1p vier harmonische Strahlen bilden müssen, also auch die Punkte $b_1 b u_1 p$ vier harmonische Punkte sein werden. Nun war aber die Sekante pb_1 ganz willkürlich gewählt, es wird somit jede solche Sekante durch die Linie P_1 im vierten harmonischen Punkte geschnitten. Schneidet P_1 den Kreis in K_1, so fallen in den Schnittpunkten je zwei von den vier Punkten zusammen, daher deckt sich auch der dritte Punkt mit ihnen, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, III. Teil, Seite 118); es ist somit P_1 die Berührsehne der von p aus an K gezogenen Tangenten. P_1 ist Polare und p der zugehörige Pol. Ist pc_1 eine beliebige weitere Sekante, so schneiden sich die Verbindungslinien bc und b_1c_1 in einem Punkte auf P_1, denn bcb_1c_1 ist ein Viereck, p der Schnittpunkt von einem Paar Gegenseiten; es geht daher P_1 wegen der harmonischen Teilung auf diesen Gegenseiten durch den Schnittpunkt der Gegenseiten bc und b_1c_1. Rückt nun die Sekante pc_1 immer näher an pb, bis sie schliesslich derselben unendlich

Figur 22.



nahe kommt, so gehen die Verbindungslinien bc und b_1c_1 in die Tangenten, in b und b_1 über, der Schnittpunkt s derselben liegt gleichfalls auf P_1 und ist also der Pol von pb_1. Weil nun p_1s, sowie die beiden Schnittpunkte von P_1 mit K_1, ebenso die Punkte a_1, a, p_1 p je vier harmonische Punkte bilden, so ist die Verbindungsliuie U die Polare von u_1.

Hiemit sind aber die in Erkl. 11 genannten Sätze bewiesen und zugleich noch die folgenden:

„Dreht sich eine Gerade als Polare um einen festen Punkt p als Pol, so liegen die zugehörigen Pole auf einer festen Geraden P_1, der Polaren von p."

„Bewegt sich ein Punkt p_1 auf einer Geraden P_1 fort, so gehen die zugehörigen Polaren durch einen festen Punkt p, den Pol der Geraden P_1."

Die eben angeführten Sätze haben wieder für alle Kreisprojektionen Gültigkeit.

---

b) Eigenschaften der Ellipse, Brennpunkte, verschiedene Erzeugungsarten der Kurve, Beziehungen zwischen ihren Tangenten und Normalen.

Frage 14. Welche Eigenschaften leiten sich für die Ellipse als Centralprojektion eines Kreises unter Annahme eines Centrums wie in Figur 23 ab?

Erkl. 15. Die Richtigkeit der Gleichung 1) lässt sich in einfacher Weise zeigen. Ist in Figur 24 eine rechtwinklige Projektion des Kegels mit den in Betracht kommenden Linien gezeichnet, so erkennt man sofort die folgenden Beziehungen.

Es ist:

$$\overline{bc} = \overline{bf_1} \text{ und } \overline{bd} = \overline{bf}$$

ebenso:

$$\overline{ae} = \overline{af} \text{ und } \overline{ag} = \overline{af_1}$$

daher:

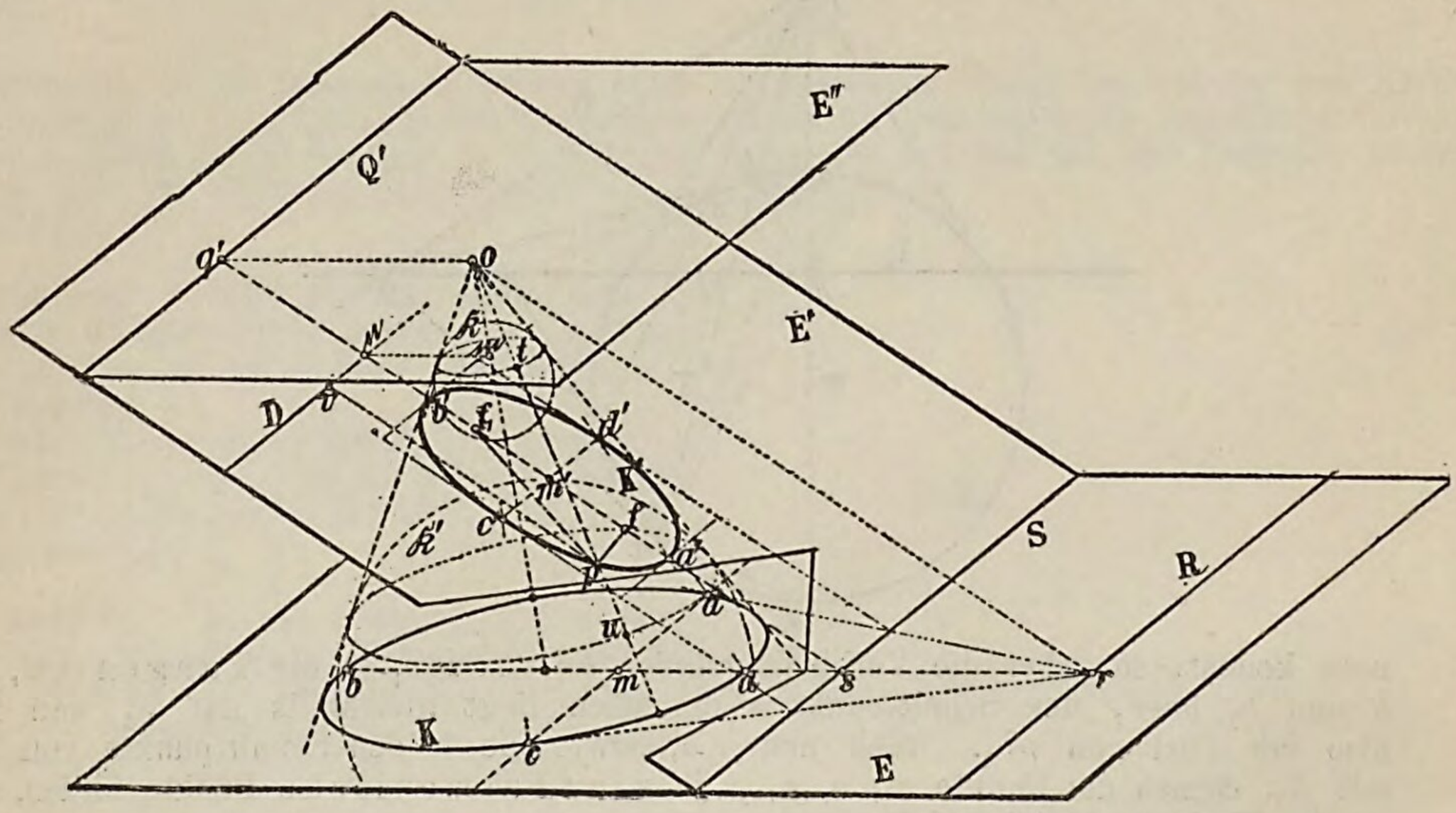
$$\overline{bc}+\overline{bd}=\overline{ae}+\overline{ag}=\overline{bf}+\overline{bf_1}=\overline{af}+\overline{af_1}=\overline{ab}$$

Antwort. Denkt man sich, s. Figur 23, die Ellipse K' hergestellt, sowie den den Kreis K projizierenden Kegel vorhanden, so lassen sich in den letzteren zwei Kugeln $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ so beschreiben, dass sie auch die Ebene der Ellipse K' in zweien Punkten f und f_1 berühren. Ist dann p ein beliebiger Punkt auf der Ellipse, und berührt der Projektionsstrahl durch o die Kugeln $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ in zweien Punkten t und u, so sind offenbar die Längen $\overline{pu}$ und $\overline{pf}$, ebenso $\overline{pt}$ und $\overline{pf_1}$ je einander gleich als Kugeltangenten von dem nämlichen Punkte. Es findet somit auch die Gleichheit statt:

$$\overline{pu}+\overline{pt}=\overline{pf}+\overline{pf_1}$$

Nun ist aber die Summe $\overline{pu}+\overline{pt}=\overline{ut}$ offenbar konstant und zwar gleich der

Figur 23.



Erkl. 16. Ist p ein beliebiger Punkt auf der Ellipse, so ist, s Figur 24, die wahre Länge der Strecke $\overline{p f_1}$ offenbar gleich $\overline{p' g}$, die wahre Entfernungdes Punktes p von der Leitlinie D aber gleich $\overline{p D}$. Für einen anderen Punkt q erhält man die diesbezüglichen Längen der Strecken $\overline{q' g}$ und $\overline{q D}$. Nun ist aber aus der Figur 24 ersichtlich, dass:

$$\frac{\overline{p D}}{\overline{q D}} = \frac{\overline{p' g}}{\overline{q' g}} \text{ oder } \frac{\overline{p' g}}{\overline{p D}} = \frac{\overline{q' g}}{\overline{q D}} =$$

$$\text{konstant} = \frac{\overline{p f_1}}{\overline{p D}} = \frac{\overline{q f_1}}{\overline{q D}}$$

ist.

Da ferner in dem Dreieck $c b D$ der Winkel bei D stets kleiner ist als jener bei c, so ist die Strecke $\overline{b D}$ immer grösser als die Strecke $\overline{b c}$, oder $\overline{f_1 b}$ daher das Verhältnis:

$$15) \ldots \frac{\overline{b f_1}}{\overline{b D}} < 1$$

Länge $\overline{a' b'}$, wie sich dies aus der Figur unmittelbar erkennen lässt, s. auch Erkl. 15. Man hat somit die Beziehung:

$$14) \ldots \overline{p f} + \overline{p f_1} = \overline{a' b'}$$

Auf der grossen Ellipsenachse gibt es demnach zwei feste Punkte f und f_1 von der Eigenschaft, dass alle Ellipsenpunkte von diesen beiden Punkten eine Abstandssumme von konstanter Grösse, nämlich gleich der grossen Ellipsenachse besitzen.

Diese Punkte heissen die Brennpunkte der Ellipse und es ergibt sich für die Kurve nun das folgende Erzeugungsgesetz:

„Die Ellipse ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zweien festen Punkten, den Brennpunkten, eine gegebene Abstandssumme besitzen."

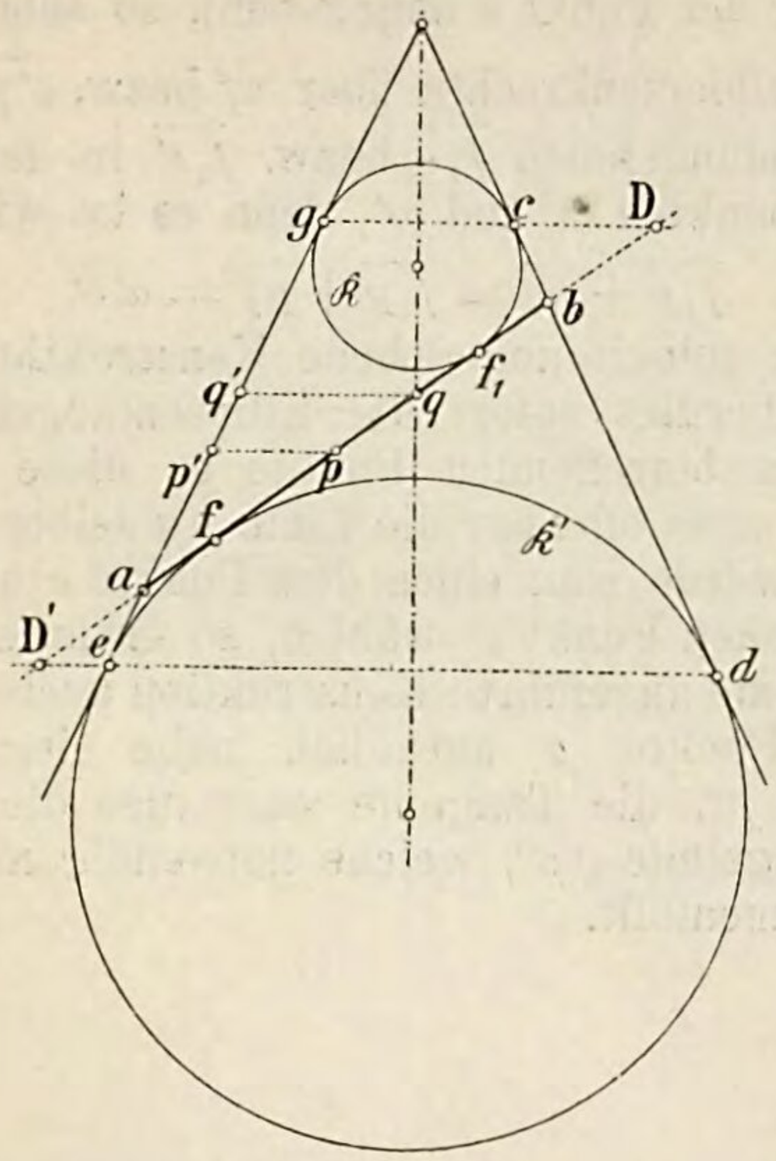
Die Kugel $\mathfrak{K}$ berührt den projizierenden Kegel nach einem Kreise mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{m}$, dessen Ebene die Ellipsenebene E' nach einer Geraden D schneidet.

Ist nun $p v$ eine Senkrechte durch p zu D, so hat das Verhältnis:

$$\frac{\overline{p t}}{\overline{p v}}$$

konstanten Wert, siehe Erkl. 16, daher auch das Verhältnis: $\frac{\overline{p f_1}}{\overline{p v}}$

Figur 24.



Fällt der Punkt p mit b', siehe Figur 23, zusammen, so nimmt das genannte Verhältnis den Wert an:

$$\frac{\overline{b'f_1}}{\overline{b'\pi}}$$

und dieser Wert ist kleiner als die Einheit, siehe Erkl. 16. Man kann daher die Ellipse auch noch wie folgt kennzeichnen: „Die Ellipse ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem festen Punkte und einer festen Geraden ein konstantes Abstandsverhältnis besitzen, dessen Wert kleiner als die Einheit ist. Der feste Punkt heisst ein Brennpunkt, die feste Gerade die Direktrix oder auch die Leitlinie in der Ellipse."

Da die beiden Punkte b' und a' die Strecke $f_1\pi$, siehe Figur 23, in dem nämlichen Verhältnisse teilen, so sind die Punkte π, f_1, b' und a' vier harmonische Punkte. Die Direktrix D ist demnach die Polare des Brennpunktes f_1. Es gibt noch eine zweite Direktrix, nämlich die Polare des Brennpunktes f, die Schnittlinie der Ellipsenebene mit der Berührkreisebene der Kugel $\mathfrak{K}'$ sowie des projizierenden Kegels.

Frage 15. Welche Ellipsenkonstruktionen folgen aus dem durch die Beziehung 14) ausgedrückten Entstehungsgesetze der Ellipse, und welche weiteren Eigenschaften leiten sich hieraus ab?

Erkl. 17. Die von einem Punkte p der Ellipse nach den Brennpunkten f und f_1 gezogenen Strahlen heissen Brennstrahlen oder auch die Radienvektoren (lat. radius vector) des Punktes.

Erkl. 18. Aus der Beziehung 14) folgt, wenn etwa die Achsen einer Ellipse gegeben sein sollten, unmittelbar eine Konstruktion der Brennpunkte. Man braucht ja nur die Punkte f und f_1 auf $\overline{a'b'}$, siehe Figur 23, so zu wählen, dass ihre Entfernungen von den Endpunkten c' oder d' der kleinen Achse einander gleich und gleich der halben grossen Achse werden, es ist dann:

$$\overline{fc'} + \overline{f_1c'} = \overline{fd'} + \overline{f_1d'} = \overline{a'b'}$$

Antwort. Sind etwa, siehe Figur 21, f und f_1 die gegebenen Brennpunkte und $\overline{a'b'}$ die grosse Achse der Ellipse, so bestimmen sich zunächst die Endpunkte c' und d' der kleinen Achse mittels der Beziehung:

$$\overline{fd'} = \overline{f_1d'} = \frac{1}{2}\overline{a'b'}$$

Beliebige weitere Ellipsenpunkte erhält man, indem man die grosse Achse durch einen beliebig auf ihr gewählten Punkt in zwei Abschnitte teilt, und mit diesen aus den beiden Brennpunkten f und f_1 als Mittelpunkte Kreise schlägt, welche sich gegenseitig in vieren zu den beiden Achsen symmetrisch liegenden Ellipsenpunkten schneiden. Durch Wiederholung des Verfahrens erhält man beliebig viele Ellipsenpunkte.

Die eben angegebene Konstruktion, beruhend auf der Beziehung:

$$\overline{pf} + \overline{pf_1} = \overline{a'b'}$$

lässt sich in etwas veränderter Form auch so ausführen:

Man zeichne um den einen Brennpunkt, etwa f_1 einen Kreis K_1 mit dem Halbmesser gleich $\overline{a'b'}$. Zieht man nun durch f eine beliebige Gerade, welche den Kreis in

zweien Punkten e und e' trifft (in der Figur 21 ist nur der Punkt e angegeben), so schneidet die Halbiersenkrechte über $\overline{ef}$ bezw. $\overline{e'f'}$ die Verbindungslinien $\overline{f_1 e}$ bezw. $\overline{f_1 e'}$ in den Ellipsenpunkten p und p', denn es ist wieder:

$$\overline{f_1 p} + \overline{p e} = \overline{f_1 p} + \overline{p f} = \overline{a' b'}$$

Die zuletzt angegebene Konstruktion liefert überdies sofort die Ellipsentangente T in dem betreffenden Punkte p; diese Tangente muss offenbar die Linie pg selber sein; denn würde man einen dem Punkte e unendlich nahen Punkt e^0 wählen, so erhielte man durch die angeführte Konstruktion auch einen dem Punkte p unendlich nahe liegenden Punkt p^0, die Tangente wäre also die Verbindungslinie pp^0, welche notwendig mit pg zusammenfällt.

Frage 16. Welche wichtigen Sätze hinsichtlich der Tangenten und Normalen einer Ellipse folgen aus den in der Antwort der Frage 15 durchgeführten Konstruktionen?

Antwort. Auf Grund der Konstruktionen in Antwort der Frage 15 folgen die Sätze:

„Die Ellipsentangente halbiert den Nebenwinkel der beiden durch ihren Berührpunkt gezogenen Brennstrahlen."

Da die Normale zur Ellipsentangente senkrecht steht, so folgt hieraus für erstere der Satz:

„Die Ellipsennormale halbiert den Winkel der durch ihren Fusspunkt gezogenen Brennstrahlen."

„Für einen Ellipsenpunkt bilden in Rücksicht auf die eben ausgesprochenen Sätze die durch ihn gehenden Brennstrahlen in Verbindung mit der Ellipsentangente und Normalen **vier harmonische Strahlen.**"

Demnach bilden die Durchschnittspunkte von Tangente und Normale mit der grossen Ellipsenachse im Verein mit den Brennpunkten vier harmonische Punkte und es ist somit, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, III. Teil, Seite 119, die Beziehung gegeben:

$$16) \ldots \overline{m' u} \cdot \overline{m' r} = \overline{m' f^2} = \overline{m' f_1^2}$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $m' u k$ und $m' l t$, siehe Figur 21, hat man aber auch die Verhältnisgleichheit:

$$\frac{\overline{m' u}}{\overline{m' l}} = \frac{\overline{m' k}}{\overline{m' t}}$$

oder:

$$\overline{m' u} \cdot \overline{m' t} = \overline{m' l} \cdot \overline{m' k}$$

daher auch in Rücksicht auf Gleichung 16):

$$\overline{m'l} \cdot \overline{m'k} = \overline{m'f^2} \cdot \overline{m'f_1^2}$$

d. h.:

„Die Durchschnittspunkte der kleinen Ellipsenachse mit der Tangente und Normalen eines Ellipsenpunktes liegen auf einem Kreise K_4, der den angenommenen Ellipsenpunkt, sowie die beiden Brennpunkte der Ellipse enthält."

Aus der Figur 21 folgt unmittelbar, weil $\overline{gf} = \overline{ge}$ und $\overline{m'f} = \overline{m'f_1}$ ist, dass die Verbindungslinie $m'g$ parallel zu $\overline{f_1e}$ läuft und gleich $\frac{1}{2}\overline{f_1e}$ d. i. gleich $\frac{1}{2}\overline{a'b'} = \overline{ma'}$ sein muss. Der Punkt g liegt sonach auf einem Kreise K_3 mit der grossen Achse als Durchmesser. Hieraus ergibt sich aber unmittelbar, dass auch der zweite Schnittpunkt g_1 dieses Kreises mit der Tangente T auf der Senkrechten durch f_1 zu T liegt.

Auf Grund des eben Gesagten hat man ein Mittel, für eine Ellipse eine Reihe von Tangenten zu zeichnen, wenn man die Achse und die Brennpunkte kennt. Man braucht nur über der grossen Achse als Durchmesser einen Kreis zu beschreiben und durch die Brennpunkte parallele Sehnen zu ziehen. Die auf der nämlichen Seite von f_1f liegenden Endpunkte dieser Sehnen gehören je einer Ellipsentangente an.

Würde man die Senkrechte f_1g_1 bis zu ihrem zweiten Schnittpunkt mit dem Kreise verlängern, so wäre diese Verlängerung gleich der Strecke $\overline{ge}$, woraus folgt, dass das Produkt $\overline{f_1g_1} \cdot \overline{fg}$ konstanten Wert besitzt und gleich ist dem Produkte $\overline{f_1b'} \cdot \overline{f_1a'}$.

Verlängert man die Tangente T bis zum Schnitt mit den Scheiteltangenten in a' und b', so erhält man wegen der Aehnlichkeit der Vierecke $b'f_1g_1h_1$ und $ghf'f$ die Verhältnisgleichheit:

$$\frac{\overline{f_1g_1}}{\overline{b'h_1}} = \frac{\overline{a'h}}{\overline{fg}}$$

oder

17) . . . $\overline{f_1g_1} \cdot \overline{fg} = \overline{a'h} \cdot \overline{b'h_1} =$ konstant.

Das heisst:

„Die Tangenten einer Ellipse schneiden auf den durch die Endpunkte der grossen Achse gezogenen Tangenten Stücke ab, deren Produkt einen konstanten Wert besitzt."

Erkl. 19. Mit Bezugnahme auf die in Antwort der Frage 15 durchgeführte Konstruktion kann man die Ellipse noch auf eine andere Art kennzeichnen; man kann nämlich sagen:

„Die Ellipse ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise K_2, siehe Figur 21, welche durch einen festen Punkt (f) hindurch gehen und einen festen Kreis (K_1) von innen berühren."

c) Hauptachsengleichung der Ellipse, Länge der Tangente, Subtangente, Normalen, Subnormalen. Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt.

Frage 17. Was versteht man unter der Hauptachsengleichung der Ellipse?

Antwort. Ist p ein beliebiger Ellipsenpunkt, und fällt man die Senkrechte pq zur grossen Achse, so besteht zwischen den Längen $\overline{mq}$ und $\overline{pq}$ und den Grössen der Achsen ein gewisser Zusammenhang, derart, dass wenn man die Strecke $\overline{m'q}$ von vornherein beliebig annimmt, die Strecke $\overline{qp}$ nicht mehr willkürlich gewählt werden kann, sondern eine bestimmte von den Längen der Achsen abhängige Grösse besitzt.

Den eben erwähnten Zusammenhang kann man nun durch eine algebraische Gleichung ausdrücken, in welcher die Grössen der Achsen als konstante, die Strecken $\overline{m'q}$ und $\overline{qp}$ als veränderliche Grössen so auftreten, dass die eine ihrem Werte nach bestimmt ist, sobald man die andere beliebig annimmt. Diese Gleichung heisst die Gleichung der Ellipse und zwar die auf die Hauptachsen bezogene Gleichung oder auch die Hauptachsengleichung. Die Längen x und y bezeichnet man kurzweg als die Koordinaten des hierzu gehörigen Ellipsenpunktes, die festen Achsen ab und cd als die Koordinatenachsen.

Frage 18. Wie lautet die Hauptachsengleichung der Ellipse und wie lässt sich dieselbe aus den bisher kennen gelernten Entstehungsgesetzen der Ellipse entwickeln?

Antwort. Bezeichnet man die Längen $\overline{m'a'}$ und $\overline{m'c'}$ mit α und β, die Längen $\overline{m'q}$ und $\overline{qp}$ mit x und y, die Strecke $\overline{m'f}$ mit γ, endlich die Längen $\overline{pf}$ und $\overline{pf_1}$ mit r_1 und r_2, siehe Erkl. 17, so ergibt sich zunächst in Rücksicht auf die Erzeugung der Ellipse nach dem durch die Beziehung 14) ausgedrückten Gesetze:

18) . . . $r_1 + r_2 = 2\alpha$

19) . . . $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$

20) . . . $(\gamma - x)^2 + y^2 = r_1^2$

21) . . . $(\gamma + x)^2 + y^2 = r_2^2$

Durch Subtraktion der Gleichungen 20) und 21) erhält man:

$$4\gamma x = r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1) \cdot (r_2 - r_1)$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung 18)

22) . . . $r_2 - r_1 = \frac{4\gamma x}{2\alpha} = \frac{2\gamma x}{\alpha}$

Erkl. 20. Die Strecke $\overline{m'f} = \overline{m'f_1}$, d. h. die Entfernung der Brennpunkte vom Ellipsenmittelpunkt nennt man die Excentricität der Ellipse.

Erkl. 21. Setzt man in Gleichung 25) für x den Wert γ ein, so geht die Gleichung über in folgende:

$$\beta^2\gamma^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2\beta^2$$

woraus folgt:

$$y^2 = \frac{\alpha^2\beta^2 - \beta^2(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2}$$

$$= \frac{\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 + \beta^2}{\alpha^2}$$

$$= \frac{\beta^4}{\alpha^2}$$

oder:

$$27) \ldots y = \frac{\beta^2}{\alpha}$$

als Ausdruck für die in einem der Brennpunkte zur X-Achse errichtete Senkrechte.

Man nennt die durch einen Brennpunkt gehende zur grossen Achse senkrechte Ellipsensehne den Parameter der Ellipse.

Gleichung 27) gibt somit die Grösse des halben Parameters an.

Erkl. 22. In Rücksicht auf die in der Antwort der Frage 16 gewählten Bezeichnungen lässt sich nunmehr auch der Wert der in Gleichung 17) angeschriebenen Produkte durch die Hauptachsen ausdrücken; man findet:

$$\overline{a'h} \cdot \overline{b'h_1} = \overline{f_1 g_1} \cdot \overline{fg}$$

$$= \overline{f_1 b'} \cdot \overline{f_1 a'}$$

$$= (\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma)$$

$$= \alpha^2 - \gamma^2$$

$$= \alpha^2 - (\alpha - \beta^2)$$

$$= \beta^2$$

d. h.:

$$28) \ldots \overline{a'h} \cdot \overline{b'h_1} = \overline{f_1 g_1} \cdot \overline{fg} = \beta^2.$$

Durch Addition der Gleichungen 18) und 22) folgt

$$23) \ldots r_2 = \frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha$$

Wird dieser Wert in Gleichung 21) eingesetzt und Rücksicht genommen auf den Wert von γ, so ergibt sich schliesslich

$$24) \ldots \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

als Hauptachsengleichung der Ellipse.

Dieselbe lässt sich auch in der Form schreiben:

$$25) \ldots \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = \alpha^2\beta^2$$

Die nämliche Gleichung ergibt sich auch in einfacher Weise für den Fall, dass man die Ellipse als affine Figur des Kreises K_3, s. Figur 21, auffasst und die bis zum Kreise K_3 verlängerte Senkrechte $\overline{qp}$ mit y' bezeichnet. Man hat nämlich für diesen Fall:

$$y'^2 = \alpha^2 - x^2$$

ferner:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{y'}{y}$$

daher:

$$y' = \frac{\alpha y}{\beta}$$

und folglich:

$$\frac{\alpha^2 y^2}{\beta^2} = \alpha^2 - x^2$$

oder:

$$26) \ldots \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = \alpha^2\beta^2$$

welche Gleichung mit der unter No. 25) aufgeführten übereinstimmt.

Frage 19. Was versteht man unter der Länge der Normalen, Tangente, Subnormalen und Subtangente eines Punktes der Ellipse?

Antwort. Die Strecke einer Normalen vom Kurvenpunkt bis zum Schnittpunkt mit der grossen Achse nennt man die Länge der Normalen, ihre Projektion auf die genannte Achse, heisst Subnormale. In gleicher Weise bildet die Strecke einer Tangente vom Kurvenpunkt bis zur Achse die Länge der Tangente, die Projektion dieser Strecke auf die Achse die Subtangente.

Frage 20. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Längen der in Antwort der Frage 19 näher bezeichneten Grössen: Normale, Tangente, Subnormale und Subtangente eines Ellipsenpnnktes?

Antwort. Die in Antwort der Frage 19 näher bezeichneten Grössen besitzen gewisse, von der Gestalt der Ellipse abhängige

und daher durch die Achsen derselben ausdrückbare Längen, welche man wie folgt in einfacher Weise ableiten kann.

Bezeichnet man wieder, s. Fig. 21, die bis zum Kreis K_3 verlängerte Linie pq mit $\overline{qp'} = y'$, so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{\beta}$$

also:

$$29) \ldots y' = \frac{\alpha}{\beta} \cdot y$$

Ferner hat man mit Bezug auf die rechtwinkligen Dreiecke $m'p't$ und $m'pt$:

$$\frac{x}{y'} = \frac{y'}{\overline{qt}}$$

oder:

$$\overline{qt} \cdot x = y'^2$$

oder:

$$30) \ldots \overline{qt} = \frac{y'^2}{x}$$

und

$$\frac{\overline{uq}}{y} = \frac{y}{\overline{qt}}$$

oder:

$$31) \ldots \overline{qt} = \frac{y^2}{\overline{uq}}$$

Durch Verbindung der Gleichungen 30) und 31) ergibt sich:

$$\frac{y'^2}{x} = \frac{y^2}{\overline{uq}}$$

oder:

$$\overline{uq} = \frac{y^2}{y'^2} \cdot x$$

und in Rücksicht auf Gleichung 29):

$$32) \ldots \overline{uq} = \frac{y^2}{\frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot y^2} \cdot x = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot x$$

als Ausdruck für die Länge der Subnormalen.

Hieraus folgt aber in Rücksicht auf Gleichung 31:

$$33) \ldots \overline{qt} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot \frac{y^2}{x} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \frac{(\alpha^2 - x^2)}{x} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - x^2}{x}$$

als Ausdruck für die Länge der Subtangente.

Für die Länge der Normalen und Tangente erhält man nunmehr unmittelbar:

$$34) \ldots \overline{pu} = \sqrt{\overline{uq}^2 + \overline{pq}^2} = \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot x^2 + y^2} = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot x^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot y^2}$$

oder:

$$\overline{pt} = \sqrt{\overline{qt}^2 + \overline{pq}^2}$$

$$35) \ldots \overline{pt} = \sqrt{\left(\frac{a^2 + x^2}{x^2}\right)^2 + y^2}$$

Frage 21. Welche weiteren wichtigen Eigenschaften der Ellipsennormalen lassen sich aus der Figur 21 noch ableiten?

Antwort. Zunächst erkennt man die Aehnlichkeit der Dreiecke pfu und pkf_1 und damit die Richtigkeit der folgenden Verhältnisgleichheit:

$$\frac{\overline{pk}}{\overline{f_1k}} = \frac{\overline{pf}}{\overline{fu}} = \frac{a}{\gamma} \quad \text{(s. Erkl. 23)}$$

oder:

$$36) \ldots \overline{pk} = \frac{\overline{f_1k} \cdot a}{\gamma}$$

Nun ist aber der Ausdruck $\frac{\overline{f_1k}}{\gamma} = \frac{1}{\cos w}$, wenn w den Winkel der Normalen mit den Brennstrahlen bezeichnet; man kann also schreiben:

$$37) \ldots \overline{pk} \cdot \cos w = a$$

d. h.: „Die Projektion des vom Kurvenpunkte bis zur kleinen Achse reichenden Stückes der Normalen auf einen Radiusvektor ist gleich der halben grossen Ellipsenachse."

Weiter ist aus der Figur 21 ersichtlich die Verhältnisgleichheit:

$$\frac{\overline{pu}}{\overline{pf}} = \frac{\overline{pf_1}}{\overline{pk}}$$

oder in Rücksicht auf die früher gewählten Bezeichnungen für $\overline{pf}$ und $\overline{pf_1}$:

$$\frac{\overline{pu}}{\overline{r_1}} = \frac{r_2}{\overline{pk}}$$

oder:

$$r_1 \cdot r_2 = \overline{pu} \cdot \overline{pk}$$

Nun ist aber:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{\beta^2}{\cos^2 w} \quad \text{(s. Erkl. 24)}$$

und

$$\frac{\beta^2}{\cos^2 w} = \frac{\overline{pu} \cdot a}{\cos w}$$

oder:

$$\overline{pk} = \frac{a}{\cos w}$$

daher:

$$38) \ldots \overline{pu} \cdot \cos w = \frac{\beta^2}{a}$$

d. h.: „Die Projektion des vom Kurvenpunkte bis zur grossen Achse reichenden Stückes der Normalen auf einen Brennstrahl ist gleich dem halben Parameter."

Erkl. 23. Die Beziehung:

$$\frac{\overline{pf}}{\overline{fu}} = \frac{a}{\gamma}$$

ergibt sich wie folgt: Es ist:

$$\frac{\overline{pf}}{\overline{pf_1}} = \frac{\overline{fu}}{\overline{f_1u}}$$

oder:

$$39) \ldots \frac{\overline{pf}}{\overline{fu}} = \frac{\overline{pf_1}}{\overline{f_1u}} = \frac{\overline{f_1e}}{\overline{f_1f}} = \frac{2a}{2\gamma} = \frac{a}{\gamma}$$

Erkl. 24. Die Beziehung:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{\beta^2}{\cos^2 w}$$

leitet sich wie folgt ab: Es ist, siehe Figur 23:

$$\overline{fg} = r_1 \cdot \cos w$$

$$\overline{f_1g_1} = r_2 \cdot \cos w$$

$$\overline{fg} \cdot \overline{f_1g_1} = r_1 \cdot r_2 \cdot \cos^2 w$$

oder in Rücksicht auf Gleichung 28):

$$\beta^2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \cos^2 w$$

daher:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{\beta^2}{\cos^2 w}$$

Fasst man die beiden durch die Gleichungen 36) und 37) ausgedrückten Resultate zusammen, so erhält man unmittelbar noch den weiteren Satz:

Es ist:

$$\frac{\overline{pk}\cdot\cos w}{\overline{pu}\cdot\cos r} = \frac{\alpha}{\frac{\beta^2}{\alpha}}$$

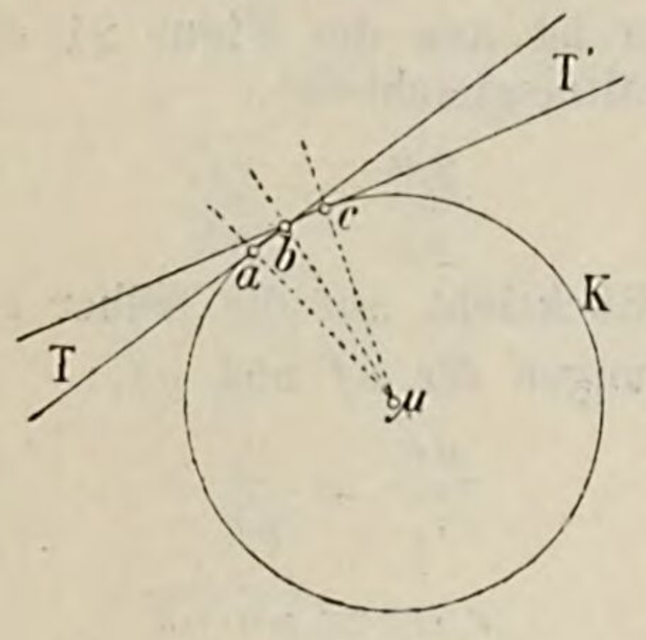
oder:

$$40) \ldots \frac{\overline{pk}}{\overline{pu}} = \frac{\alpha}{\frac{\beta^2}{\alpha}} = \alpha^2 : \beta^2$$

d. h.: „Die beiden vom Kurvenpunkte bis zur kleinen bezw. grossen Ellipsenachse reichenden Stücke einer Normalen verhalten sich zu einander wie die grosse Halbachse zum Parameter oder wie die Quadrate der beiden Halbachsen.“

Frage 22. Was versteht man unter der Krümmung einer Kurve, bezw. unter dem Krümmungskreise, Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkte eines Kurvenpunktes?

Figur 25.



Erkl. 25. Für eine beliebige ebene Kurve haben die Krümmungshalbmesser der einzelnen Punkte verschiedene Grösse und die Krümmungsmittelpunkte befinden sich auf einer krummen Linie, welche man die Evolute der gegebenen Linie nennt.

Die ursprüngliche Kurve und die Evolute stehen demnach in dem Zusammenhange, dass die Normalen der ersteren Kurve die Tangenten an die letztere bilden. Erstere Kurve bezeichnet man dann auch als die Evolvente der letzteren.

Auf Grund des Bisherigen lässt sich nun leicht für die Grösse des Krümmungshalbmessers eines beliebigen Ellipsenpunktes eine Beziehung aufstellen.

Antwort. Mit Hilfe des Vorangegangenen lässt sich nunmehr auch über die Krümmung einer Ellipse oder überhaupt einer Kurve näheres feststellen.

Bei einem Kreise versteht man unter dessen Krümmung den reciproken Wert seines Halbmessers; da nun aber der Halbmesser für alle Punkte eines Kreises dieselbe Grösse hat, so ist auch die Krümmung in allen Punkten eines Kreises die nämliche, oder der Kreis ist eine Linie von konstanter Krümmung.

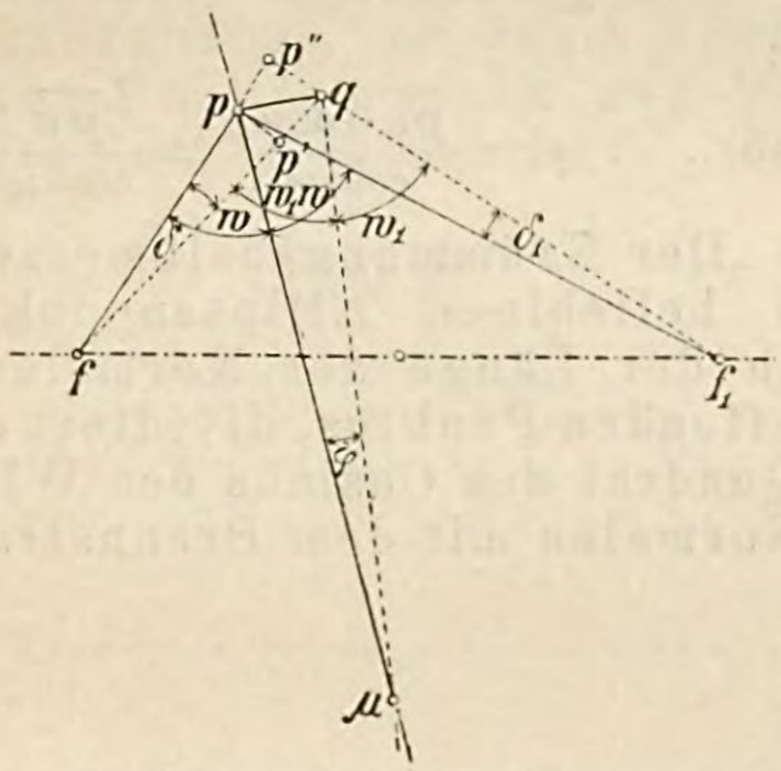
Nicht so verhält es sich bei irgend einer anderen ebenen Kurve.

Ist die Gerade T eine Tangente an irgend eine Kurve, so verbindet dieselbe eigentlich zwei aufeinander folgende, d. h. zwei unendlich nahe Punkte a und b der Kurve miteinander. Verbindet man b mit dem nächstfolgenden unendlich nahen Punkt c, so erhält man eine zweite Tangente T' der Kurve. Durch die drei aufeinander folgenden Punkte a, b, c ist ein Kreis K möglich, dessen Mittelpunkt im Durchschnittspunkt der beiden Normalen durch a und c liegt. Längs den drei aufeinander folgenden Punkten besitzt demnach der Kreis die nämliche Krümmung wie die Kurve und man nennt die Krümmung dieses Kreises auch die Krümmung der Kurve und den Kreis selbst den Krümmungskreis der Kurve für die Punkte a, b, c bezw. für den Punkt a, da ja in der Zeichnung die drei Punkte a, b, c sich decken. Die Normalen in den

Punkten a und c schneiden sich in einem Punkte μ, dem Mittelpunkte des Krümmungskreises oder dem Krümmungsmittelpunkte der Punkte a, b, c, bezw. des Punktes a. Die Länge $\overline{\mu a}$, d. h. der Halbmesser des Krümmungskreises wird kurzweg als der Krümmungshalbmesser für den Kurvenpunkt a bezeichnet.

Frage 23. Wie ermittelt man die Grösse des Krümmungshalbmessers für einen beliebigen Punkt der Ellipse?

Figur 26.



Antwort. Sind p und q, siehe Figur 26, zwei recht nahe aneinander befindliche Punkte und ist μ der Schnittpunkt der Normalen durch p und q, so ersieht man, wenn man die Brennstrahlen pf, pf_1 und qf, qf_1 zieht, die folgenden Winkelbeziehungen:

Es ist:

$$w_1 + \delta_1 = w + \varphi$$

und

$$w + \delta = w_1 + \varphi$$

oder:

$$w + w_1 + \delta + \delta_1 = w + w_1 + 2\varphi$$

oder:

$$41) \ldots \varphi = \frac{\delta + \delta_1}{2}$$

Macht man nun die Strecke $\overline{fp} = \overline{fp'}$, ebenso $\overline{f_1 p} = \overline{f_1 p''}$ und nennt die Strecke $\overline{pq} = s$, so wird, wenn die Entfernung $\overline{pq}$ ausserordentlich klein sein soll, d. h. wenn der Punkt p dem Punkte q unendlich nahe gerückt ist, die Linie pp' in die Tangente an den um f mit dem Halbmesser $\overline{fp}$ beschriebenen Kreis, die Linie pp'' aber in die Tangente an den um f_1 mit dem Halbmesser $\overline{f_1 p}$ beschriebenen Kreis übergehen, und diese Tangenten stehen senkrecht zu den Brennstrahlen pf und pf_1. Man erhält daher die Beziehung:

$$42) \ldots \overline{pp'} = \overline{pp''} = s \cdot \cos w$$

Nun gibt aber das Verhältnis des unendlich kleinen Kreisbogens pp'' oder pp' zum Kreishalbmesser die Grösse des zugehörigen Centriwinkels an; man hat daher:

$$\frac{pp'}{r} = \delta$$

und

$$\frac{pp''}{r_1} = \delta_1$$

oder in Rücksicht auf Gleichung 42):

$$\frac{s \cdot \cos w}{r} = \delta$$

und

$$\frac{s \cdot \cos w}{r_1} = \delta_1$$

somit ist:

$$\delta + \delta_1 = \frac{s \cdot \cos w}{r} + \frac{s \cdot \cos w}{r_1}$$

$$43) \ \ldots = \frac{s \cdot \cos w \,(r + r_1)}{r \cdot r_1}$$

oder mit Bezugnahme auf die Werte von $\delta + \delta_1$, $r + r_1$ und $r \cdot r_1$:

$$2\varphi = \frac{s \cdot \cos w \cdot 2\alpha}{\frac{\beta^2}{\cos^2 w}} = s \cdot \cos^3 w \cdot 2\alpha$$

$$44) \ \ldots \ \varphi = \frac{s \cdot \cos^3 w \cdot \alpha}{\beta^2}$$

Bezeichnet man die Länge $\overline{p\mu}$ mit ϱ, so ist:

$$\varrho = \frac{s}{\varphi}$$

oder in Rücksicht auf den Wert von φ:

$$\varrho = \frac{s \cdot \beta^2}{s \cdot \cos^3 \varphi \cdot \alpha} = \frac{\beta^2}{\cos^3 \varphi \cdot \alpha}$$

Mit Bezugnahme auf Gleichung 38) ist aber:

$$\frac{\beta^2}{\alpha} = \overline{pu} \cdot \cos w$$

daher:

$$45) \ \ldots \ \varrho = \frac{\overline{pu} \cdot \cos w}{\cos^3 w} = \frac{\overline{pu}}{\cos^2 w}$$

d. h.: „Der Krümmungshalbmesser für einen beliebigen Ellipsenpunkt ist gleich der Länge der Normalen des betreffenden Punktes, dividiert durch das Quadrat des Cosinus des Winkels der Normalen mit dem Brennstrahl.“

Frage 24. Welche Werte des Krümmungshalbmessers erhält man für die Scheitel der Ellipse?

Erkl. 25a. In den Scheiteln der Ellipse ist die Berührung des Krümmungskreises mit der Kurve eine noch innigere als in den übrigen Punkten derselben. Es fallen nämlich in jedem Scheitel vier unendlich nahe Punkte der Kurve mit Punkten des Krümmungskreises zusammen, d. h. der Krümmungskreis enthält vier Punkte der Kurve, oder die Berührung ist eine vierpunktige, während sie in den übrigen Punkten nur eine dreipunktige genannt wird.

Antwort. Für die Scheitel der Ellipse erhält man für die zugehörigen Krümmungshalbmesser besondere Werte.

Für die Endpunkte der grossen Achse hat man nämlich:

$$\varrho = \frac{\overline{pu}}{\cos^2 w} = \overline{pu}$$

da $\cos w = 1$ ist.

Nun ist aber nach Gleichung 34):

$$pu = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot x^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot y^2}$$

oder, da $x = \alpha$ und $y = \beta$ ist:

$$46) \ \ldots \ \overline{pu} = \frac{\beta^2}{\alpha} = \varrho$$

d. h.: „Der Krümmungshalbmesser im Endpunkt der grossen Achse einer Ellipse ist gleich dem halben Parameter.“

Für die Endpunkte der kleinen Achse ist:

$$47) \ldots \varrho = \frac{\overline{p\,u}}{\cos^2 w} = \frac{\overline{p\,u}}{\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$$

da $\cos w = \frac{\beta}{\alpha}$ ist.

Es ist aber:

$$\overline{p\,u} = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot x^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\cdot y^2}$$

oder, da $x = o$ und $y = \beta$ ist:

$$\overline{p\,u} = \beta$$

was übrigens auch direkt aus der Figur ersichtlich ist, daher:

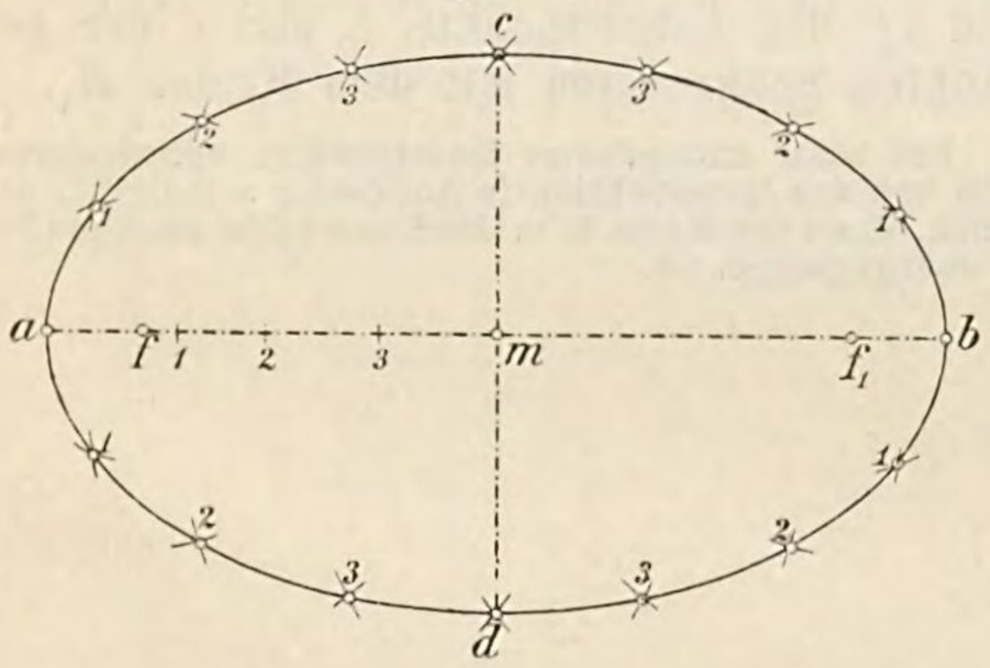
$$48) \ldots \varrho = \frac{\beta \cdot \alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta}$$

---

d) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 9. Es sind zwei Punkte f und f_1 gegeben. Man soll den geometrischen Ort für jene Punkte zeichnen, deren Abstandssumme von den beiden gegebenen Punkten einer gegebenen Strecke 2α gleich werde.

Figur 27.



Auflösung. Der gesuchte Ort ist eine Ellipse mit den Brennpunkten f und f_1 und der grossen Achse gleich 2α. Trägt man daher, siehe Figur 27, von der Mitte m der Strecke $\overline{ff_1}$ die Länge α gleich $\overline{ma}$ und $\overline{mb}$ ab, so sind a und b die Endpunkte der grossen Achse. Ein Kreis um f mit einem Halbmesser gleich α, liefert auf der im Punkte m zur Linie $\overline{ab}$ errichteten Senkrechten, die Endpunkte c und d der kleinen Achse. Beliebige weitere Ellipsenpunkte ergeben sich durch Annahme beliebiger Punkte 1, 2, 3 auf mf, deren Entfernungen von a und b die Halbmesser von Kreisen aus f und f_1 liefern, die sich in Ellipsenpunkten 1, 2, 3, etc. schneiden.

Aufgabe 10. Es ist ein Punkt f und eine Gerade D gegeben. Man soll den geometrischen Ort für jene Punkte zeichnen, deren Entfernungen von f und D sich verhalten wie 3 : 4.

Auflösung. Der gesuchte Ort ist eine Ellipse mit dem einen Brennpunkt f und der Leitlinie D. Teilt man somit die von f auf D gefällte Senkrechte fa im Verhältnis 3 : 4, so liefern die Teilpunkte a und b die Endpunkte der grossen Achse; damit ist aber auch die kleine Achse der Lage und Grösse nach bestimmt und es kann die Ellipse wie in der vorhergehenden Aufgabe punktweise bestimmt werden.

Aufgabe 11. Von einer Ellipse sind gegeben die grosse Achse $\overline{ab}$, sowie die beiden Brennpunkte f und f_1.

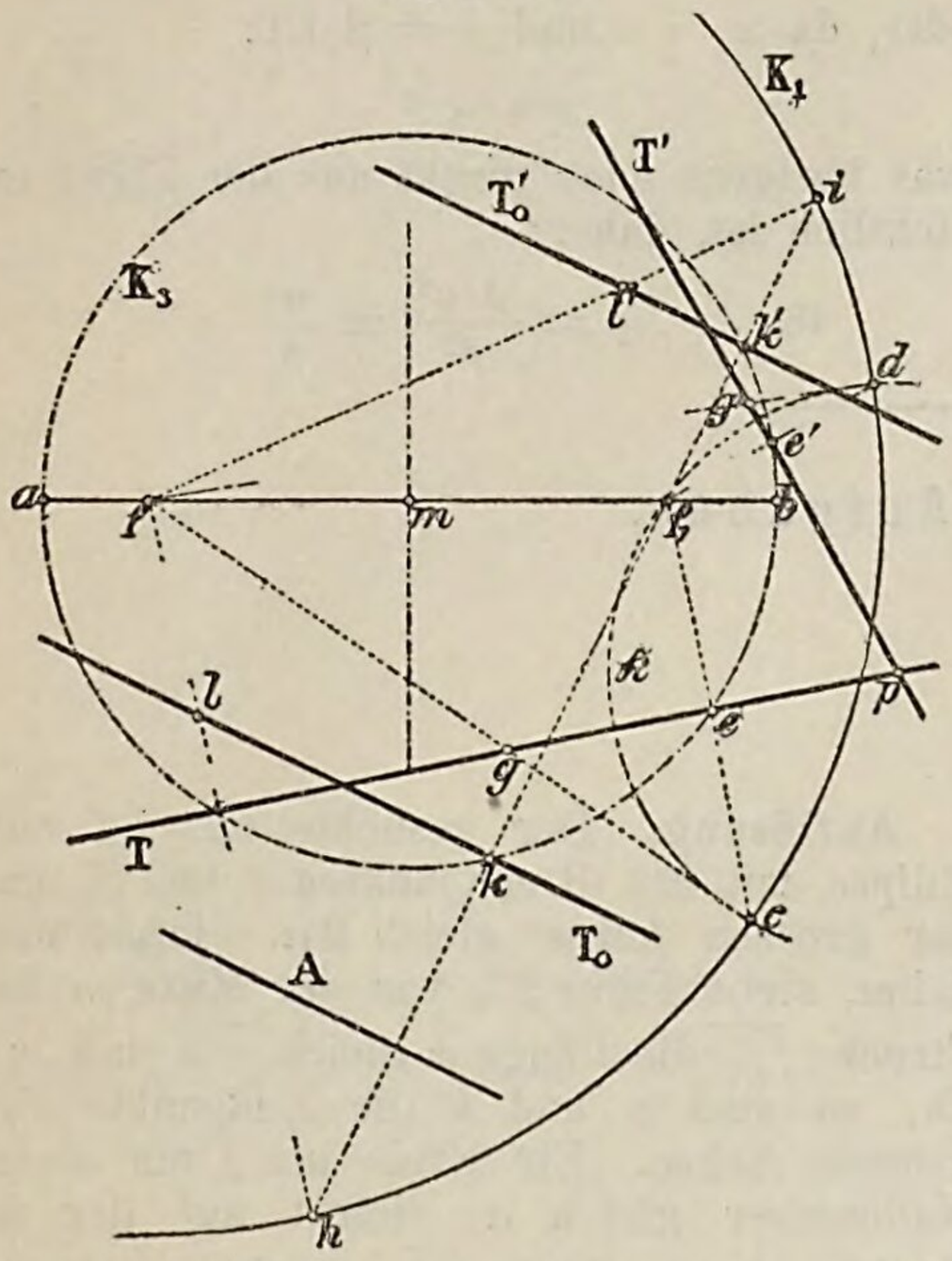
Man soll:

a) von einem Punkte p ausserhalb der Ellipse,

b) parallel einer Geraden A

an die Kurve die möglichen Tangenten ziehen.

Figur 28.



Erkl. 26. Die in den Auflösungen a und b der Aufgabe 11 angegebenen Konstruktionen führen noch auf eine zweite ebenso einfache Lösung der Aufgabe.

Man ersieht nämlich aus Figur 28, da die Winkel $p\hat{e}f_1$ und $p\hat{e}'f_1$ Rechte sind, dass die vier Punkte pef_1e' auf einem Kreise über $\overline{f_1p}$ als Durchmesser liegen, woraus folgende Konstruktion entspringt:

„Man zeichne über $\overline{pf_1}$ als Durchmesser einen Kreis, so gehen durch dessen Schnittpunkte e und e' mit K_3 die gesuchten Tangenten hindurch."

Für den Fall die gesuchten Tangenten parallel zur Geraden A werden sollen, geht der Kreis über $\overline{pf_1}$, da p in unendliche Ferne rückt in die zu pf_1 senkrechte Gerade, d. h. in die Linie hi, siehe Figur 28, über und man erhält wieder die in Auflösung b angegebene Konstruktion.

Aufgabe 12. Von einer Ellipse kennt man einen Brennpunkt, sowie drei weitere Punkte. Man soll die Ellipse konstruieren.

Auflösung a. Man beschreibe um den einen Brennpunkt f als Mittelpunkt mit einem Halbmesser gleich $\overline{ab}$ eine Kreislinie K_1, desgleichen um p einen zweiten durch den anderen Brennpunkt f_1 gehenden Kreis $\mathfrak{K}$, der K_1 in den Punkten c und d schneidet. Die gesuchten Tangenten T und T' stehen nun senkrecht zu den Linien f_1c und f_1d und gehen ausserdem durch die Schnittpunkte e und e' dieser Linien mit dem über der grossen Achse als Durchmesser beschriebenen Kreise K_3; ihre Berührpunkte g und g' liegen auf den Verbindungslinien cf und df.

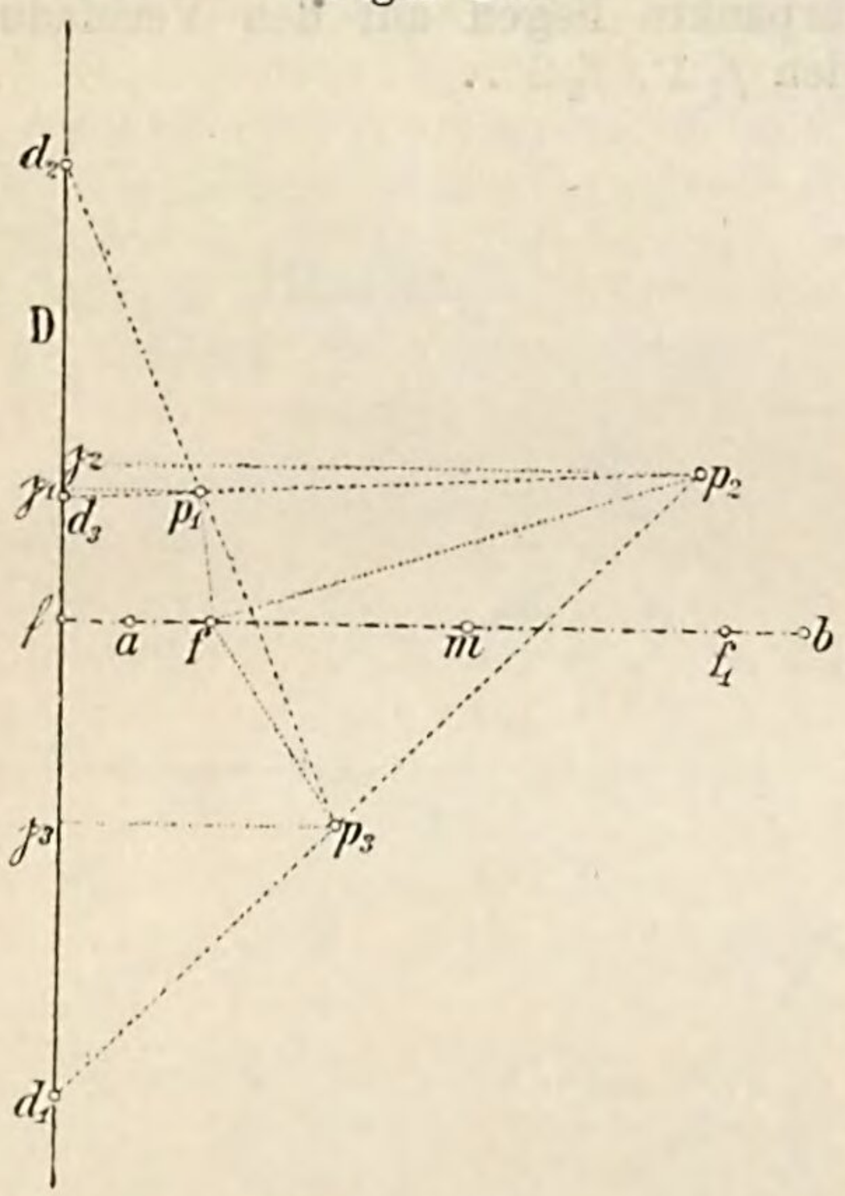
Da zwei Kreise im allgemeinen sich in zweien Punkten schneiden, so sind auch im allgemeinen, wie schon bekannt, zwei Tangenten von einem Punkte aus an die Ellipse möglich.

Auflösung b. Ist A die gegebene Gerade, so schneidet die Senkrechte durch f_1 zu A den Kreis K_3 in zweien Punkten k und k', durch welche die gesuchten Tangenten parallel zu A hindurch gehen; ihre Berührpunkte l und l' liegen auf den Verbindungslinien hf und if der Schnittpunkte h und i der genannten Senkrechten mit dem Kreise K_1.

Die eben angegebene Konstruktion unterscheidet sich von der Konstruktion in Auflösung a lediglich dadurch, dass der Kreis $\mathfrak{K}$ in die Senkrechte zur Geraden A übergegangen ist.

Auflösung. Ist D die gesuchte Leitlinie, siehe Figur 29, und denkt man sich von den

Figur 29.



Punkten p_1, p_2, p_3 Senkrechte auf D gefällt, so finden die folgenden Gleichheiten statt:

Es ist:

$$\frac{\overline{p_1 f}}{\overline{p_1 \mathfrak{p}_1}} = \frac{\overline{p_2 f}}{\overline{p_2 \mathfrak{p}_2}} = \frac{\overline{p_3 f}}{\overline{p_3 \mathfrak{p}_3}},$$

daher ist auch:

$$49) \ldots \begin{cases} \dfrac{\overline{p_2 \mathfrak{p}_2}}{\overline{p_1 \mathfrak{p}_1}} = \dfrac{p_2 f}{p_1 f} \\ \dfrac{\overline{p_2 \mathfrak{p}_2}}{\overline{p_3 \mathfrak{p}_3}} = \dfrac{p_2 f}{p_3 f} \\ \dfrac{p_3 \mathfrak{p}_3}{p_1 \mathfrak{p}_1} = \dfrac{p_3 f}{p_1 f} \end{cases}$$

Aus der Figur entnimmt man aber ferner die Gleichheiten:

$$50) \ldots \begin{cases} \dfrac{\overline{p_2 \mathfrak{p}_2}}{\overline{p_1 \mathfrak{p}_1}} = \dfrac{\overline{p_2 d_3}}{\overline{p_1 d_3}} \\ \dfrac{\overline{p_2 \mathfrak{p}_2}}{\overline{p_3 \mathfrak{p}_3}} = \dfrac{\overline{p_2 d_1}}{\overline{p_3 d_1}} \\ \dfrac{p_3 \mathfrak{p}_3}{p_1 \mathfrak{p}_1} = \dfrac{\overline{p_3 d_2}}{\overline{p_1 d_2}} \end{cases}$$

Mit Bezug auf die Gleichungen 49) und 50) gelten somit auch die Beziehungen:

$$\frac{\overline{p_2 d_3}}{\overline{p_1 d_3}} = \frac{p_2 f}{p_1 f}$$

$$\frac{\overline{p_2 d_1}}{\overline{p_3 d_1}} = \frac{\overline{p_2 f}}{\overline{p_3 f}}$$

$$\frac{\overline{p_3 d_2}}{\overline{p_1 d_2}} = \frac{\overline{p_3 f}}{\overline{p_1 f}}$$

Die Punkte d_1, d_2 und d_3 erhält man also, als äussere Teilungspunkte der Strecken $\overline{p_2 p_3}$, $\overline{p_1 p_3}$ und $\overline{p_1 p_2}$, wenn dieselben in den Verhältnissen:

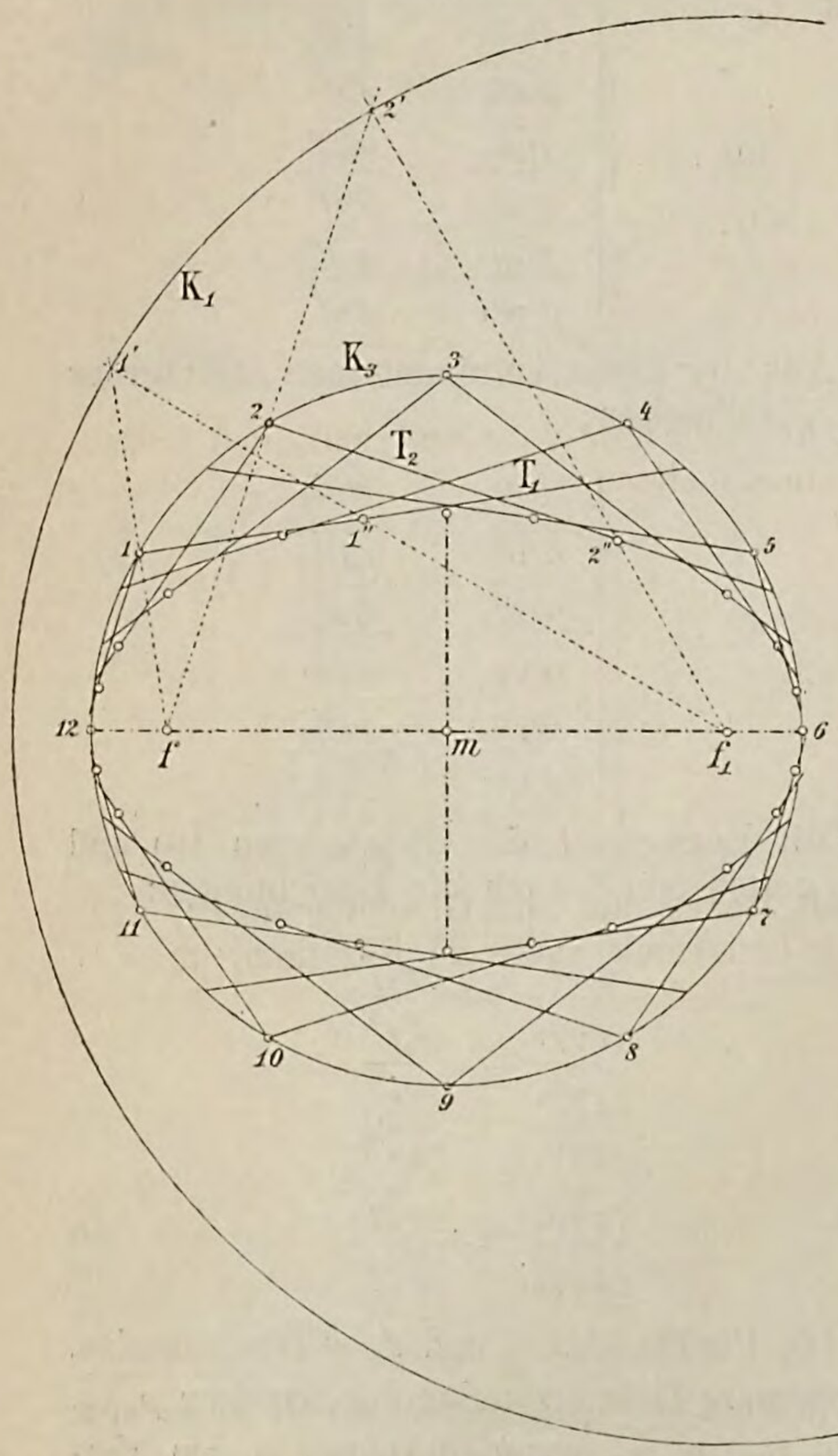
$$\frac{\overline{p_2 f}}{\overline{p_3 f}}, \quad \frac{\overline{p_3 f}}{\overline{p_1 f}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{p_2 f}}{\overline{p_1 f}}$$

geteilt werden. Ist aber die Leitlinie D konstruiert, so steht die grosse Ellipsenachse senkrecht hierzu und geht durch f. Man hat jetzt nur noch nötig, die Strecke $\overline{f\mathfrak{f}}$ in dem gegebenen konstanten Verhältnis $\frac{\overline{p_1 f}}{\overline{p_1 \mathfrak{p}_1}}$ zu teilen, um in den Teilpunkten a und b die Endpunkte der grossen Achse zu erhalten.

Weitere Ellipsenpunkte ergeben sich nun wie in Auflösung der Aufgabe 9.

Aufgabe 13. Eine Ellipse ist durch ihre Brennpunkte f und f_1 und ihre grosse Achse gegeben. Man soll die Ellipse durch eine Anzahl von Tangenten einhüllen.

Figur 30.



Auflösung. Man beschreibe, siehe Figur 30, um den einen Brennpunkt, etwa f_1, den Kreis K_1 mit einem Halbmesser gleich der grossen Achse, ausserdem über der grossen Achse als Durchmesser den Kreis K_3. Teilt man nun letzteren in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, und verbindet die Teilpunkte 1, 2, 3 .. mit f, so stehen auf diesen Verbindungslinien die gesuchten Tangenten senkrecht und gehen durch die Teilpunkte 1, 2 .. 3; ihre Berührpunkte liegen auf den Verbindungsgeraden $f_1 1'$, $f_2 2'$ ..

Frage 25. Welche Beziehungen bestehen zwischen zweien und mehreren Ellipsentangenten, und wie erhält man dieselben auf Grund der bisher kennen gelernten Eigenschaften der Ellipse.

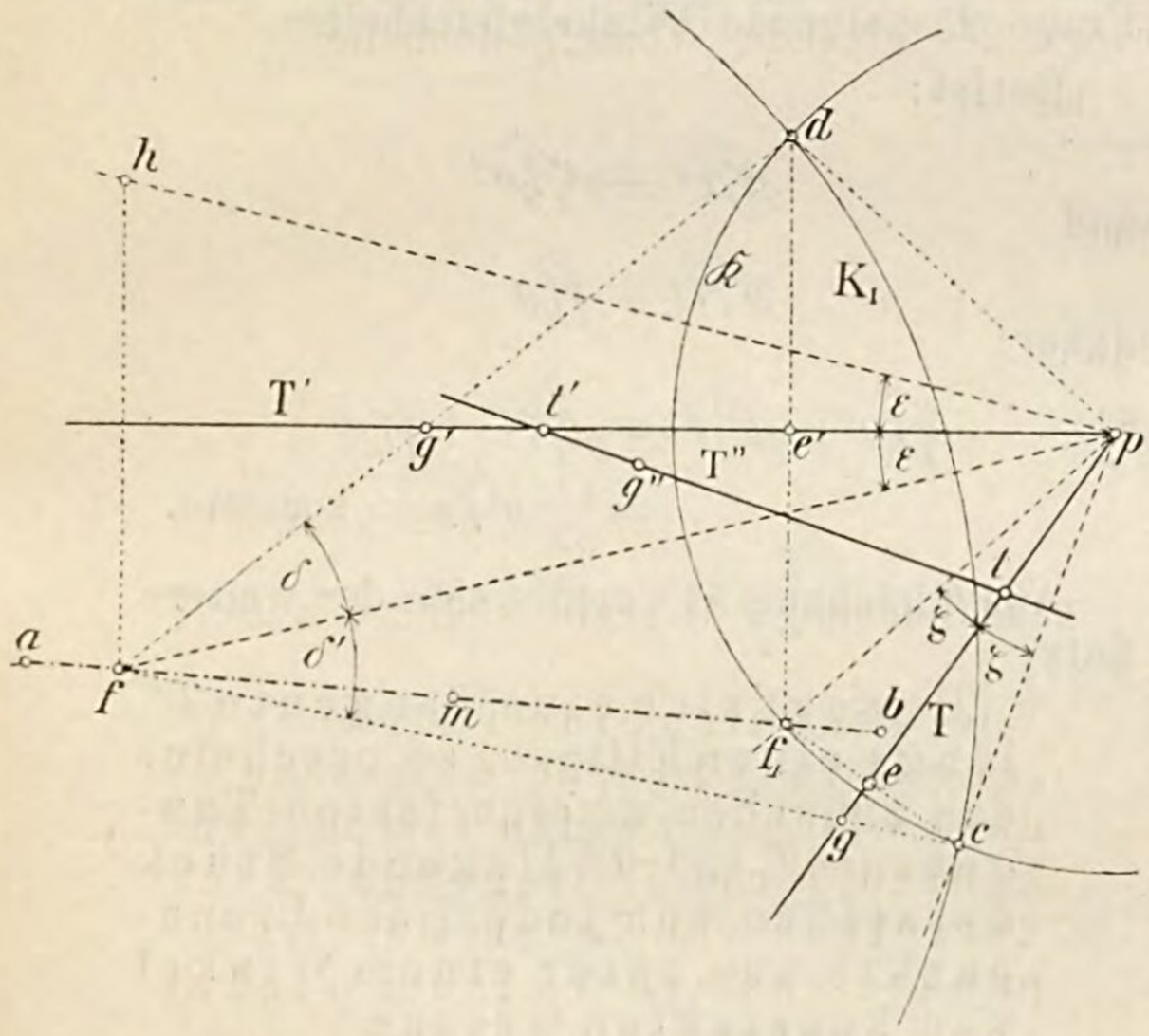
Antwort. Sind T und T' die beiden von dem Punkte p an eine Ellipse mit den Brennpunkten f und f_1 und der grossen Achse $\overline{a\,b}$ gezogenen Tangenten, c und d die Schnittpunkte der Kreise $\mathfrak{K}$ und K_3, so ersieht man aus der Figur 31 die Kongruenz der Dreiecke fpd und fpc, woraus die Gleichheit der Winkel δ und δ' folgt. Die Linien fc und fd gehen aber durch die Berührpunkte g und g' der Tangenten T und T', man hat somit folgenden Satz:

„Die Verbindungslinien der Berührpunkte zweier Ellipsen-

tangenten mit einem Brennpunkte bilden mit der Verbindungslinie dieses Brennpunktes mit dem Schnittpunkte der beiden Tangenten gleiche Winkel."

Geht die Verbindungslinie der Berührpunkte selbst durch den Brennpunkt, so wird jeder der genannten Winkel ein Rechter, d. h. die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Schnittpunkt der Tangenten steht auf der Verbindungslinie der Berührpunkte senkrecht. In diesem Falle liegt aber der Schnittpunkt der beiden Tangenten, als Pol der Berührsehne, siehe Antwort der Frage 14 auf der zum Brennpunkte gehörigen Leitlinie der Ellipse.

Figur 31.



Fällt man noch von f eine Senkrechte auf die Tangente T' und verlängert sie um ihre eigene Länge nach h, so sind auch die Dreiecke fcp und f_1hp kongruent, daher die Winkel $f\hat{p}c$ und $f_1\hat{p}h$ einander gleich, woraus ferner folgt, dass $\sphericalangle \varepsilon = \sphericalangle \zeta$ ist, daher der weitere Satz:

„Die Verbindungslinien des Schnittpunktes zweier Ellipsentangenten mit den beiden Brennpunkten bilden mit den Tangenten gleiche Winkel."

Ist insbesondere der Winkel der beiden Tangenten T und T' gleich 90^0, so ist wegen $\sphericalangle \varepsilon = \sphericalangle \zeta$ der Winkel $f\hat{p}c$ und damit auch der Winkel $f\hat{p}d$ je gleich 90^0, die Punkte dpc liegen also in einer geraden Linie. Da ferner $\overline{pf_1} = \overline{pc}$ und $\overline{pf} = \overline{ph}$ ist, so ist auch $d\hat{f}_1c$ ein Rechter, ausserdem $\overline{pf_1}^2 + \overline{pf}^2 = \overline{pf_1}^2 + \overline{ph}^2 = \overline{pf}^2 + \overline{pc}^2 = 4\alpha^2 =$ konstant. Der Punkt p hat die Lage, dass die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von zweien festen Punkten eine konstante Grösse hat, er gehört demnach einem Kreise an, siehe Erkl. 27, mit dem Mittelpunkte m und einem Halbmesser:

$$r = \sqrt{2\alpha^2 - \gamma^2}$$

mit Rücksicht auf den Wert von $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ ist aber:

$$r = \sqrt{2\alpha^2 - \alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Das eben Gesagte lässt sich in folgende Sätze zusammenfassen:

„Bewegt sich ein rechter Winkel dergestalt, dass seine Schenkel eine gegebene Ellipse mit den Halbachsen α und β berühren, so gehört sein Scheitel einem

Erkl. 27. Sind, siehe Figur 32, f und f_1 die beiden festen Punkte und ist p ein Punkt derart, dass $r_1^2 + r_2^2 = 4\alpha^2 =$ konstant ist, so hat man unter der Voraussetzung, dass $\gamma = \overline{mf} = \overline{mf_1}$ ist:

$$r_1^2 = (\gamma + x)^2 + y^2$$
$$r_2^2 = (\gamma - x)^2 + y^2$$

daher:

$$r_1^2 + r_2^2 = \gamma^2 + 2\gamma x + x^2 + y^2 + \gamma^2 - 2\gamma x + x^2 + y^2$$
$$= 2\gamma^2 + 2x^2 + 2y^2$$
$$= 2(\gamma^2 + x^2 + y^2)$$

Nun ist aber:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

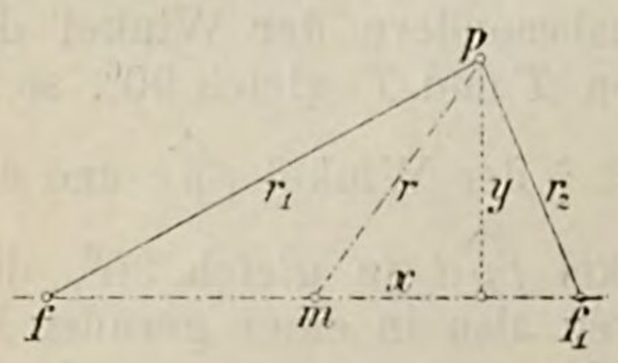
folglich:

$$r_1^2 + r_2^2 = 2\gamma^2 + 2r^2$$
$$4\alpha^2 = 2\gamma^2 + 2r^2$$

oder:

$$r = \sqrt{\frac{4\alpha^2 - 2\gamma^2}{2}}$$
$$r = \sqrt{2\alpha^2 - \gamma^2}$$

Figur 32.



Kreise an mit dem Mittelpunkt m der Ellipse und einem Halbmesser $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$."

„Dreht sich ein rechter Winkel um einen Punkt f_1 als Scheitel, so schneiden dessen Schenkel einen Kreis mit dem Mittelpunkt f und dem Halbmesser 2α stets in Punkten, deren Verbindungssehnen Tangenten an eine Ellipse bilden mit den Brennpunkten f_1 und f, und der grossen Achse gleich $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$."

Nimmt man zu den beiden Tangenten T und T' noch eine dritte Tangente T'' hinzu, welche die erst genannten Tangenten in zweien Punkten t und t' schneidet, die Ellipse aber in einem Punkt g'' berührt, so bestehen nach dem ersten Satze der Antwort auf Frage 25 folgende Winkelgleichheiten.

Es ist:

$$g'\hat{f}t' = t'\hat{f}g''$$

und

$$g''\hat{f}t = t\hat{f}g$$

daher:

51) . . . $t'\hat{f}g'' + g''\hat{f}t = g'\hat{f}t' + t\hat{f}g$
$$= \frac{1}{2} g'\hat{f}g = \text{konstant.}$$

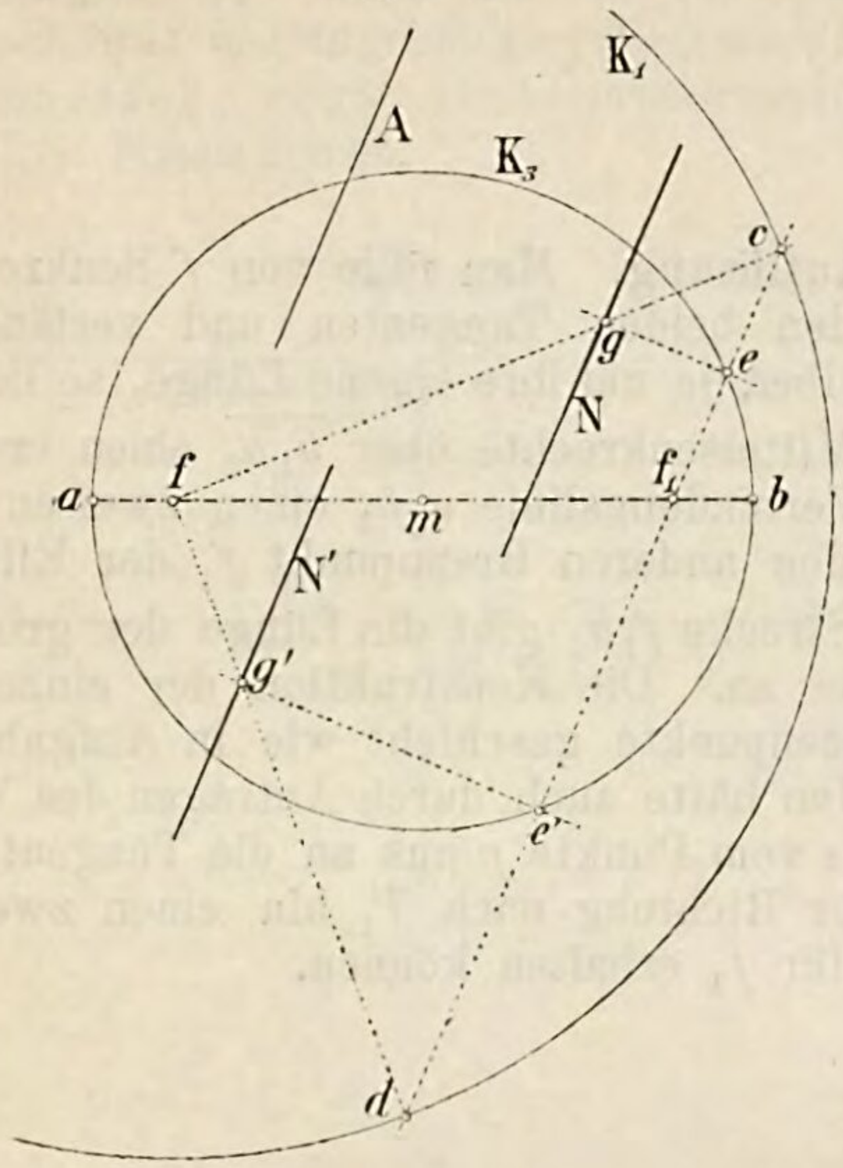
Aus Gleichung 51) ergibt sich der weitere Satz:

„Bewegt sich eine Tangente T'' längs einer Ellipse, so erscheint das zwischen zweien festen Tangenten T und T' liegende Stück derselben von jedem der Brennpunkte aus unter einem Winkel von konstanter Grösse."

Aufgabe 14. Man soll parallel zu einer Geraden A an eine durch ihre Brennpunkte und die Länge der grossen Achse gegebene Ellipse die möglichen Normalen zeichnen.

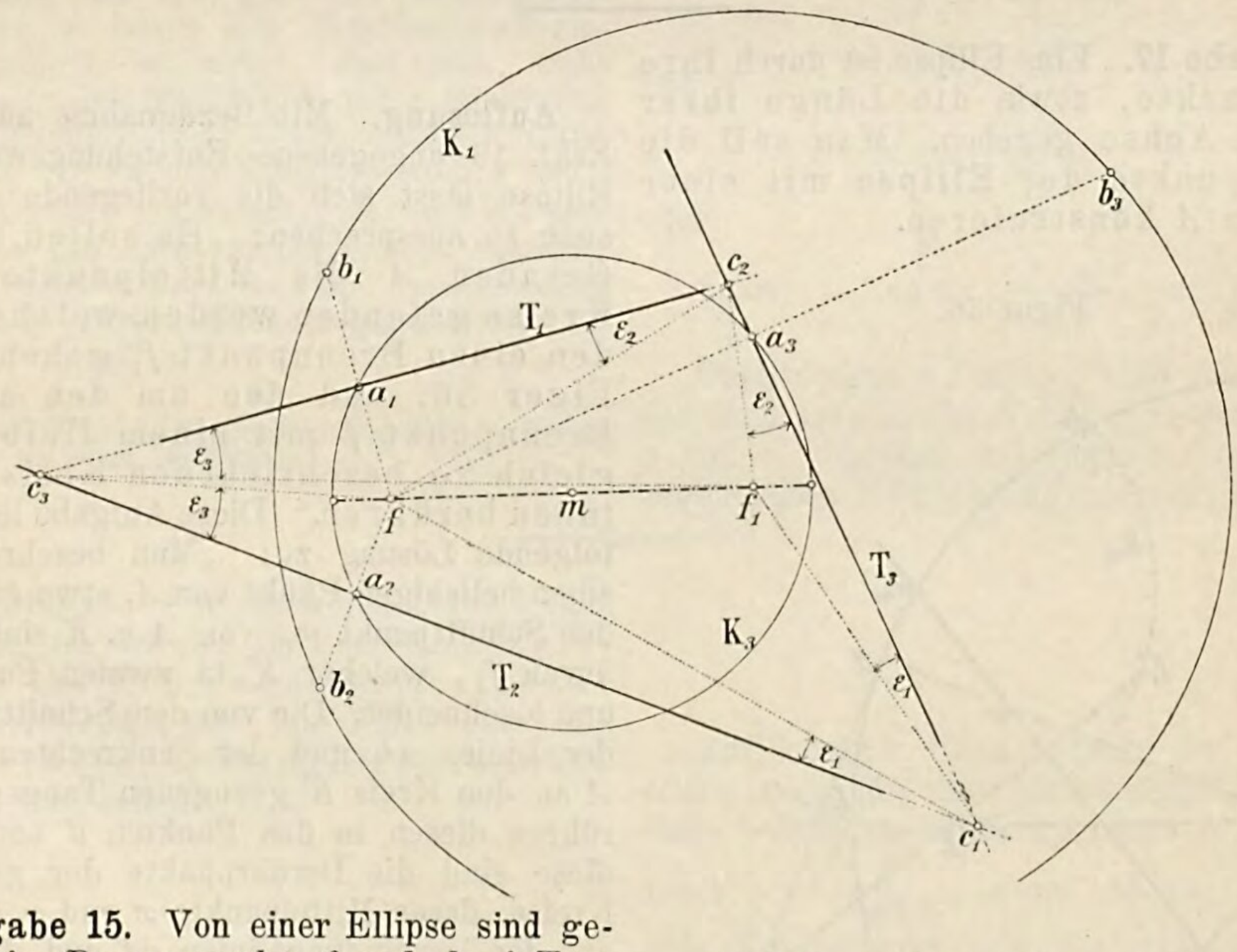
Auflösung. Die Auflösung der vorstehenden Aufgabe ist ganz analog jener der Aufgabe 11. Man zieht durch den einen Brennpunkt f_1 eine Parallele zur Geraden A, welche den Kreis K_1 in zweien Punkten c und d schneidet. Die Verbindungslinien cf und df schneiden die Ellipse in den Fusspunkten g und g' der gesuchten Normalen. Ist aber, wie in Figur 33, die Ellipse selbst nicht gezeichnet, so erhält man die Punkte g und g' im Durchschnitt der Halbiersenkrechten eg und $e'g'$ der Strecken $\overline{f_1 c}$ und $\overline{f_1 d}$.

Figur 33.



Als Probe für die Genauigkeit der Zeichnung muss die Verbindungslinie gg' durch den Mittelpunkt m der Ellipse gehen.

Figur 34.

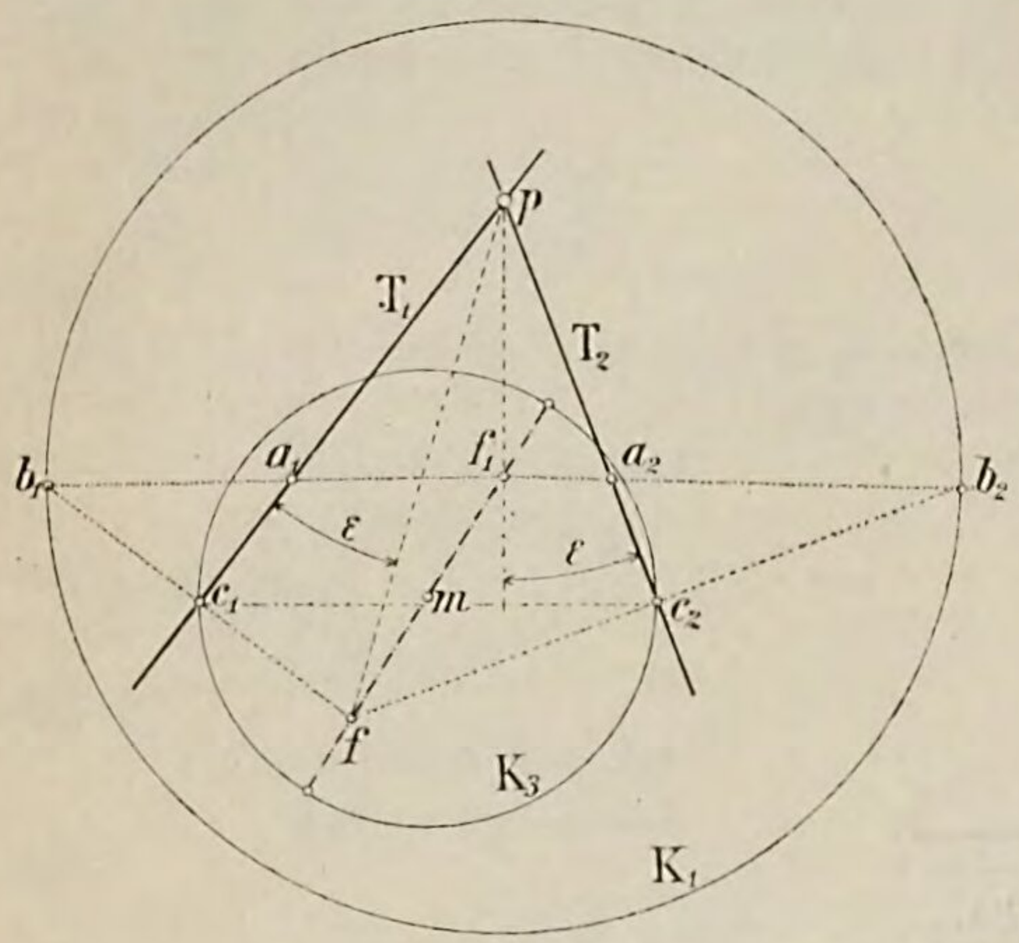


Aufgabe 15. Von einer Ellipse sind gegeben ein Brennpunkt f und drei Tangenten T_1, T_2, T_3. Man soll den zweiten Brennpunkt, sowie die Ellipse konstruieren.

Auflösung. Man fälle von f auf die gegebenen Tangenten Senkrechte und verlängere dieselben je um ihre eigene Länge, so liegen die Fusspunkte a_1, a_2, a_3 auf einem Kreise K_3, dessen Mittelpunkt m der Ellipsenmittelpunkt ist; desgleichen gehören die Punkte b_1, b_2, b_3 einem Kreise K_1 mit dem Mittelpunkt f_1, dem zweiten Brennpunkte der Ellipse an.

Aufgabe 16. Von einer Ellipse kennt man eine Tangente T_1 nebst ihrem Berührpunkt a_1, eine weitere Tangente T_2, ausserdem einen Brennpunkt f. Man soll den anderen Brennpunkt f_1, sowie die Ellipse selbst konstruieren.

Figur 35.

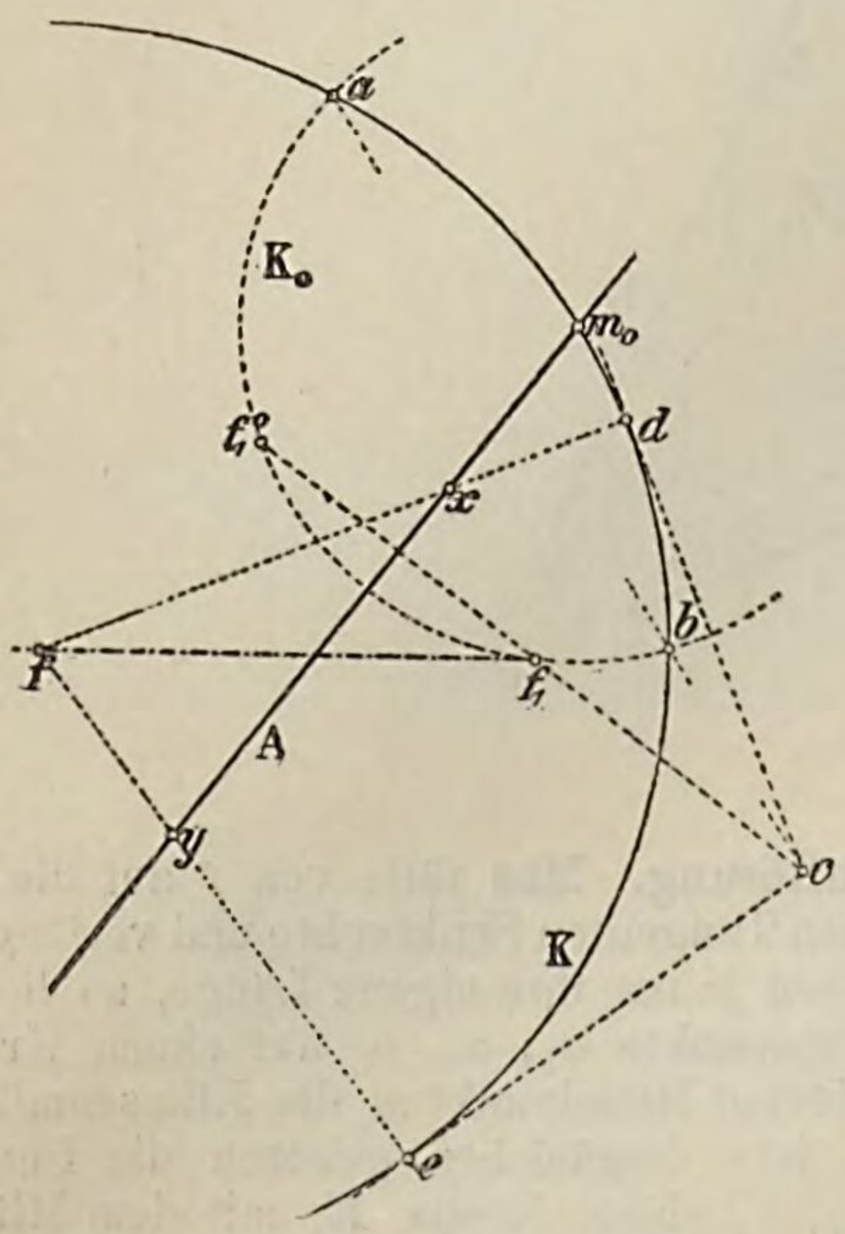


Auflösung. Man fälle von f Senkrechte zu den beiden Tangenten und verlängere dieselben je um ihre eigene Länge, so liefert die Mittelsenkrechte über $\overline{b_1 b_2}$ einen ersten, die Verbindungslinie $a_1 b_1$ einen zweiten Ort für den anderen Brennpunkt f_1 der Ellipse. Die Strecke $\overline{f_1 b_1}$ gibt die Länge der grossen Achse an. Die Konstruktion der einzelnen Ellipsenpunkte geschieht wie in Aufgabe 9.

Man hätte auch durch Antragen des Winkels ε vom Punkte p aus an die Tangente T_2 in der Richtung nach T_1 hin einen zweiten Ort für f_1 erhalten können.

Aufgabe 17. Eine Ellipse ist durch ihre Brennpunkte, sowie die Länge ihrer grossen Achse gegeben. Man soll die Schnittpunkte der Ellipse mit einer Geraden A konstruieren.

Figur 36.

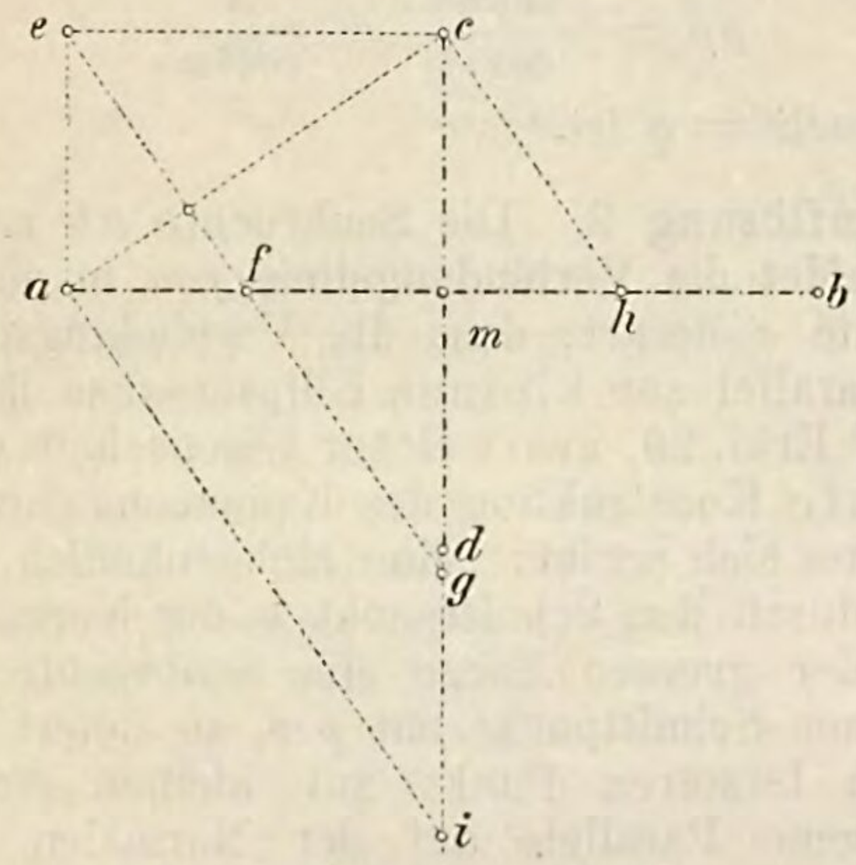


Auflösung. Mit Bezugnahme auf die in Erkl. 19 angegebene Entstehungsweise der Ellipse lässt sich die vorliegende Aufgabe auch so aussprechen: „Es sollen auf der Geraden A die Mittelpunkte jener Kreise gefunden werden, welche durch den einen Brennpunkt f_1 gehen, siehe Figur 36, und den um den anderen Brennpunkt f mit einem Halbmesser gleich 2α beschriebenen Kreis K von innen berühren.“ Diese Aufgabe lässt aber folgende Lösung zu: „Man beschreibe um einen beliebigen Punkt von A, etwa gleich um den Schnittpunkt m_0, von A u. K einen Kreis durch f_1, welcher K in zweien Punkten a und b schneidet. Die von dem Schnittpunkte o der Linien ab und der Senkrechten of_1 zu A an den Kreis K gezogenen Tangenten berühren diesen in den Punkten d und e, und diese sind die Berührpunkte der gesuchten Kreise, deren Mittelpunkte x und y demnach auf den Verbindungslinien df und de, sowie auf A liegen. Die Punkte x und y sind die gesuchten Schnittpunkte von A mit der gegebenen Ellipse.“

Da von einem Punkte im allgemeinen zwei Tangenten an einen Kreis gezogen werden können, so sieht man, dass, wie schon bekannt, eine Ellipse von einer Geraden im allgemeinen in zweien Punkten geschnitten wird.

Aufgabe 18. Man soll für die Scheitel einer Ellipse die zugehörigen Krümmungshalbmesser, bezw. Krümmungsmittelpunkte konstruieren.

Figur 37.



Erkl. 28. Handelt es sich lediglich um die Bestimmung der Längen der Krümmungshalbmesser, so lassen sich dieselben noch einfacher dadurch bestimmen, dass man, siehe Figur 37, in den Scheiteln a und c Senkrechte zur Verbindungslinie ac dieser Scheitel errichtet und zwar bis zu den Schnittpunkten h und i mit den Achsen. Die Strecken mi und mh sind dann, wie sich leicht wieder infolge Aehnlichkeit der Dreiecke ami, cmh und amc beweisen lässt, die gesuchten Krümmungshalbmesser für die Punkte c und a.

*) In der Figur 37 ist der Schnittpunkt der Linien ab und cd mit m zu bezeichnen.

Auflösung. Nach Antwort der Frage 24 erhält man für die Krümmungshalbmesser in den Scheiteln a und c bezw. die Ausdrücke:

$$\varrho_a = \frac{\beta^2}{\alpha}$$

und

$$\varrho_b = \frac{\alpha^2}{\beta}$$

Diese Ausdrücke lassen sich in einfacher Weise wie folgt konstruieren. Man zeichne, s. Figur 37, das Rechteck über den Halbachsen $\overline{am}$ und $\overline{cm}$*), so trifft die Senkrechte durch die Ecke e zur Diagonale ac die Achsen ab und cd in den gesuchten Krümmungsmittelpunkten f und g. Denn wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke aef und mac, bezw. cge und mac hat man die Beziehungen:

$$\frac{\overline{af}}{\overline{ae}} = \frac{\overline{mc}}{\overline{ma}}$$

oder:

$$52) \ldots \overline{af} = \frac{\overline{ae} \cdot \overline{mc}}{\overline{ma}} = \frac{\beta^2}{\alpha}$$

und

$$\frac{\overline{cg}}{\overline{ec}} = \frac{\overline{ma}}{\overline{mc}}$$

oder:

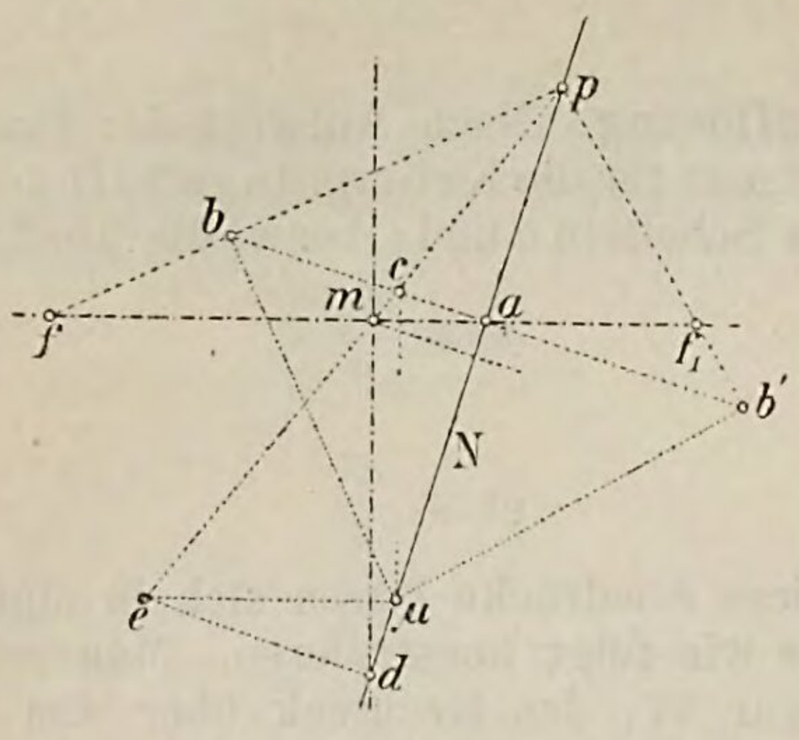
$$53) \ldots \overline{cg} = \frac{\overline{ec} \cdot \overline{ma}}{\overline{mc}} = \frac{\alpha^2}{\beta}$$

Die Strecken $\overline{af}$ und $\overline{cg}$ sind somit gleich den Krümmungshalbmessern der Scheitel a und c, demnach die Punkte f und g die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte.

Aufgabe 19. Für einen beliebigen Punkt einer Ellipse ist der Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt zu konstruieren, für den Fall, dass die Hauptachsen, sowie die Brennpunkte gegeben sein sollen.

Auflösung 1. Nach Antwort der Frage 23 erhält man für den Krümmungshalbmesser eines beliebigen Ellipsenpunktes p den Ausdruck $\varrho = \frac{N}{\cos w^2}$, wenn N das zwischen dem Kurvenpunkt und der grossen Achse liegende Stück der Normalen bezeichnet, ein Ausdruck, der sich in folgender Weise konstruieren lässt: „Man zeichne durch den Schnittpunkt a von N mit der grossen Achse die Senkrechte ab zu N bis zum Schnittpunkt b oder b' mit einem der Brennstrahlen pf oder pf_1 und durch den letzteren Punkt wieder eine Senkrechte zu dem betreffenden Brennstrahl, so schneidet diese auf der Normalen N

Figur 38.



Erkl. 29. Ein geometrischer Lehrsatz heisst:

„Fällt man, s. Figur 39, vom Mittelpunkt m einer Dreiecksseite $\overline{ff_1}$ auf die Halbierlinie bp des der Dreiecksseite gegenüberliegenden Winkels eine Senkrechte und errichtet in den Schnittpunkten dieser Senkrechten mit den beiden anderen Dreiecksseiten Senkrechte zu diesen Seiten, so treffen sich diese Linien in einem Punkte b auf pb so, dass die Verbindungslinie bm senkrecht zur Seite ff_1 steht."

Der Beweis dieses Satzes ist leicht wie folgt zu führen:

Zieht man fd senkrecht zu bp, so ist, weil $\overline{fm} = \overline{f_1 m}$, auch $\overline{f_1 c} = \overline{cd} = \overline{fa}$.

Die Dreiecke bcf_1 und baf sind daher kongruent und demnach die Längen $\overline{bf_1}$ und $\overline{bf}$ einander gleich; hieraus folgt aber, dass bm senkrecht auf ff_1 steht.

Zieht man nun durch einen beliebig auf pa gewählten Punkt e eine Parallele ee' zu ac, die mp in g schneidet, ferner durch e die Senkrechte eh zu pa bis zum Schnitt h mit pb, so läuft die Verbindungslinie gh parallel zu bm, denn die Dreiecke amb und egh sind zufolge der Konstruktion ähnlich und ähnlich gelegen. Auf Grund des eben bewiesenen Satzes entnimmt man aus der Figur 38 unmittelbar, dass die Linie μc senkrecht zu ff_1 steht, womit die in Auflösung 2 der Aufgabe 19 angeführte Konstruktion gerechtfertigt erscheint.

Aufgabe 20. Eine Ellipse ist durch ihre Achsen gegeben. Man soll Zwischenpunkte der Kurve näherungsweise konstruieren.

Auflösung. In der Antwort der Frage 18 wurde die Hauptachsengleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

abgeleitet; setzt man in derselben für x den Wert $\frac{3}{4}\alpha$, für y den Wert $\frac{2}{3}\beta$ ein, so erhält man den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt μ aus. Denn man erkennt unmittelbar, dass:

$$\overline{pb} = \frac{N}{\cos w}$$

und

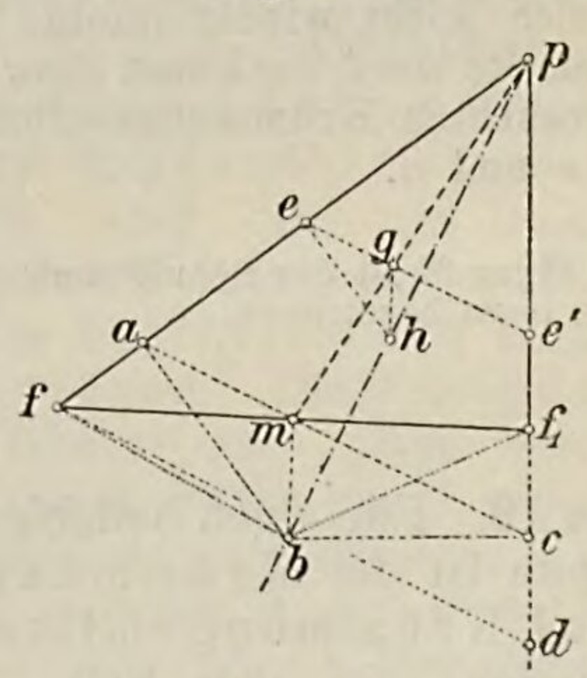
$$\overline{p\mu} = \frac{\frac{N}{\cos w}}{\cos w} = \frac{N}{\cos^2 w}$$

demnach $= \varrho$ ist."

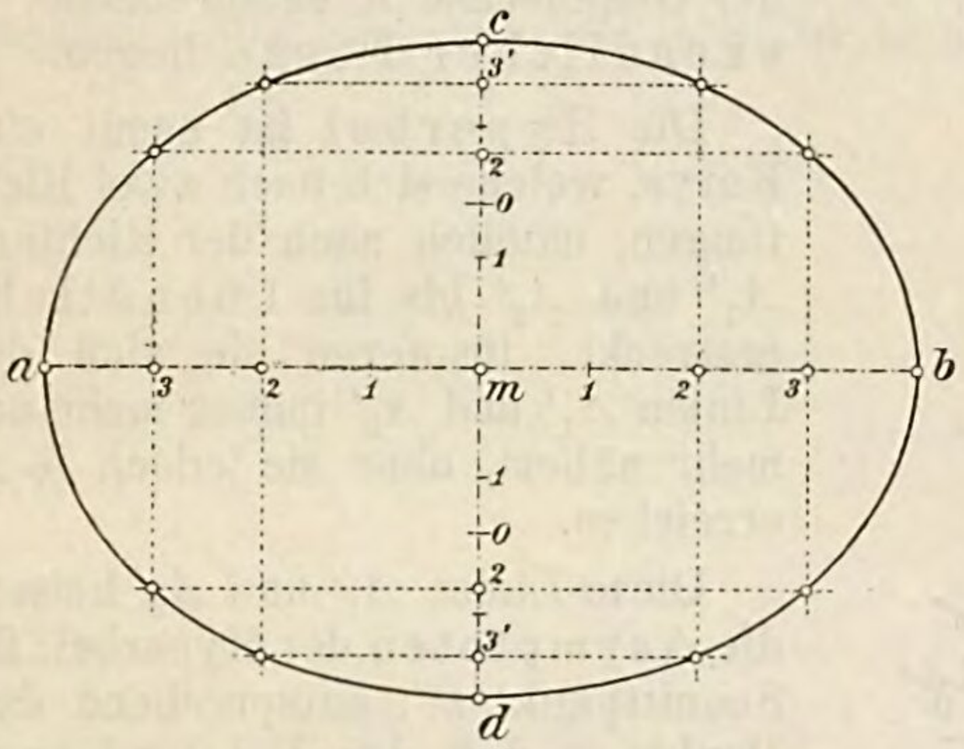
Auflösung 2. Die Senkrechte ab zu N schneidet die Verbindungslinie pm in einem Punkte c derart, dass die Verbindungslinie $c\mu$ parallel zur kleinen Ellipsenachse läuft, siehe Erkl. 29, aus welcher Eigenschaft eine zweite Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes sich ergibt: „Man ziehe nämlich pm und durch den Schnittpunkt a der Normalen mit der grossen Achse eine Senkrechte ac bis zum Schnittpunkt mit pm, so liefert die durch letzteren Punkt zur kleinen Achse gezogene Parallele auf der Normalen des Punktes p den zum letzteren Punkte gehörigen Krümmungsmittelpunkt μ."

Eine dritte Konstruktion folgt aus der vorhergehenden unmittelbar, wenn man N bis zum Schnittpunkte d mit der kleinen Achse verlängert, de senkrecht zu N bis zum Schnittpunkt e mit pm zieht; die Parallele $e\mu$ zur grossen Achse enthält dann gleichfalls den Krümmungsmittelpunkt μ.

Figur 39.



Figur 40.



hält die linke Seite obiger Gleichung den Wert:

$$\frac{9\alpha^2}{16\alpha^2} + \frac{4\beta^2}{9\beta^2} \text{ oder } \frac{9}{16} + \frac{4}{9} = \frac{145}{144}$$

welcher Wert der Einheit sehr nahe kommt. Die Punkte, deren Koordinaten $x = \frac{3}{4}\alpha$ und $y = \frac{2}{3}\beta$ sind, gehören demnach ohne merkliche Abweichung der Ellipse mit den Halbachsen α und β an.

Desgleichen nimmt durch Einsetzen der Werte $x = \frac{1}{2}\alpha$ und $y = \frac{7}{8}\beta$ in die Ellipsengleichung die linke Seite derselben den Wert an:

$$\frac{1}{4} + \frac{49}{64} = \frac{65}{64}$$

welcher Wert von der Einheit wieder nur wenig abweicht.

Unter Benützung dieser Werte erhält man, für den Fall man nur annäherungsweise und rasch einige Ellipsenpunkte konstruieren will, folgendes Verfahren: „Man teilt, s. Figur 40, die beiden Hälften der grossen Achse je in vier, jene der kleinen Achse in drei gleiche Teile und bezeichnet die Punkte wie in der Figur geschehen. Halbiert man ausserdem auf der kleinen Achse die Strecke $\overline{1,2}$ im Punkte o und macht die Strecke:

$$\overline{c3'} = \overline{d3'} = \frac{1}{4}\overline{oc} = \frac{1}{4}\overline{od}$$

so liefern die Parallelen durch die Punkte 2, 3 auf der grossen, dann jene durch die Punkte 3' und 2' auf der kleinen Achse zu der bezüglichen anderen Achse im gegenseitigen Durchschnitt für graphische Zwecke genau genug acht Ellipsenpunkte."

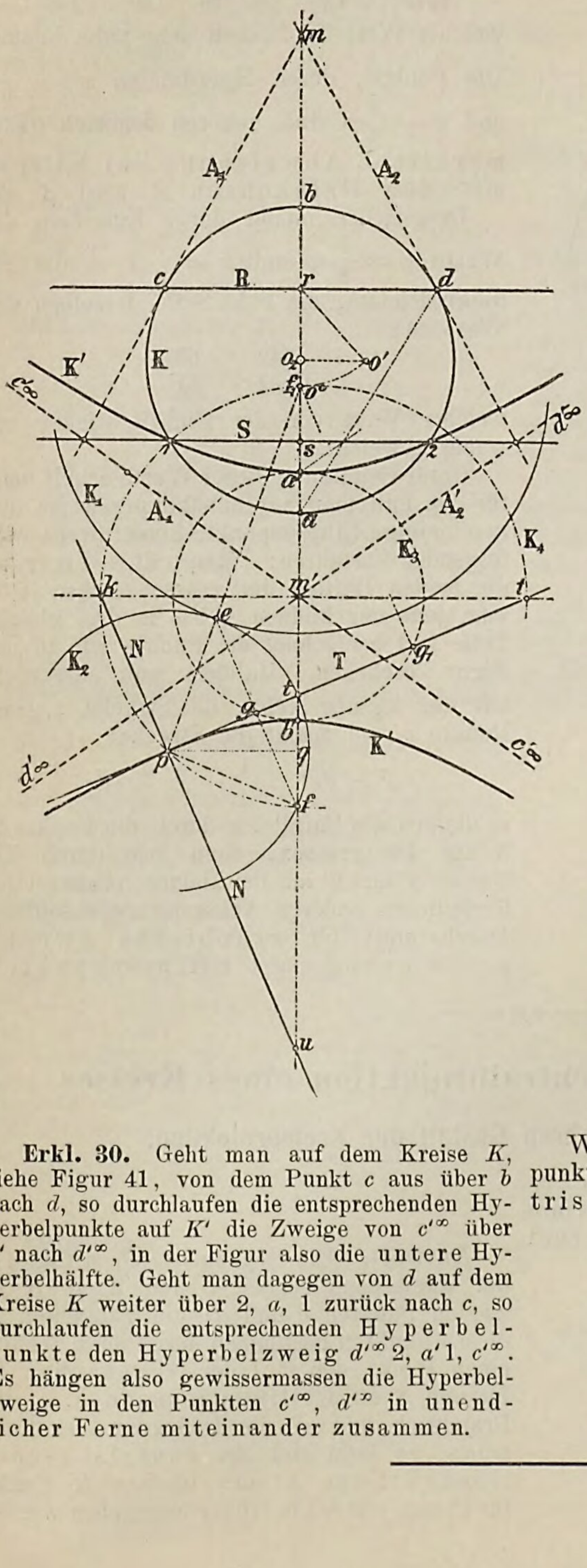
C. Die Hyperbel als Centralprojektion eines Kreises.

a) Bestimmung der wahren Gestalt der Kreisprojektion.

Frage 26. Wie bestimmt sich die wahre Gestalt der Centralprojektion eines Kreises für den Fall dieselbe eine Hyperbel wird.

Antwort. Die Gegenachse R, s. Fig. 41, der Kreisebene schneidet den Kreis K in zweien Punkten c und d; die Tangenten in diesen Punkten bestimmen durch ihren Schnitt einen Punkt, den Pol der Gegenachse R. Ist nun S die Collineationsachse, o_2 die Projektion und o^0 die Umlegung des Centrums, so lässt sich die centrisch-collineare Figur K' des Kreises K Punkt für Punkt, wie schon früher angegeben wurde,

Figur 41.



Erkl. 30. Geht man auf dem Kreise K, siehe Figur 41, von dem Punkt c aus über b nach d, so durchlaufen die entsprechenden Hyperbelpunkte auf K' die Zweige von c'^{∞} über b' nach d'^{∞}, in der Figur also die untere Hyperbelhälfte. Geht man dagegen von d auf dem Kreise K weiter über 2, a, 1 zurück nach c, so durchlaufen die entsprechenden Hyperbelpunkte den Hyperbelzweig d'^{∞} 2, a' 1, c'^{∞}. Es hängen also gewissermassen die Hyperbelzweige in den Punkten c'^{∞}, d'^{∞} in unendlicher Ferne miteinander zusammen.

bestimmen und man erhält dafür eine Linie von der Gestalt der Linie K', eine Hyperbel. Den Tangenten A_1 und A_2 entsprechen die Tangenten A_1' und A_2', deren Berührpunkte, weil den Punkten c und d der Gegenachse R entsprechend, in unendlicher Ferne liegen.

Die Hyperbel ist somit eine Kurve, welche sich nach zwei Richtungen, nämlich nach der Richtung A_1' und A_2' bis ins Unendliche erstreckt, insoferne sie sich den Linien A_1' und A_2' immer mehr und mehr nähert, ohne sie jedoch je zu erreichen.

Diese Linien A_1' und A_2' heissen die Asymptoten der Hyperbel; ihr Schnittpunkt m', entsprechend dem Punkte m, d. h. dem Pol der Gegenachse R, ist der Mittelpunkt der Hyperbel.

Jede durch den Punkt m' gezogene Gerade der Hyperbel schneidet dieselbe in zweien Punkten, gleichweit abstehend vom Punkte m', d. h. in den Endpunkten eines Durchmessers, aus denselben Gründen wie bei der Ellipse.

Den Punkten a und b des Kreises entsprechen die Punkte a' und b' auf der Halbierungslinie des Winkels der Asymptoten, sie heissen die Scheitel der Hyperbel, während die Halbierungslinie selbst die Achse der Hyperbel und zwar die reelle Achse genannt wird. Es gibt noch eine zweite Achse, nämlich die zweite Halbierungslinie km' des Asymptotenwinkels; diese Achse hat aber mit der Hyperbel keine Punkte gemeinsam und heisst aus diesem Grunde die imaginäre Achse.

Wie die Figur zeigt, liegen die Hyperbelpunkte zu den beiden Achsen symmetrisch angeordnet.

b) Eigenschaften der Hyperbel, Brennpunkte, verschiedene Erzeugungsarten der Kurve, Beziehungen zwischen ihren Tangenten und Normalen.

Frage 27. Welche Eigenschaften leiten sich für die Hyperbel als Centralprojektion eines Kreises unter der Annahme eines Centrums wie in Figur 42 ab.

Antwort. In dem projizierenden Kegel des Kreises K sind wieder zwei den Kegel und die Hyperbelebene in den Punkten f und f_1 berührende Kugeln $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ vorhanden. Für einen beliebig auf der Hyperbel K' angenommenen Punkt p kann man wieder Strahlen nach o und nach den Berührpunkten f und f_1 ziehen, wodurch sich die Beziehung ergibt:

$$\overline{pf} = \overline{pt}$$

und

$$\overline{pf_1} = \overline{pu}$$

daher ist:

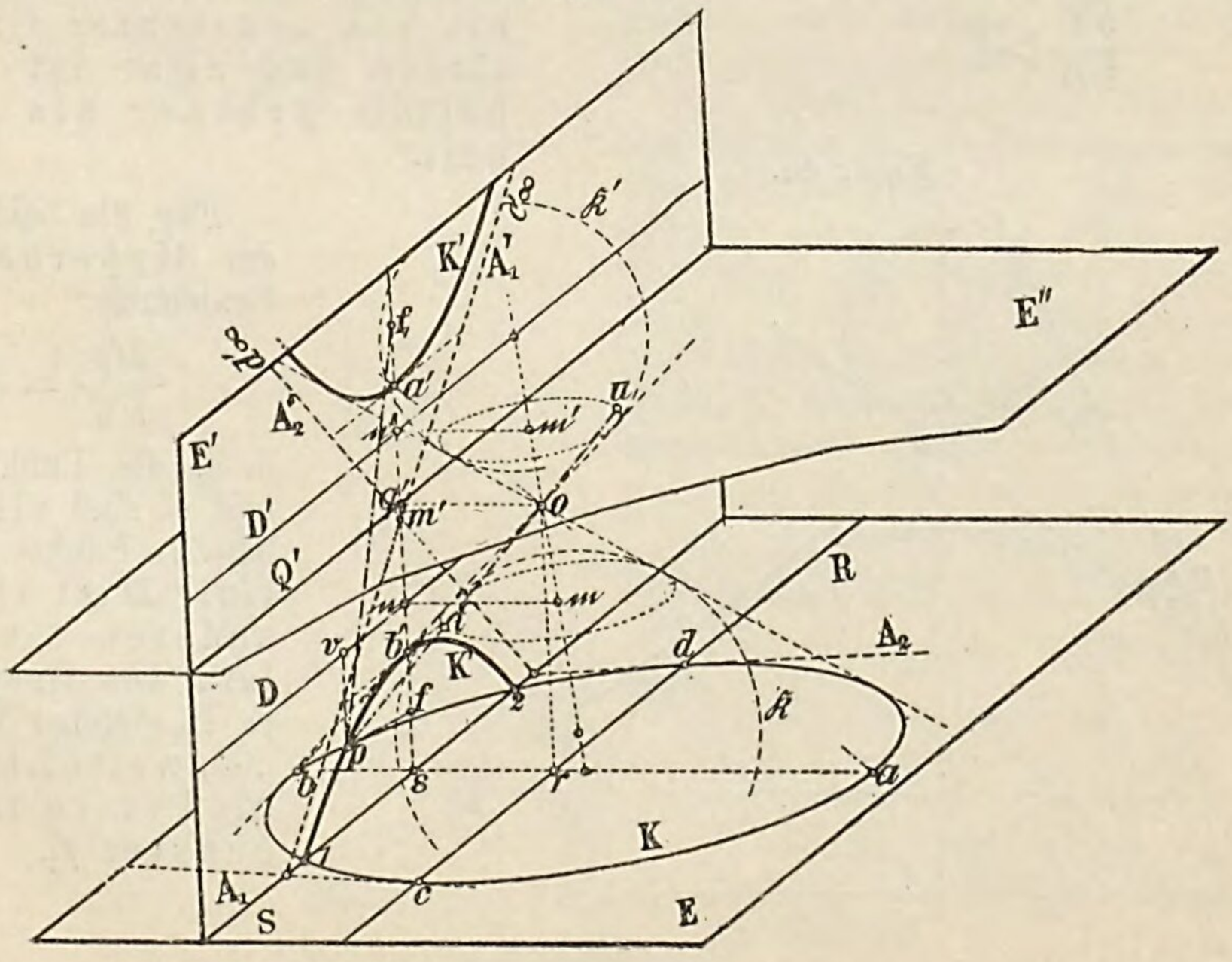
54) . . . $\overline{pf_1} - \overline{pf} = \overline{pu} - \overline{pt}$

(t und u sind die Berührpunkte des Strahles po mit den Kugeln $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$).

Die Differenz $\overline{pu} - \overline{pt}$ ist aber konstant und gleich $\overline{a'b'}$, siehe Erkl. 31. Man kann demnach folgenden Satz aussprechen:

„Auf der reellen Hyperbelachse gibt es zwei feste Punkte f und f_1 von der Eigenschaft, dass alle Hyperbelpunkte von diesen beiden Punkten eine Abstandsdifferenz von konstanter Grösse, nämlich gleich der Länge der reellen Achse besitzen."

Figur 42.



Erkl. 31. Der Beweis für die Richtigkeit der Gleichungen 54) und 55) lässt sich in ganz ähnlicher Weise wie in den Erkl. 15 und 16 führen.

Man entnimmt der Figur 43, welche eine rechtwinklige Projektion des Kegels, in eine zur Hyperbelebene senkrechte **Pr. Eb.** darstellt, unmittelbar die Beziehungen:

$$\overline{bc} = \overline{bf} \text{ und } \overline{bd} = \overline{bf_1}$$

ebenso:

$$\overline{ae} = \overline{af_1} \text{ und } \overline{ag} = \overline{af}$$

daher ist auch:

$$\overline{bd} - \overline{bc} = \overline{ag} - \overline{ae} = \overline{bf_1} - \overline{bf} = \overline{af} - \overline{af_1} = \overline{ab}$$

Ist ferner p ein beliebiger Punkt auf der Hyperbel, so ist die wahre Länge der Strecke $\overline{pf} = \overline{p'g}$, die wahre Entfernung des Punktes p von der Leitlinie D ist gleich $\overline{pD}$; für einen beliebigen anderen Punkt sind die diesbezüglichen Längen $\overline{q'g}$ und $\overline{qD}$. Aus der Figur entnimmt man aber:

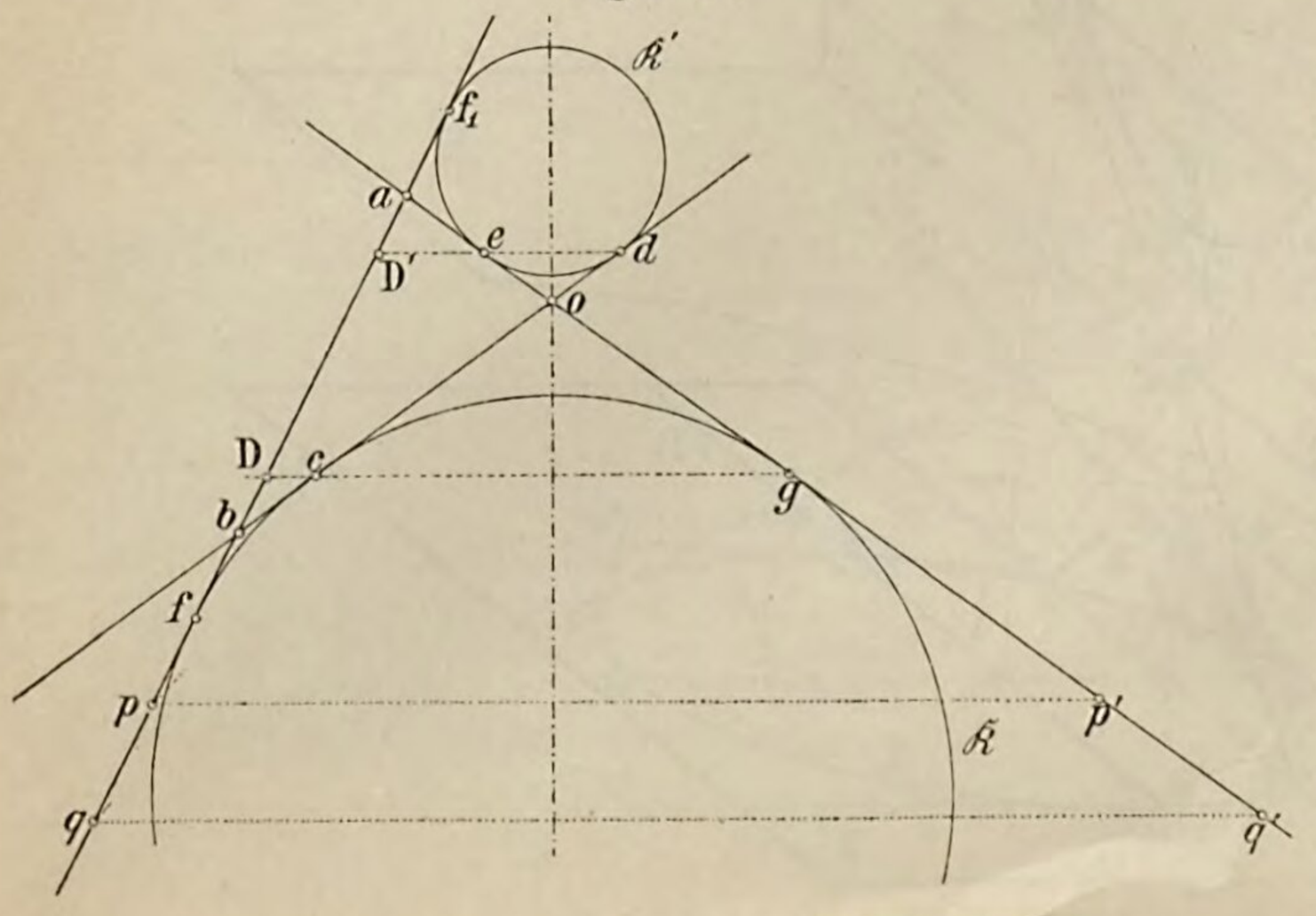
$$\frac{\overline{pD}}{\overline{qD}} = \frac{\overline{p'g}}{\overline{q'g}} \text{ oder } \frac{\overline{p'g}}{\overline{pD}} = \frac{\overline{q'g}}{\overline{qD}} =$$

$$\text{konstant} = \frac{\overline{pf}}{\overline{pD}} = \frac{\overline{qf}}{\overline{qD}}$$

In dem Dreieck cbD ist endlich der Winkel bei D grösser als jener bei c, daher ist auch die Strecke $\overline{bc}$ stets grösser als die Strecke $\overline{bD}$, und demnach auch, weil $\overline{bc} = \overline{bf}$ ist, $\overline{bf} > \overline{bD}$, somit auch bD grösser als die Einheit, also:

$$\frac{\overline{bf}}{\overline{bD}} > 1$$

Figur 43.



Diese Punkte heissen die Brennpunkte der Hyperbel und es ergibt sich für die Kurve nunmehr folgendes Erzeugungsgesetz:

„Die Hyperbel ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zweien festen Punkten, den Brennpunkten, eine gegebene Abstandsdifferenz besitzen."

Die Kugeln $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ berühren den projizierenden Kegel nach Kreisen mit den Mittelpunkten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$, deren Ebenen die Hyperbelebene nach Geraden D und D' den Leitlinien der Hyperbel schneiden.

Ist nun pv eine Senkrechte zu D, so hat das Verhältnis $\frac{\overline{pt}}{\overline{pv}}$ konstanten Wert, s. Erkl. 31, daher auch das Verhältnis $\frac{\overline{pf}}{\overline{pv}}$. Fällt der Punkt p mit b' zusammen, so nimmt das Verhältnis den Wert an $\frac{\overline{b'f}}{\overline{b'\mathfrak{n}}}$ und dieser Wert ist grösser als die Einheit, d. h. man hat:

$$55) \ldots \frac{\overline{b'f}}{\overline{b'\mathfrak{n}}} > 1$$

Aus Vorstehendem folgt für die Hyperbel noch ein weiteres Entstehungsgesetz, nämlich:

„Die Hyperbel ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Geraden ein Abstandsverhältnis von konstanter Grösse besitzen und zwar ist das Verhältnis grösser als die Einheit."

Für die beiden Scheitel der Hyperbel gilt die Beziehung:

$$\frac{\overline{b'f}}{\overline{b'\mathfrak{n}}} = \frac{\overline{a'f}}{\overline{a'\mathfrak{n}}}$$

d. h. die Punkte $\mathfrak{n}$, f, a' und b' sind vier harmonische Punkte. Die Leitlinie D ist also nichts anderes als die Polare des Brennpunktes f. In gleicher Weise bildet die zweite Leitlinie D', die Polare des Brennpunktes f_1.

Frage 28. Welche Konstruktionen folgen aus dem in Antwort der Frage 27 ausgesprochenen Entstehungsgesetze der Hyperbel und welche weiteren Eigenschaften leiten sich hieraus ab?

Antwort. Sind etwa, siehe Figur 41, f und f_1 die gegebenen Brennpunkte, a' und b' die Endpunkte der reellen Achse der Hyperbel, so erhält man beliebige weitere Hyperbelpunkte, wenn man die Strecke $\overline{a'b'}$ durch einen ausserhalb der Punkte a' und b' gewählten Punkt in zwei Abschnitte teilt und mit den Längen derselben aus den Brennpunkten f und f_1 als Mittelpunkte Kreise beschreibt. Die gemeinsamen Punkte dieser Kreise gehören der Hyperbel mit der Achse $a'b'$ an, denn es ist ja, wenn p einer dieser Punkte ist, $\overline{pf_1} - \overline{pf} = \overline{a'b'}$.

Eine andere Konstruktion, auf der nämlichen Beziehung $\overline{pf_1} - \overline{pf} = \overline{a'b'}$ beruhend, erhält man, wenn man um einen der Brennpunkte, etwa um f_1, siehe Figur 41, mit einem Halbmesser gleich $\overline{a'b'}$ den Kreis K_1 beschreibt, auf demselben beliebige Punkte, z. B. den Punkt e wählt und mit dem zweiten Brennpunkte f verbindet. Die Halbiersenkrechte gp einer solchen Verbindungslinie trifft die Verbindungslinien ef_1 in einem Hyperbelpunkte p, denn es ist wieder, da $\overline{pe} = \overline{pf}$ ist:

$$\overline{pf_1} - \overline{pf} = \overline{f_1e} = \overline{a'b'}$$

Die zuletzt angeführte Konstruktion lässt ausserdem noch ein anderes Entstehungsgesetz der Hyperbel erkennen, nämlich:

„Die Hyperbel ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise K, welche durch einen festen Punkt f gehen und einen festen Kreis K_1 von aussen berühren."

Die zuletzt angegebene Konstruktion liefert überdies die Hyperbeltangente T in dem betreffenden Punkte p; diese Tangente ist offenbar die Linie pg selber, denn würde man einen dem Punkte e unendlich nahen Punkt e^0 wählen, so erhielte man auch einen dem Punkte p unendlich nahen Punkt p^0, als Tangente daher die Linie pp^0, welche offenbar gleichfalls durch den Halbierpunkt g von $\overline{pe}$ gehen, also mit pg zusammenfallen muss.

Aus der eben angegebenen Tangentenkonstruktion folgt die Gleichheit der Winkel $f\hat{p}g$ und $f_1\hat{p}g$, siehe Figur 41, daher der Satz:

„Die Hyperbeltangente halbiert den Winkel der nach dem Berührpunkte gehenden Brennstrahlen, die Hyperbelnormale dagegen den Nebenwinkel dieser Strahlen."

Anmerkung 5. Auf Grund der in Antwort der Frage 28 ausgesprochenen Sätze bezüglich der Tangenten und Normalen einer Hyperbel kann man nunmehr jeden Hyperbelpunkt p auch als Punkt einer Ellipse nehmen, welche mit der Hyperbel die nämlichen Brennpunkte besitzt, oder wie man sagt, zu ihr confocal ist. Die beiden Linien durchschneiden sich im Punkte p rechtwinklig, denn die Hyperbeltangente ist zugleich Ellipsennormale, die Hyperbelnormale dagegen Ellipsentangente.

Hieraus folgt aber zugleich, dass die in Antwort der Frage 16 angeführten Sätze auch für die Hyperbel in Geltung bleiben.

Ueberhaupt haben die für die Ellipse bezüglich ihrer Tangenten, Brennstrahlen und Brennpunkte angeführten Sätze auch für die Hyperbel Gültigkeit. Dabei ist nur zu berücksichtigen, ob die in Rede stehenden Tangenten dem nämlichen Hyperbelzweige angehören oder nicht. Wie im letzten Falle der betreffende Satz auszusprechen ist, wird der Leser wohl selbst zu entscheiden im Stande sein.

Bezeichnet man die Länge der halben reellen Achse, d. i. die Strecke $\overline{ma'}$ oder $\overline{mb'}$, siehe Figur 41, mit α, die Entfernung der Brennpunkte f und f_1 vom Mittelpunkte m', d. i. die Excentricität der Hyperbel mit γ, so kann man eine Länge β so einführen, dass:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

oder:

$$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$

oder:

$$\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$$

ist. Die so bestimmte Länge β heisst die Länge der imaginären Halbachse der Hyperbel, siehe auch Erkl. 33, sowie Antwort der Frage 26.

---

c) Hauptachsengleichung der Hyperbel, Länge von Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale. Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt.

Frage 29. Was versteht man unter der Hauptachsengleichung der Hyperbel?

Antwort. In gleicher Weise wie bei der Ellipse kann man auch bei der Hyperbel den Punkt m als Mittelpunkt eines Koordinatensystems nehmen, dessen Achsen bezw. mit den Hyperbelachsen zusammenfallen und die einzelnen Hyperbelpunkte mittels der Koordinaten x und y auf dasselbe beziehen. Man erhält dann wieder eine Gleichung zwischen den unbekannten Grössen x und y eines Punktes und den Längen α und β, welche die Hauptachsengleichung der Hyperbel heisst.

Frage 30. Wie lautet die Hauptachsengleichung der Hyperbel und wie lässt sich dieselbe aus den bisher kennen gelernten Entstehungsgesetzen der Kurve ableiten?

Antwort. Heissen α und β die halben Hauptachsen der Hyperbel und bezeichnet man die Brennstrahlen $\overline{pf}$ und $\overline{pf_1}$ eines beliebigen Hyperbelpunktes mit r_1 und r_2, ferner die Länge $\overline{mf} = \overline{mf_1}$ mit γ, so hat man:

$$56) \ldots (\gamma - x)^2 + y^2 = r_1^2$$

$$57) \ldots (\gamma + x)^2 + y^2 = r_2^2$$

58) . . . $r_2 - r_1 = 2\alpha$

59) . . . $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Durch Subtraktion der Gleichungen 57 und 56 erhält man:

$$4\gamma \cdot x = r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1) \cdot (r_2 - r_1)$$

und hieraus:

60) . . . $r_2 + r_1 = \frac{2\gamma \cdot x}{\alpha}$

Durch Addition der Gleichungen 58) und 60) folgt:

61) . . . $r_2 = \frac{\gamma \cdot x}{\alpha} + \alpha$

Nach Einsetzung dieses Wertes von r_2 in Gleichung 57) geht diese über in die gesuchte Hauptachsengleichung:

62) . . . $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

welche auch in der folgenden Form geschrieben werden kann:

63) . . . $\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$

Frage 31. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Längen der Tangente, Normalen, Subtangente und Subnormalen eines Hyperbelpunktes?

Antwort. Die Beziehungen zwischen den Längen der Tangente, Normalen, Subtangente und Subnormalen bleiben die nämlichen wie bei der Ellipse, nur ist, wie schon oben gesagt wurde, überall statt Tangente, Normale und umgekehrt zu setzen.

Man erhält demnach mit Bezugnahme auf die Gleichungen 29) bis 35) folgende auf die Hyperbel bezügliche Gleichungen. Es ist, siehe Figur 41), die Länge der Subnormalen:

64) . . . $\overline{uq} = \frac{\alpha^2 - x^2}{x}$

die Länge der Subtangente:

65) . . . $\overline{qt} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot x$

die Länge der Normalen:

66) . . . $\overline{pu} = \sqrt{\frac{(\alpha^2 + x^2)^2}{x} + y^2}$

die Länge der Tangente:

67) . . . $\overline{pt} = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot x^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot y^2}$

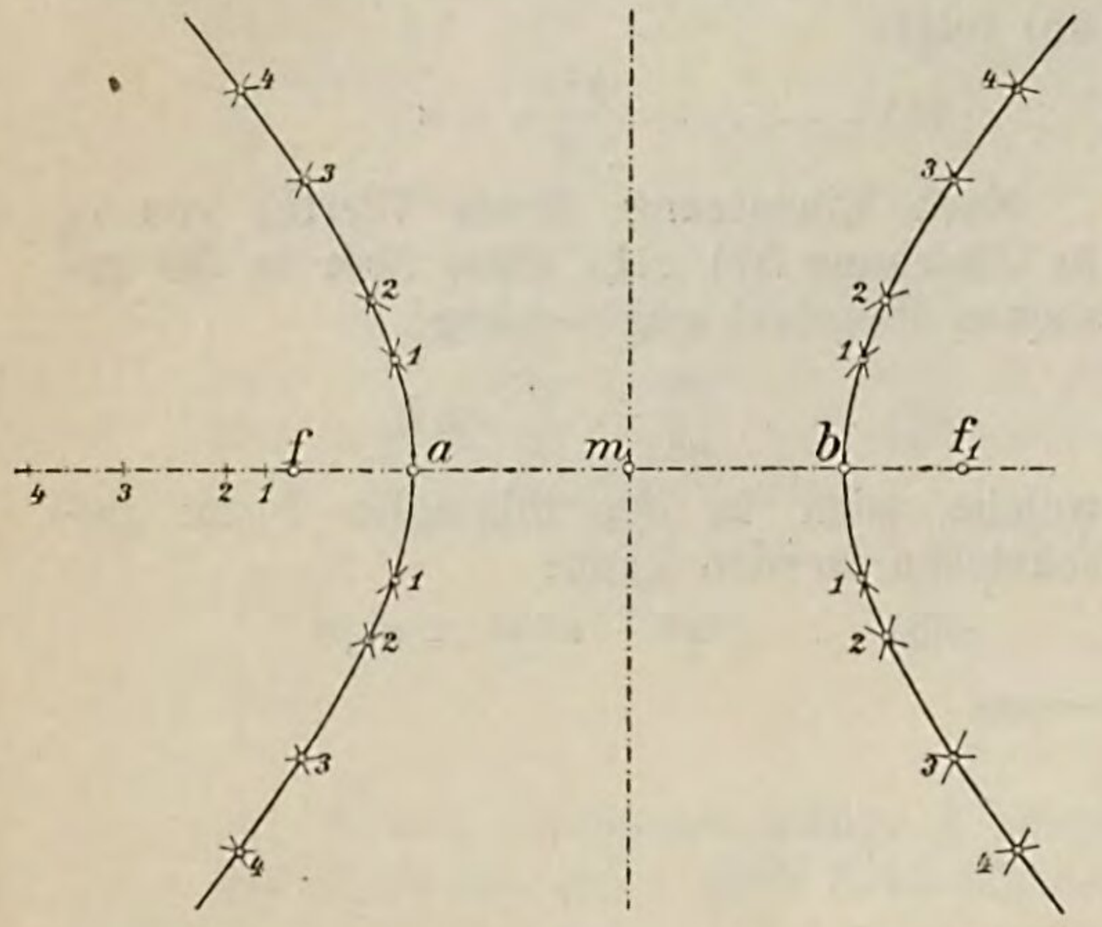
Auch die Beziehungen 45) bis 48) für die Länge des Krümmungshalbmessers für einen beliebigen Kurvenpunkt bleiben für die Hyperbel die gleichen wie für die Ellipse, siehe Frage und Antwort 23.

---

d) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 21. Es sind zwei Punkte f und f_1 gegeben. Man soll den geometrischen Ort für jene Punkte zeichnen, deren Abstandsdifferenz von den beiden gegebenen Punkten einer gegebenen Strecke 2α gleich werde.

Figur 44.



Auflösung. Der gesuchte Ort ist eine Hyperbel mit den Brennpunkten f und f_1 und der grossen Achse gleich 2α. Trägt man daher, siehe Figur 44, von der Mitte m der Strecke $\overline{ff_1}$ die Länge α nach $\overline{ma}$ und $\overline{mb}$ ab, so sind a und b die Endpunkte der reellen Achse der Hyperbel. Beliebige weitere Hyperbelpunkte ergeben sich durch Annahme beliebiger Punkte 1, 2, 3 auf der verlängerten Linie ma, deren Entfernungen von a und b die Halbmesser von Kreisen aus f und f_1 liefern, die sich in den Hyperbelpunkten 1, 2, 3 ··· durchschneiden.

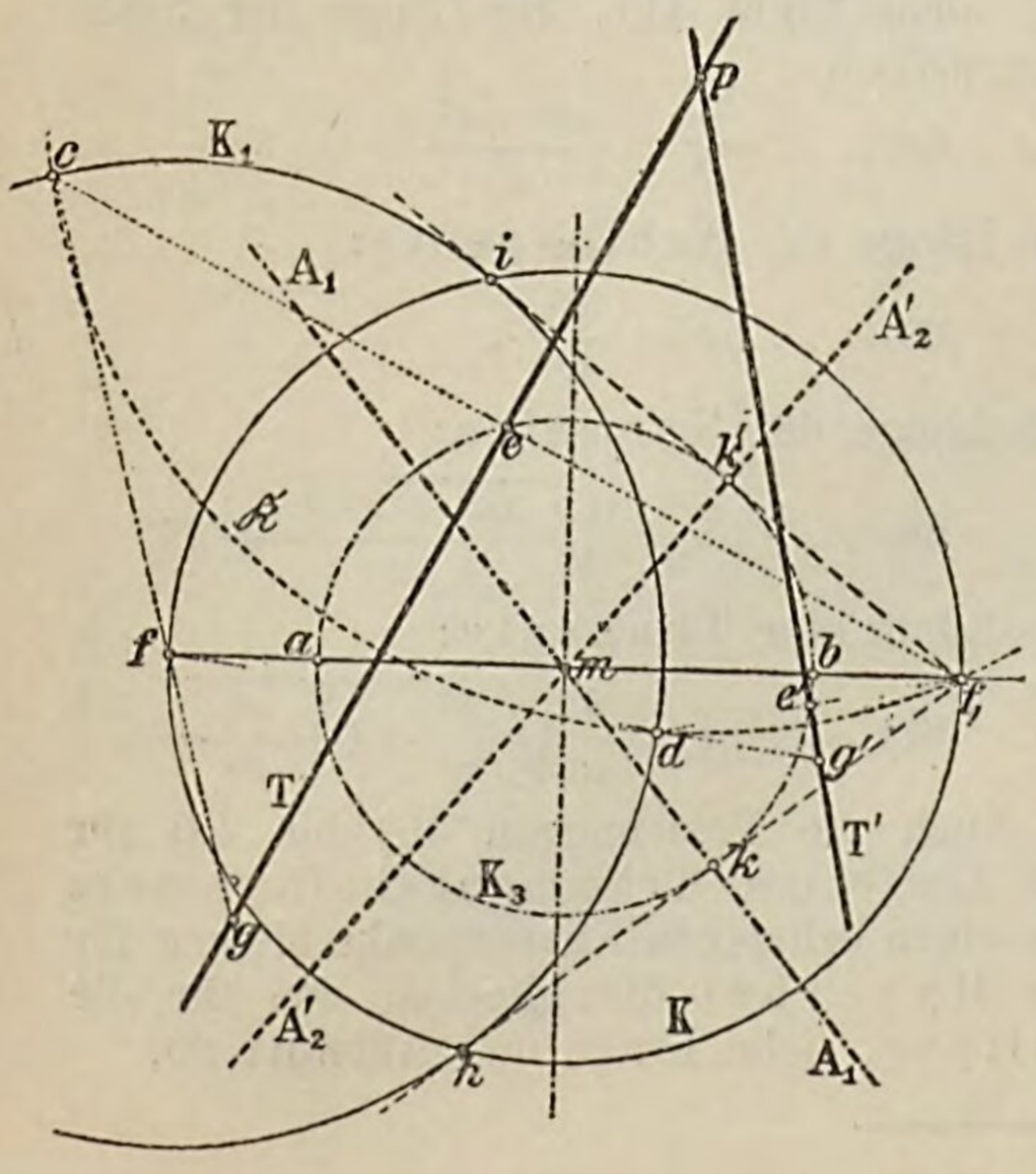
Aufgabe 22. An eine durch die Brennpunkte und die grosse Achse gegebene Hyperbel sollen:

a) durch einen gegebenen Punkt p,

b) parallel einer gegebenen Geraden A,

die möglichen Tangenten konstruiert werden.

Figur 45.



Auflösung a. Die Konstruktion ist ganz die nämliche wie in Auflösung a der Aufgabe 11. Die Kreise $\mathfrak{K}$ um p und K_1 um f, ersterer Kreis durch f_1 gehend, letzterer mit dem Halbmesser gleich 2α schneiden sich in den Punkten c und d. Auf den Verbindungslinien f_1c und f_1d stehen die gesuchten Tangenten T und T' senkrecht, und ihre Berührpunkte g und g' liegen auf cf und df.

Aus denselben Gründen wie bei der Ellipse sind auch an die Hyperbel höchstens zwei Tangenten von einem Punkte aus möglich.

Fällt der Punkt p mit dem Mittelpunkte m zusammen, so geht der Kreis $\mathfrak{K}$ in den über $\overline{ff_1}$ als Durchmesser beschriebenen Kreis K über und dessen Schnittpunkte mit K_1 geben die Berührpunkte h und i der von f_1 aus an K_1 gezogenen Tangenten; auf diesen stehen somit die vom Mittelpunkte m aus an die Hyperbel möglichen Tangenten, das sind die Asymptoten, senkrecht. Die Schnittpunkte k und k' liegen, weil:

$$\overline{mk} = \frac{1}{2}\overline{fh}$$

ebenso:

$$\overline{mk'} = \frac{1}{2}\overline{fi}$$

Erkl. 32. Aus dem in der Auflösung a der Aufgabe 22 bezüglich der Konstruktion der Asymptoten Gesagten folgt ohne weiteres noch, dass, wenn man im einen Endpunkte b der reellen Achse eine Senkrechte zu dieser Linie bis zum Schnitt b' (in der Figur 45 nicht angegeben) mit der Asymptote A_2' zeichnet, die Dreiecke $mk'f$ und mbb' kongruent sind.

Man kann auf Grund des Angegebenen sowohl die Asymptoten in einfacher Weise konstruieren, wenn die Brennpunkte gegeben sind, als auch umgekehrt die Brennpunkte finden, wenn man von der Hyperbel die Asymptoten und die reelle Achse kennt, siehe Aufgabe 23.

Aufgabe 23. Von einer Hyperbel sind gegeben:

a) die reelle Achse und die Brennpunkte,
b) die reelle Achse und die Asymptoten.

Man soll im Falle a) die Asymptoten, im Falle b) die Brennpunkte konstruieren.

Erkl. 33. Verbindet man die Durchschnittspunkte der Asymptoten mit dem Kreise K, so erhält man ein Rechteck, dessen eines Paar paralleler Seiten die Scheiteltangenten der Hyperbel bilden. Man kann nunmehr auch das andere Paar paralleler Seiten als Scheiteltangenten einer zweiten Hyperbel mit denselben Asymptoten A_1' und A_2' nehmen. Diese zweite Hyperbel heisst die conjugierte Hyperbel zur gegebenen und ihre Achse ist gleich der Länge der Scheiteltangente der gegebenen Hyperbel. Man nennt diese Achse auch die imaginäre Achse der ursprünglichen Hyperbel und bezeichnet sie in der Regel mit β, siehe auch Anmerkung 5, sowie Antwort der Frage 26.

Erkl. 34. Nennt man w den Winkel einer Asymptote mit der reellen Achse, so besteht zwischen den Längen der Achsen und dem Winkel w die Beziehung:

$$\operatorname{tg} w = \frac{\beta}{\alpha}$$

Ist $w = 90^0$, so heisst die zugehörige Hyperbel gleichseitig.

Erkl. 35. Sind x und y die Koordinaten eines beliebigen Hyperbelpunktes p und heisst x' das Stück von x, das zwischen der imagi-

ist, noch ausserdem auf einem Kreise K_3 über der grossen Achse $\overline{ab}$ als Durchmesser, was übrigens auch aus dem in Antwort der Frage 16 angegebenen, auch für die Hyperbel gültigen Satze, s. Seite 27, Zeile 15, folgt.

Auflösung b. Die Konstruktion bleibt ganz die nämliche wie in Auflösung b der Aufgabe 11. Man findet, dass nicht unter allen Umständen Tangenten parallel einer Geraden an die Hyperbel möglich sind. Es muss vielmehr, soll eine Tangente parallel einer Geraden A an die Hyperbel gezogen werden können, ihr Winkel w' mit der reellen Hyperbelachse stets grösser sein als der Winkel w einer Asymptote mit dieser Achse. Ist $w' = w$, so geht die gesuchte Tangente in die Asymptote über. Ist $w' < w$, so ist die Aufgabe unmöglich.

Auflösung. Im Falle a) beschreibt man über $\overline{ff_1}$ als Durchmesser den Kreis K und errichtet in den Endpunkten der reellen Achse Senkrechte zu dieser, so gehen durch deren Schnittpunkte mit K die Asymptoten hindurch; im Falle b) errichtet man in den Endpunkten der reellen Achse Senkrechte zu dieser Linie bis zum Schnitt mit den Asymptoten, so geht durch diese Schnittpunkte der Kreis K mit dem Mittelpunkte m, der die Brennpunkte f und f_1 enthält.

Welche andere Lösung der in Obigem behandelten Aufgaben folgt aus der in Auflösung a der Aufgabe 22 angegebenen allgemeinen Asymptotenkonstruktion.

närenAchse und einer Asymptote liegt, so hat man folgende Beziehungen:

$$68) \ldots \frac{x'}{y} = \frac{\alpha}{\beta}$$

oder:

$$69) \ldots y = \frac{x' \cdot \beta}{\alpha}$$

Ausserdem ist aber auch mit Bezugnahme auf die Gleichung 62):

$$70) \ldots y = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \sqrt{x^2 - \alpha^2}$$

Durch Gleichsetzen der Werte von y aus den Gleichungen 69 und 70 folgt:

$$\frac{x' \cdot \beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \sqrt{x^2 - \alpha^2}$$

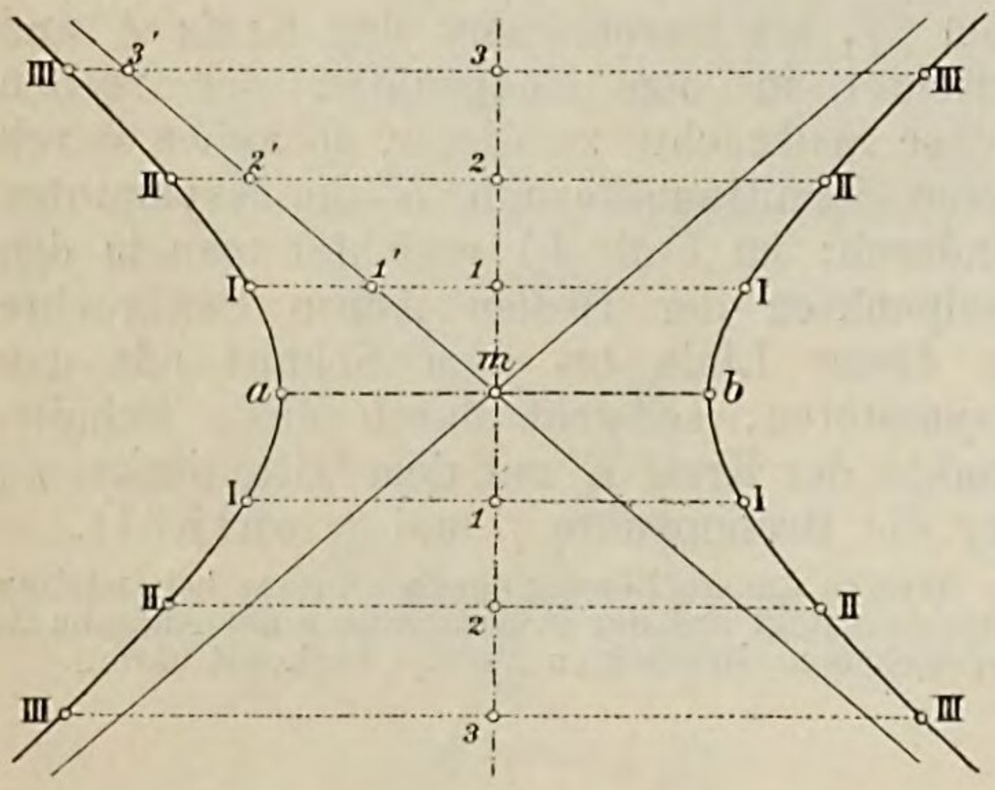
oder:

$$71) \ldots x' = \sqrt{x^2 - \alpha^2}$$

Anmerkung 6. Die gleichen Sätze, welche auf Grund der Lösung der Aufgabe 11 für die Ellipse abgeleitet wurden, liessen sich durch dieselben Betrachtungen auch für die Hyperbel ableiten. Die in der Antwort der Frage 25 aufgeführten Sätze kann man also auch für die Hyperbel aussprechen, nur ist in den daselbst zuletzt aufgeführten Sätzen für den Kreishalbmesser $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ zu setzen $r = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

Aufgabe 24. Von einer Hyperbel kennt man die reelle Achse sowie die beiden Asymptoten. Es sollen beliebige weitere Hyperbelpunkte konstruiert werden.

Figur 46.



Auflösung. Die Konstruktion der Hyperbelpunkte beruht auf der Beziehung:

$x' = \sqrt{x^2 - \alpha^2}$ siehe Erkl. 35.

Zieht man nämlich im gleichen Abstande von m zur reellen Hyperbelachse Parallele durch die Punkte 1, 2, $\cdots$ und konstruiert rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten gleich den Strecken $\overline{11'}$, $\overline{22'}$ einerseits und der reellen Hyperbelachse α andererseits, so geben die zugehörigen Hypotenusen die Längen $\overline{1\text{I}}$, $\overline{2\text{II}}$, d. h. die Entfernungen der Hyperbelpunkte von der imaginären Achse an.

---

e) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 25. Man löse die Aufgabe 12 für die Hyperbel.

Andeutung. Die Lösung ist genau die nämliche, wie in der gleichlautenden Aufgabe für die Ellipse.

Aufgabe 26. Man löse die Aufgabe 13 für die Hyperbel.

Andeutung. Siehe die gleiche Aufgabe für die Ellipse.

Aufgabe 27. Man löse die Aufgabe 14 für die Hyperbel.

Andeutung. Die Lösung ist genau die nämliche, wie in der gleichlautenden Aufgabe für die Ellipse.

Aufgabe 28. Man löse die Aufgabe 15 für die Hyperbel.

Andeutung. Die Lösung ist genau die nämliche, wie in der gleichlautenden Aufgabe für die Ellipse.

Aufgabe 29. Man löse die Aufgabe 16 17, 18 und 19 für die Hyperbel.

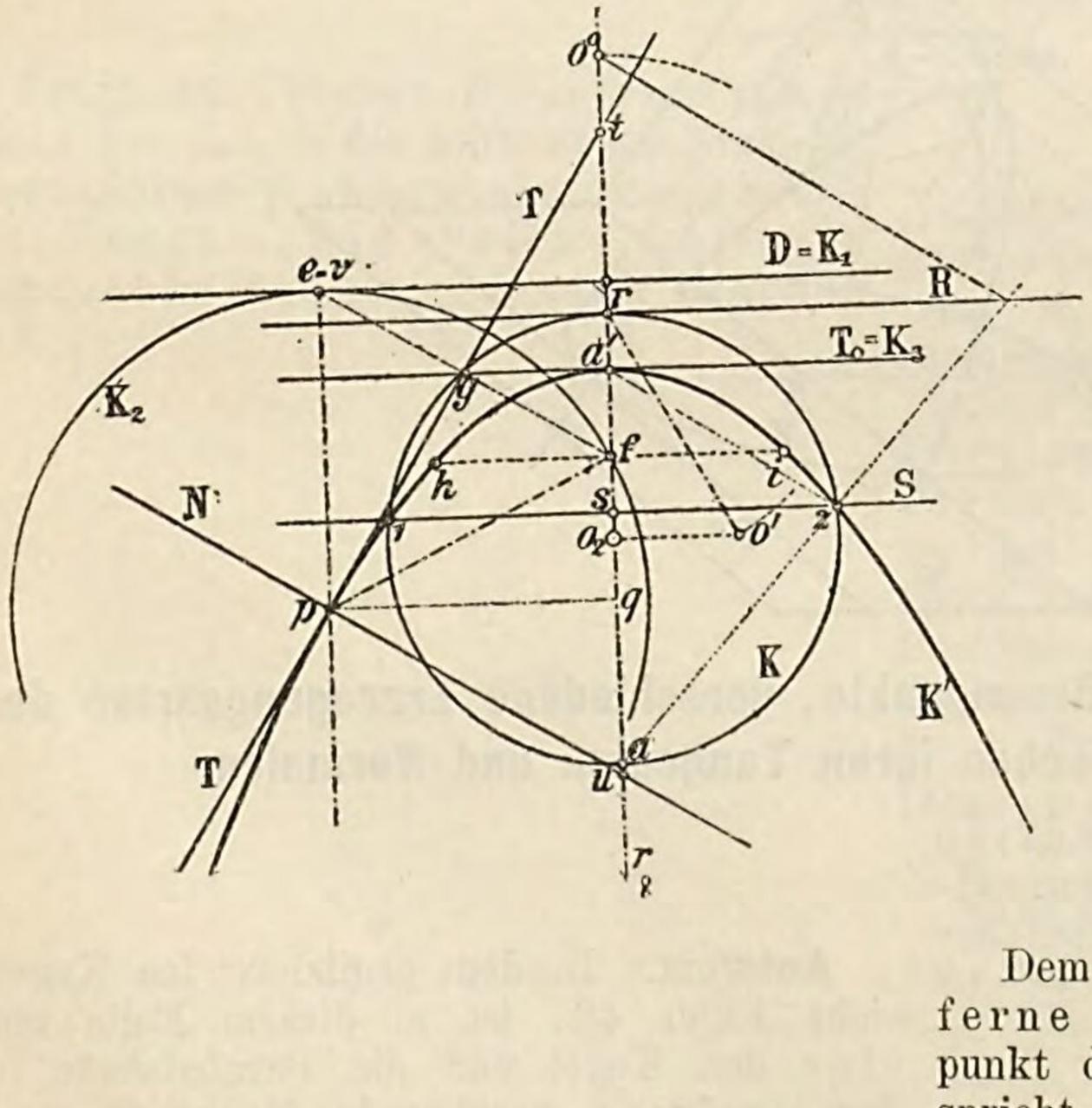
Andeutung. Die Lösung ist genau die nämliche, wie in den gleichlautenden Aufgaben für die Ellipse.

D. Die Parabel als Centralprojektion eines Kreises.

a) Bestimmung der wahren Gestalt der Kreisprojektion.

Frage 32. Wie bestimmt sich die wahre Gestalt der Centralprojektion eines Kreises für den Fall dieselbe eine Parabel wird?

Figur 47.



Antwort. Die Gegenachse R der Kreisebene, siehe Figur 47, berührt in diesem Falle die Kreislinie K. Ist nun o^0 die Umlegung des Centrums und S die Collineationsachse, so kommt der dem Punkte r entsprechende Punkt r' auf der Linie $o^0 r n$ in unendliche Ferne zu liegen und dem Punkte a von K entspricht der Punkt a'; man erhält, indem man jedem einzelnen Kreispunkte den ihm centrisch-collinear entsprechenden Punkt konstruiert, eine Linie von der Gestalt der Linie K', eine Parabel; sie ist zur Linie $o^0 a'$ symmetrisch angeordnet, weshalb letztere Linie auch die Achse der Parabel genannt wird. Der Punkt a', d. h. der im Endlichen liegende Endpunkt der Achse heisst der Scheitel der Parabel.

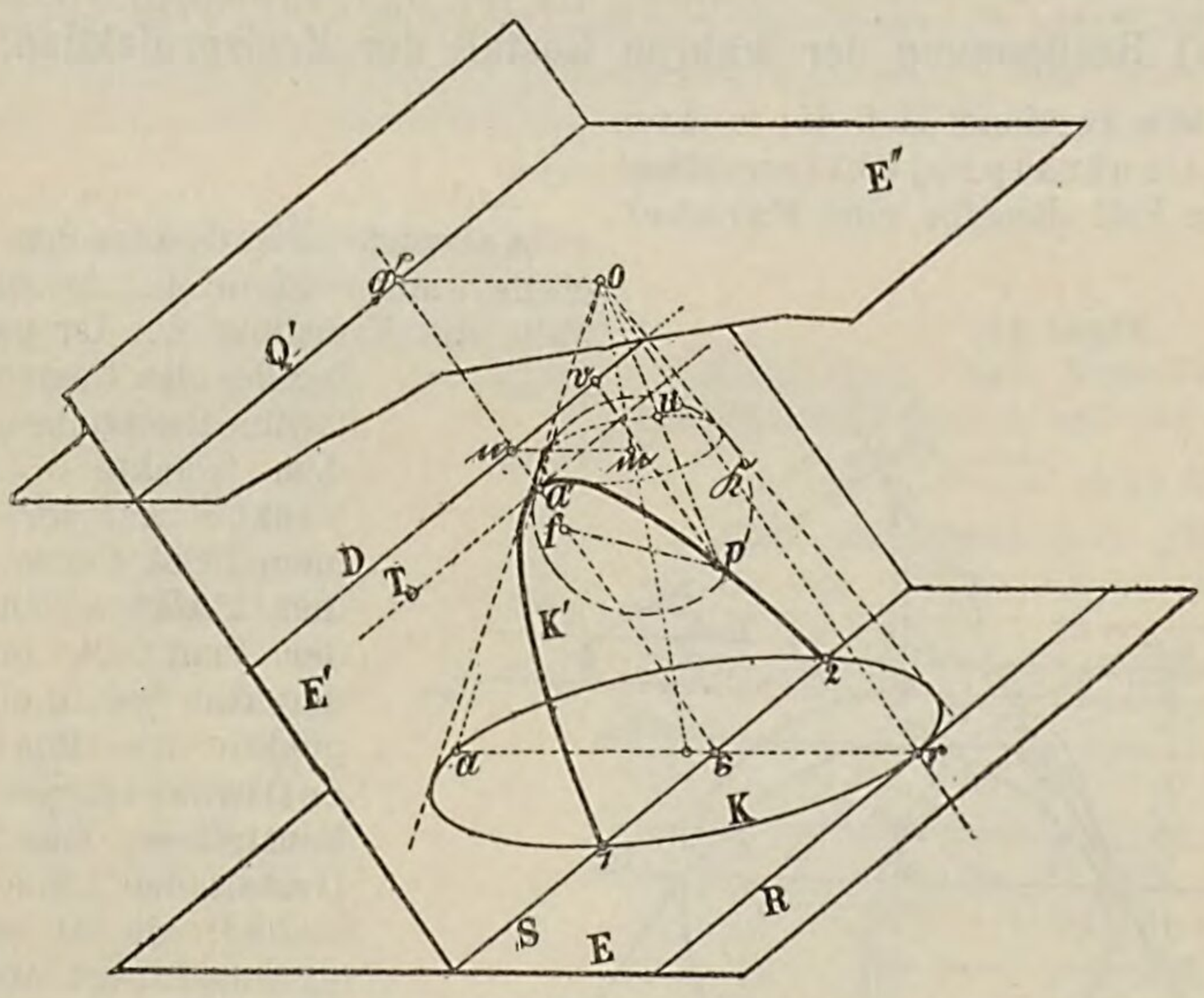
Dem Punkte r entspricht der unendlich ferne Punkt r', d. i. der zweite Endpunkt der Achse. Der Tangente R entspricht die unendlich ferne Gerade der Parabelebene und diese Linie muss demnach eine Parabeltangente sein. Die Parabel besitzt also eine unendlich ferne Tangente.

Bei der Ellipse und Hyperbel entsprach dem Punkte r als Pol der Gegen-

achse der Mittelpunkt der fraglichen Kurve.

Bei der Parabel fallen nun Pol und Polare zusammen, die Punkte r und a bilden also vier harmonische Punkte, von welchen drei zusammenfallen, es bilden demnach auch die Punkte a' und r' vier harmonische Punkte, von welchen gleichfalls drei in unendlicher Ferne zusammenfallen. Die Parabel ist folglich eine Kurve mit einem unendlich fernen Mittelpunkt. Jeder durch r gehenden Kreissehne entspricht eine zur Parabelachse parallele unendlich grosse Parabelsehne, die, weil durch den unendlich fernen Punkt r' gehend, ein Durchmesser der Parabel genannt werden kann.

Figur 48.



b) Eigenschaften der Parabel, Brennpunkte, verschiedene Erzeugungsarten der Kurve, Beziehungen zwischen ihren Tangenten und Normalen.

Frage 33. Welche Eigenschaften leiten sich für die Parabel als Centralprojektion eines Kreises unter der Annahme eines Centrums wie in Fig. 48 ab?

Antwort. In dem projizierenden Kegel, siehe Figur 48, ist in diesem Falle nur eine den Kegel und die Parabelebene in dem Punkte f berührende Kugel $\mathfrak{K}$ vorhanden.

Für einen beliebigen Parabelpunkt p entnimmt man, wenn man wieder die Strahlen $\overline{pf}$ und $\overline{po}$ zieht, die Beziehung $\overline{pf} = \overline{pu}$; $\overline{pf}$ und $\overline{pu}$ sind als Tangenten von einem Punkte p an die Kugel $\mathfrak{K}$ einander gleich.

Die Kugel $\mathfrak{K}$ berührt nun den projizierenden Kegel nach einem Kreise, dessen Ebene die Parabelebene nach einer Geraden D schneidet und man erkennt leicht, dass, wenn man von p die Senkrechte pv auf D fällt, die Strecke $\overline{pv}$ gleich $\overline{pu}$, also gleich $\overline{pf}$ sein muss.

Für jeden Parabelpunkt gilt also die Beziehung $\overline{pv} = \overline{pf}$, welche als Satz wie folgt ausgesprochen werden kann:

„Auf der Parabelachse gibt es einen festen Punkt f von der Beschaffenheit, dass alle Parabelpunkte von diesem Punkte f sowie von einer zur Parabelachse senkrecht stehenden Geraden D gleiche Entfernung besitzen.“

Der Punkt f heisst der Brennpunkt, die Gerade D die Direktrix oder die Leitlinie der Parabel.

Man kann demnach für die Parabel folgendes Erzeugungsgesetz aussprechen:

„Die Parabel ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem festen Punkte und einer festen Geraden gleiche Entfernung besitzen.“

Frage 34. Welche Konstruktionen folgen aus dem in der Antwort der Frage 33 ausgesprochenen Entstehungsgesetze der Parabel und welche weiteren Eigenschaften leiten sich hieraus ab?

Antwort. Ist, siehe Figur 47, f der gegebene Brennpunkt und D die gegebene Leitlinie, so erhält man beliebige weitere Parabelpunkte, wenn man zur Leitlinie der Parabel in beliebigen Entfernungen von D Parallele zieht und mit deren Entfernungen von D als Halbmesser um den Brennpunkt f Kreise beschreibt. Diese Kreise treffen dann die zugehörigen Parallelen in Parabelpunkten. Denn, ist z. B. pq eine solche Parallele, so ist p der auf ihr liegende Parabelpunkt. Denn es ist ja $\overline{pe}$, d. i. die Senkrechte durch p zu D gleich $\overline{pf}$.

Eine andere Konstruktion, gleichfalls auf der Beziehung $\overline{pf} = \overline{pe}$ beruhend, ergibt sich, wenn man vom Brennpunkt f nach beliebigen Punkten $e \cdots$ von D Gerade zieht, die Strecken $\overline{ef}$ durch Senkrechte halbiert und diese Halbierungssenkrechten zum Schnitt bringt mit den Senkrechten durch e zu D. Denn es ist ja auch in diesem Falle $\overline{pe} = \overline{pf}$.

Aus der letztgenannten Konstruktion folgt aber ein weiteres Entstehungsgesetz für die Parabel, nämlich:

„Die Parabel ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen festen Punkt f gehen und eine feste Gerade D berühren."

Die zuletzt angegebene Konstruktion liefert wieder die Parabeltangente und zwar in der Linie pg, d. h. in der Senkrechten zu pe. Da nun das Dreieck pfe gleichschenklig ist, so ist der Winkel $e\hat{p}f$ durch die Tangente gehälftet, was sich als Satz so aussprechen lässt:

„Die Parabeltangente bildet mit dem durch den Berührpunkt gezogenen Brennstrahle und mit der Parallelen zur Achse gleiche Winkel, desgleichen auch die Parabelnormale."

Ausserdem ergeben sich aus der Figur 47 unmittelbar noch die folgenden Eigenschaften. Ist t der Schnitt der Tangente T mit der Parabelachse, so bilden die vier Punkte f, p, e und D die Ecken eines Rhombus, daher ist die Strecke $\overline{pt}$ der Tangente in dem Punkt g gehälftet. Dann läuft die Verbindungslinie ga' parallel zu D. Diese Linie ist somit Tangente in dem Punkte a', man nennt sie die Scheiteltangente. Es ergeben sich folgende Sätze:

„Das Stück einer Parabeltangente, das zwischen Berührpunkt und Achse liegt, wird durch die Scheiteltangente gehälftet."

„Die in den Schnittpunkten der Parabeltangenten mit der Scheiteltangente errichteten Senkrechten gehen durch den Brennpunkt der Parabel."

Oder anders ausgedrückt:

„Fällt man von dem Brennpunkte der Parabel Senkrechte auf die Parabeltangenten, so liegen deren Fusspunkte auf der Scheiteltangente."

Anmerkung 7. Da die zweite Kugel $\mathfrak{K}'$ bei der Lage der Ebene E', wie in Figur 48, offenbar ganz ins Unendliche fällt, so kann man die Parabel auch als Ellipse betrachten, von welcher der Mittelpunkt und der zweite Brennpunkt in unendliche Ferne gerückt ist. Die Parabel ist also ein spezieller Fall der Ellipse und besitzt gewissermassen noch einen zweiten unendlich fernen Brennpunkt. Sämtliche für die Ellipse aufgestellten Sätze bezüglich ihrer Tangenten, Brennstrahlen, haben auch für die Parabel Gültigkeit. Man erkennt aber aus dem Bisherigen für alle drei Arten von Kegelschnitten folgendes gleiche und gemeinsame Entstehungsgesetz:

„Ein Kegelschnitt ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen festen Punkt gehen und einen festen Kreis berühren."

Für die Parabel geht der Kreis in eine Gerade D, die Leitlinie über.

„Ein Kegelschnitt ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem festen Punkte und einer festen Geraden ein Abstandsverhältnis von konstanter Grösse besitzen."

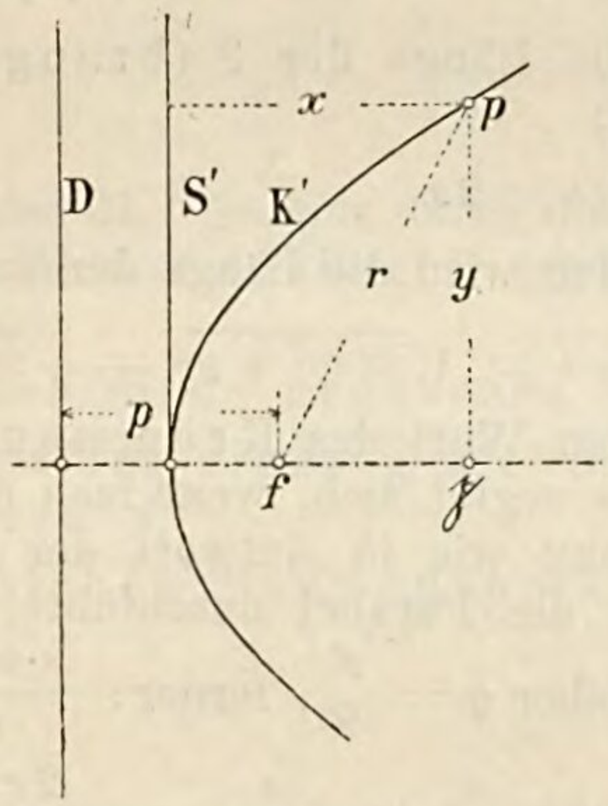
Je nachdem der Wert dieser Verhältnisse $\lessgtr$ 1 ist, erhält man Ellipse, Parabel oder Hyperbel als Ortskegelschnitt.

---

c) Scheitelgleichung der Parabel, Länge der Tangente, Subtangente, Normalen, Subnormalen, Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt.

Frage 35. Was versteht man unter der Scheitelgleichung der Parabel?

Figur 49.



Antwort. Wegen der unendlich fernen Lage des Parabelmittelpunktes kann man die Parabelpunkte nicht auf ein Achsenkreuz beziehen, dessen Schnittpunkt in den genannten Mittelpunkt fällt. Man wählt vielmehr ein Koordinatensystem, dessen Achsen beziehungsweise mit der Parabelachse und mit der Scheiteltangente zusammenfallen, und bezieht hierauf die Parabelpunkte durch Senkrechte zu diesen Achsen. Man erhält dann, unter der Voraussetzung, dass die Entfernung des Brennpunktes f von der Direktrix D bekannt ist, welche Länge in der Regel mit p bezeichnet wird, zwischen den Koordinaten x und y eines Punktes und der Länge p eine durch eine Gleichung ausgedrückte Beziehung, welche die Scheitelgleichung der Parabel heisst.

Frage 36. Wie lautet die Scheitelgleichung der Parabel und wie lässt sich dieselbe aus den vorhin kennen gelernten Entstehungsgesetzen der Kurve ableiten?

Erkl. 36. Setzt man in Gleichung 72) für $x = \frac{p}{2}$, so geht sie über in:

$$y = \frac{\sqrt{2p \cdot p}}{2} = p$$

Die im Brennpunkte zur Achse errichtete senkrechte Sehne nennt man aber den Parameter der Kurve, siehe Erkl. 21. Bei der Parabel ist also die Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie gleich dem halben Parameter.

Antwort. Bezeichnen x und y die Koordinaten eines Punktes p, ist r der zugehörige Brennstrahl und p die Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie D, so hat man:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

oder:

$$2y^2 = 2px$$

oder:

$$72) \ldots y = \sqrt{2px}$$

als Scheitelgleichung der Parabel.

Frage 37. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Längen der Tangente, Subtangente, Normalen und Subnormalen und des Krümmungshalbmessers eines Parabelpunktes?

Antwort. Für die Parabel gestalten sich die Ausdrücke für die Längen der Tangente, Subtangente, Normalen, Subnormalen, sowie des Krümmungshalbmessers eines Kurvenpunktes besonders einfach.

Man erkennt in Figur 47 die Aehnlichkeit der Dreiecke pqu und $ga'f$. Daher ist, weil $\overline{pq} = 2\overline{ga'}$ ist, auch $\overline{uq} = 2\overline{fa'} = p$, d. h. als Satz:

„Die Subnormale ist für jeden Parabelpunkt von konstanter Grösse nämlich gleich dem halben Parameter."

Für die Länge der Normalen erhält man:

73) . . . $$\overline{up} = \sqrt{uq^2 + pq^2} = \sqrt{p^2 + y^2} = \sqrt{p^2 + 2px}$$

Für die Länge der Subtangente ergibt sich:

74) . . . $$\overline{qt} = 2x$$

Aehnlich wird die Länge der Tangente:

75) . . . $$\overline{pt} = \sqrt{(2x)^2 + y^2} = \sqrt{4x^2 + 2px}$$

Für den Wert des Krümmungshalbmessers ergibt sich, wenn man die gleiche Betrachtung wie in Antwort der Frage 23 auch für die Parabel durchführt, zunächst $\delta_1 = 0$, daher $\varphi = \frac{\delta}{2}$, ferner: $\frac{s \cdot \cos w}{r} = \delta$

76) . . . $$\varrho = \frac{s}{\varphi} = \frac{s}{\frac{s \cdot \cos w}{2r}} = \frac{2r}{\cos w} = \frac{2\overline{pf}}{\cos w}$$

Die Strecke $\frac{\overline{pf}}{\cos w}$ ist aber nichts anderes als das Stück der Normalen N, das zwischen ihrem Fusspunkt p und dem Schnittpunkt mit der Leitlinie D liegt. Man erhält also folgenden Satz:

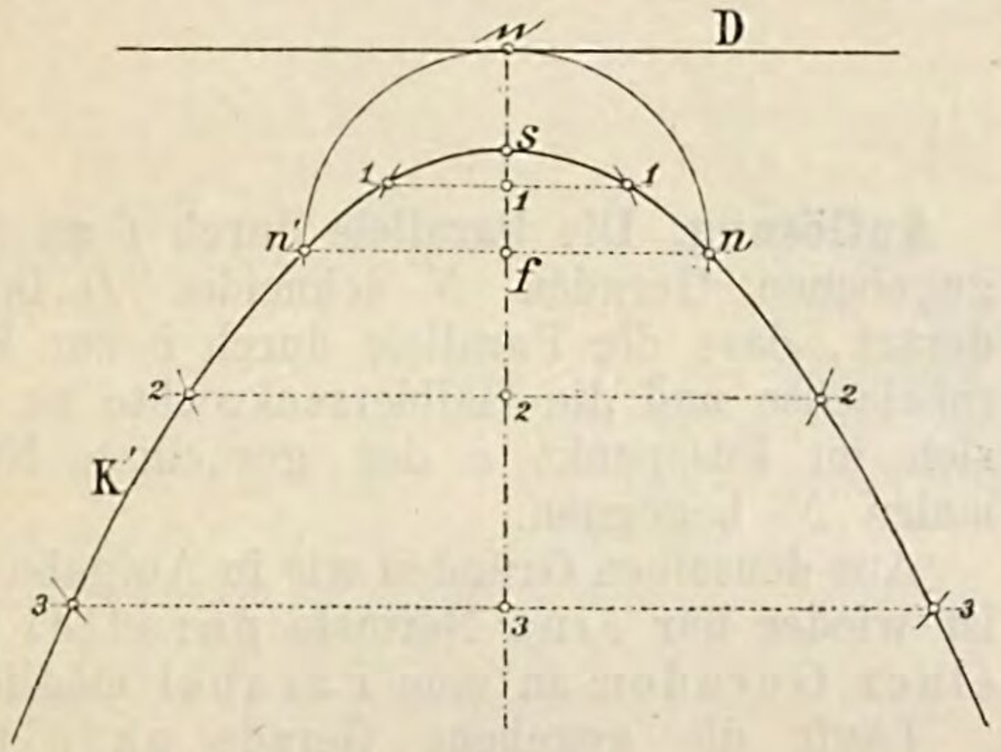
„Der Krümmungshalbmesser für einen beliebigen Parabelpunkt ist doppelt so gross als das Stück der Normalen, das zwischen ihrem Fusspunkt und ihrem Schnittpunkt mit der Leitlinie liegt.".

Für den Scheitel wird die Länge des Krümmungshalbmessers gleich p, d. h. gleich dem halben Parameter.

d) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 30. Es ist ein Punkt f und eine Gerade D gegeben. Man soll den geometrischen Ort für alle Punkte konstruieren, welche von f und D gleich weit abstehen.

Figur 50.



Auflösung. Der gesuchte Ort ist eine Parabel mit dem Punkte f als Brennpunkt und der Geraden D als Leitlinie.

Die Senkrechte durch f zu D ist die Parabelachse. Um beliebige Parabelpunkte zu erhalten, braucht man nur auf der Achse Punkte 1, 2, 3 ···· beliebig zu wählen, durch dieselben Parallele zu D zu ziehen und diese mit Kreisen aus dem Mittelpunkte f und den Halbmessern gleich den Entfernungen der genannten Parallelen von D zu durchschneiden. Die Schnittpunkte 1, 2, 3 ··· sind Parabelpunkte.

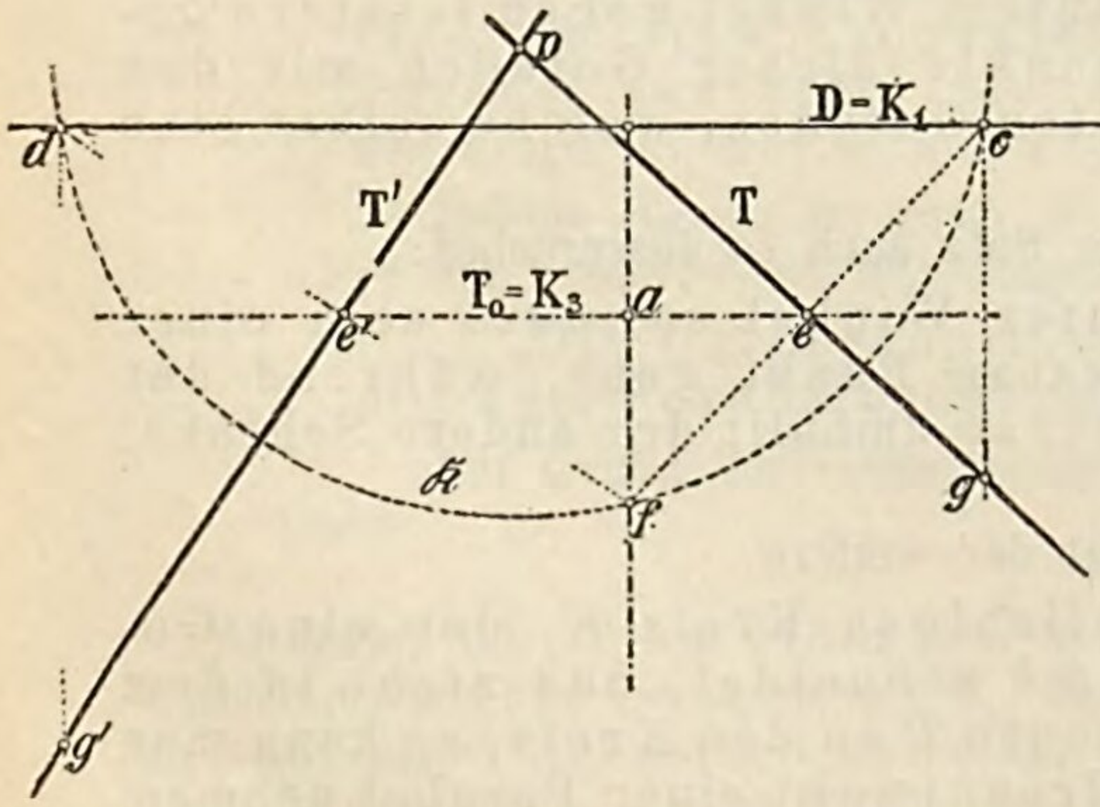
Macht man insbesondere auf der den Brennpunkt f enthaltenden Parallelen zur Leitlinie die Strecke $\overline{fn} = \overline{fn'} = \overline{f\mathfrak{n}}$, so sind n und n' ebenfalls Parabelpunkte und die Endpunkte des Parameters.

Aufgabe 31. An eine durch ihren Brennpunkt f und ihre Leitlinie D gegebene Parabel sollen:

a) durch einen gegebenen Punkt p,
b) parallel einer gegebenen Geraden A,

die möglichen Tangenten konstruiert werden.

Figur 51.



Auflösung a. Die Konstruktion vereinfacht sich bei der Parabel insoferne, als der Kreis K_1 in die Leitlinie D übergeht, dieselbe durchschneidet den Kreis $\mathfrak{K}$, der den Punkt p als Mittelpunkt besitzt und durch f geht in zweien Punkten c und d. Die gesuchten Tangenten stehen nun senkrecht zu den Verbindungslinien cf und df; ihre Berührpunkte g und g' liegen auf den Strahlen durch c und d nach dem zweiten Brennpunkt der Parabel, d. h. auf den Parallelen zur Parabelachse.

Da der Kreis $\mathfrak{K}$ die Gerade D im allgemeinen in zweien Punkten c und d trifft, so sind von einem Punkte p an eine Parabel im allgemeinen zwei Tangenten möglich.

In welchem Falle ist nur eine oder gar keine Tangente vorhanden?

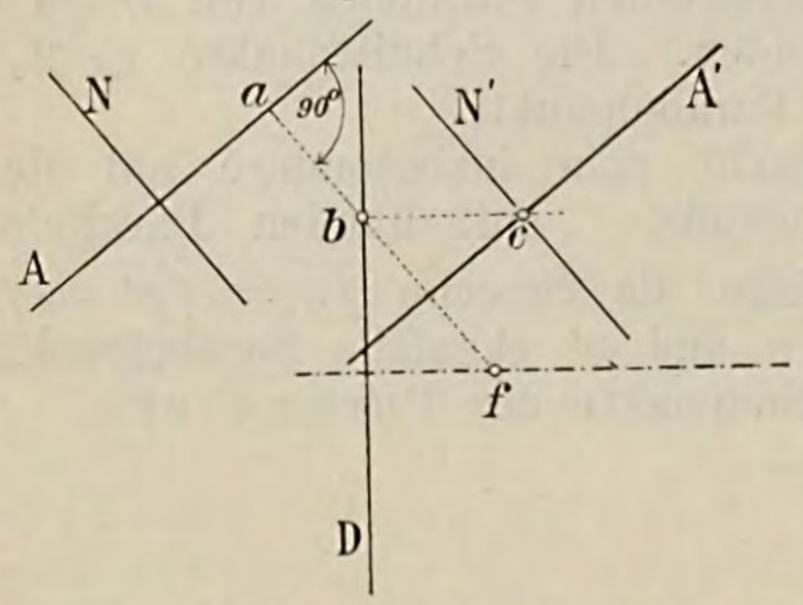
Auflösung b. Sollen parallel einer Geraden A, siehe Figur 52, die möglichen Tangenten an die Parabel gezeichnet werden, so bleibt die Konstruktion dem Wesen nach die nämliche wie im Falle a, nur geht jetzt der Kreis $\mathfrak{K}$ in die zur Geraden A durch den Brennpunkt f gefällte Senkrechte fa über, diese schneidet aber die Leitlinie D nur in einem Punkte b und die Halbiersenkrechte zu bf liefert die gesuchte Parabeltangente.

Parallel zu einer Geraden ist daher an eine Parabel nur eine Tangente vorhanden und auch diese nur, wenn die Gerade nicht parallel zur Parabelachse läuft. Wäre dies der Fall, so würde gar keine Tangente parallel zu einer Geraden an eine Parabel möglich sein.

Wie gestalten sich die in Erkl. 26 angegebenen Konstruktionen für die Parabel?

Aufgabe 32. An eine durch ihren Brennpunkt und ihre Leitlinie D gegebene Parabel sollen parallel zu einer Geraden N die möglichen Normalen konstruiert werden.

Figur 52.



Auflösung. Die Parallele durch f zu der gegebenen Geraden N schneidet D in b derart, dass die Parallele durch b zur Parabelachse und die Halbiersenkrechte zu bf sich im Fusspunkt c der gesuchten Normalen N' begegnen.

Aus denselben Gründen wie in Aufgabe 31 ist wieder nur eine Normale parallel zu einer Geraden an eine Parabel möglich.

Läuft die gegebene Gerade parallel zur Achse, so fällt die gesuchte Normale mit der Parabelachse zusammen.

Anmerkung 8. Denkt man sich in der Fig. 51 die Geraden fp, fg und fg' gezogen, so erkennt man die Gleichheit der Winkel $g'\widehat{p}f$ und $f\widehat{g}p$, was sich als Satz so ausdrücken lässt:

„Zieht man von dem Brennpunkt einer Parabel nach dem Schnittpunkt einer festen und einer beweglichen Tangente, so bildet diese Verbindungslinie mit der letzteren Tangente einen Winkel von konstanter Grösse."

Oder:

„Zieht man von einem Brennpunkt nach sämtlichen Parabeltangenten Gerade unter konstantem Winkel gegen letztere geneigt, so liegen die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Parabeltangenten auf einer festen Geraden, welche selbst eine Parabeltangente bildet."

Mit anderen Worten lässt sich dieser Satz auch so aussprechen:

„Bewegt sich ein konstanter Winkel so, dass sein einer Schenkel stets durch einen festen Punkt geht, während der Scheitel eine Gerade durchläuft, so umhüllt der andere Schenkel eine Parabel."

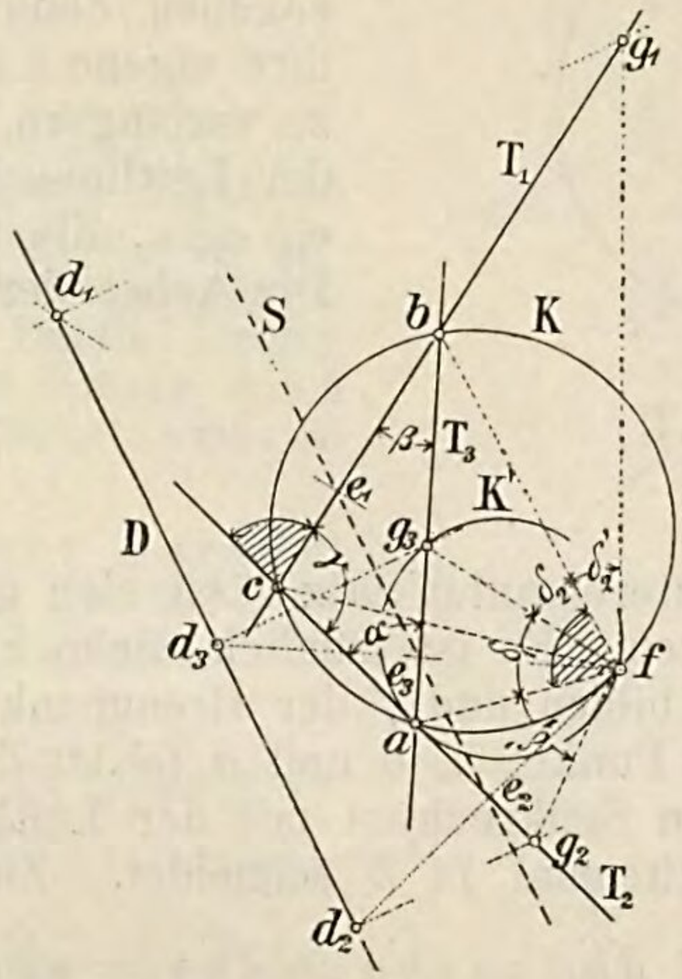
Aus den eben genannten Sätzen folgt der weitere:

„Beschreibt man einen beliebigen Kreis K, der eine Gerade T in zweien Punkten a und b schneidet, und zieht in dem einen Schnittpunkt b eine Tangente T an den Kreis, so kann man jeden Punkt c des Kreises als Brennpunkt einer Parabel nehmen, der die beiden Geraden T und T' zu Tangenten hat, von welchen die eine T die Parabel im Punkte b berührt."

Die Gleichheit der Winkel $g'\widehat{p}f$ und $f\widehat{g}p$, siehe Figur 51, bedingt auch jene der Winkel $p\widehat{f}g$ und des Nebenwinkels von $T\widehat{T}'$, d. h. als Satz:

„Das Stück einer Parabeltangente, das zwischen ihrem Berührpunkt und ihrem Schnittpunkt mit einer anderen Tangente liegt, erscheint von dem Brennpunkt aus unter einem Winkel, welcher den Tangentenwinkel zu 180^0 ergänzt.“

Figur 53.



Nimmt man zu zweien Parabeltangenten T_1 und T_2, siehe Figur 53, mit den Berührpunkten g_1 und q_2 noch eine dritte T_3 mit dem Berührpunkt g_3 hinzu, so erhält man ein der Parabel umbeschriebenes Dreiseit, für welches sich, wenn f den Brennpunkt der Parabel bezeichnet, folgende Winkelbeziehungen ableiten:

Es ist:

$$\delta_1 = \delta_1' = \alpha$$
$$\delta_2 = \delta_2' = \beta$$

folglich auch:

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_1' + \delta_2' = \alpha + \beta = 180^0 - \gamma = \text{konstant}$$

oder:

$$\delta_1 + \delta_2 + \gamma = \delta_1' + \delta_2' + \gamma = 180^0$$

Aus dieser Beziehung folgen die Sätze:

„Das zwischen zweien festen Tangenten liegende Stück einer dritten Tangente erscheint von dem Brennpunkt der Parabel aus unter einem konstanten Winkel, siehe auch Antwort der Frage 25, der den Tangentenwinkel zu 180^0 ergänzt.“

Infolge dessen ist nach einem bekannten planimetrischen Satze das Viereck $abcf$ ein Kreisviereck, also folgender Satz gültig:

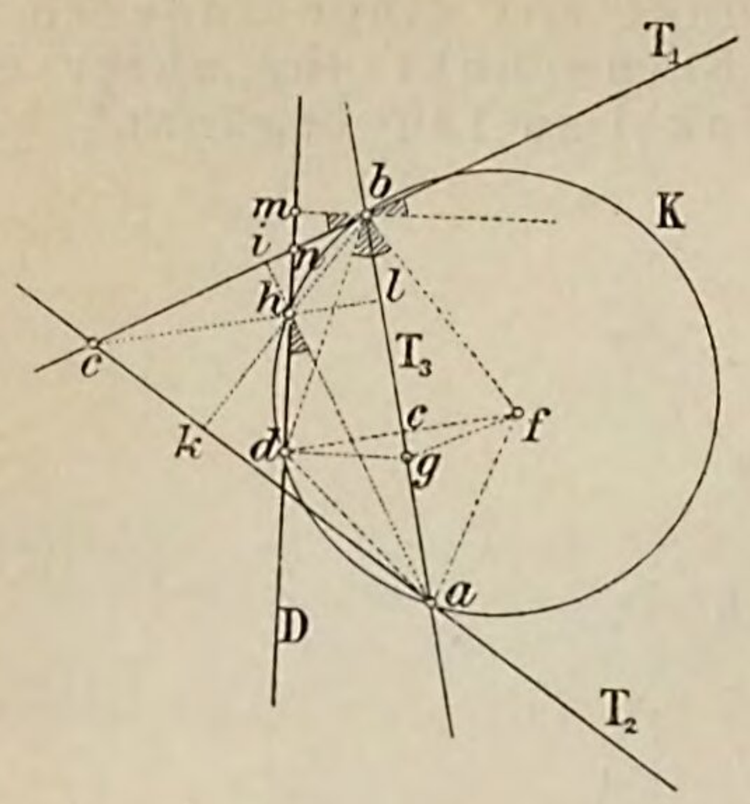
„Die Durchschnittspunkte dreier Parabeltangenten liegen mit dem Parabelbrennpunkt auf einem Kreise.“

Auf Grund der vorangegangenen Sätze kann man nunmehr folgende Aufgabe lösen.

Aufgabe 33. Von einer Parabel kennt man drei Tangenten T_1, T_2, T_3 und auf einer derselben, etwa T_3, den Berührpunkt g_3. Gesucht ist der Brennpunkt, die Achse und die Leitlinie der Parabel.

Auflösung. Sind T_1, T_2, T_3, s. Figur 53, die drei gegebenen Tangenten, so ist der geometrische Ort für den Parabelbrennpunkt der dem Dreieck abc umbeschriebene Kreis K, ein zweiter Ort dagegen der über der Strecke

Figur 54.



$\overline{g_3 e_3}$ als Sehne beschriebene Kreis K', der einen Peripheriewinkel gleich dem Winkel α fasst. Der Schnittpunkt f der Kreise K und K' liefert den gesuchten Brennpunkt f der Parabel.

Die zu den Tangenten T_1, T_2, T_3 gezogenen Senkrechten fe_1, fe_2, fe_3 sind um ihre eigene Länge nach d_1, d_2 und d_3 bezw. zu verlängern, dann sind g_1, g_2 und g_3 Punkte der Leitlinie D, während durch die Punkte e_1, e_2, e_3 die Scheiteltangente hindurchgeht. Die Achse der Parabel steht senkrecht zu D.

Anmerkung 9. Ein weiterer interessanter Satz lässt sich gleichfalls aus schon bekannten Winkelgleichheiten ableiten. Es ist nämlich, siehe Figur 54, wenn abc die Ecken eines Tangentendreiecks bilden und f der Brennpunkt, D die Leitlinie der Parabel sein soll, durch die drei Punkte a, b und d (d ist der Schnittpunkt der von f auf die Tangente T gefällten Senkrechten mit der Leitlinie D) ein Kreis gelegt, der die Leitlinie D zum zweitenmal in h schneidet. Zieht man ha, so erkennt man die Gleichheit der Winkel $d\hat{h}a = i\hat{h}n = d\hat{b}a = a\hat{b}f = m\hat{b}c$ (mb senkrecht zu D).

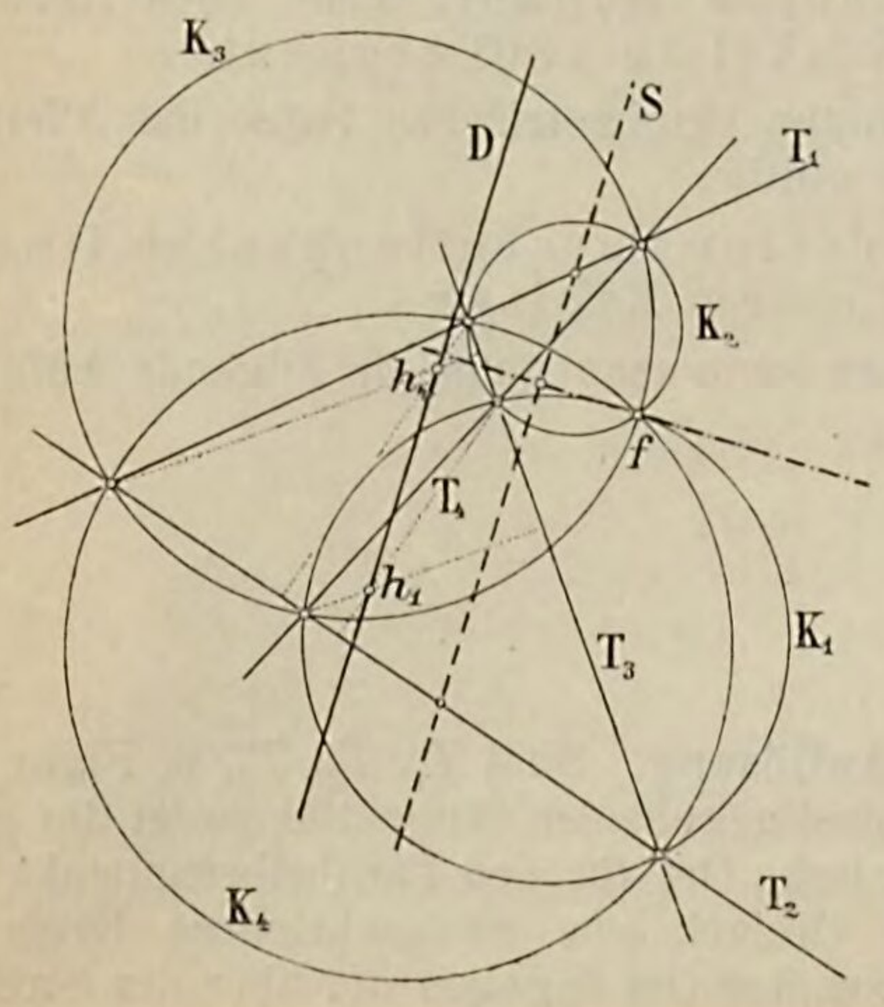
Die Dreiecke ihn und mbn sind also ähnlich und daher ist $n\hat{i}h = n\hat{m}b = 90^0$, d. h. die Linie ah steht senkrecht auf bc.

In gleicher Weise lässt sich auch beweisen, dass bh senkrecht auf ac steht, dass also h den Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks abc darstellt, daher folgender Satz:

„Der Höhenschnittpunkt des Tangentendreiecks einer Parabel liegt auf der Leitlinie D."

Aufgabe 34. Von einer Parabel kennt man vier Tangenten; gesucht ist der Brennpunkt, die Leitlinie und die Achse der Parabel.

Figur 55.



Auflösung. Die vier Tangenten T_1, T_2, T_3 und T_4 bestimmen durch ihre Schnittpunkte vier Tangentendreiecke und damit vier Kreise K_1, K_2, K_3 und K_4, die sich in dem Brennpunkt f der Parabel schneiden. Die Höhenschnitte der genannten vier Dreiecke gehören der Leitlinie D der Parabel an.

Wie erhält man die Scheiteltangente S und wie hätte sich mittels derselben noch in anderer Weise die Leitlinie D bestimmen lassen?

Erkl. 37. Sind, siehe Figur 56, ac, $a'c$, bc', $b'c'$ vier Parabeltangenten, die sich auf der Achse schneiden, und ist $d'd$ die Scheiteltangente, so folgt aus der Figur direkt die Gleichheit der Strecken $\overline{gd}$, $\overline{g'd'}$, $\overline{de}$, $\overline{d'e'}$ und hieraus die Verhältnisgleichheit:

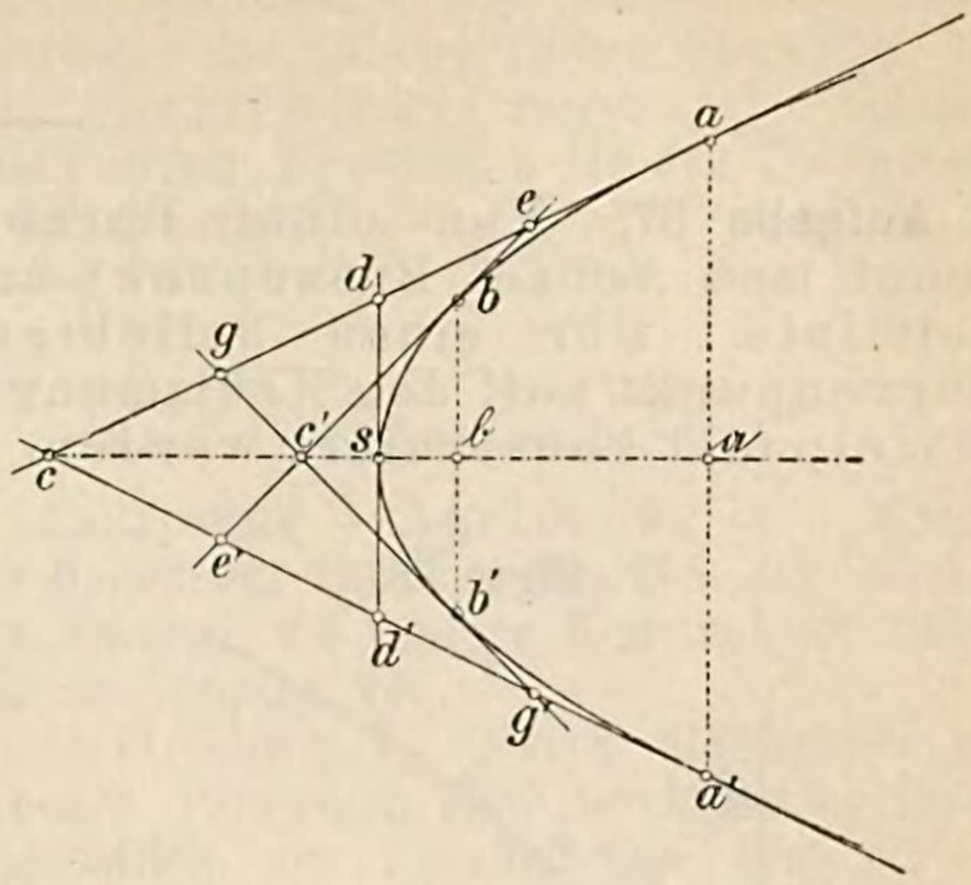
$$\frac{\overline{de}}{\overline{dg}} = \frac{\overline{d'e'}}{\overline{d'g'}}$$

Projiziert man nun die ganze Figur 56 parallel zu irgend einer Richtung in eine beliebige Ebene, so werden die Geraden ac, $a'c$, bc', $b'c'$ stets Tangenten an einer Parabel bleiben und da das Teilverhältnis einer Strecke durch eine Parallelprojektion nicht geändert wird, so gilt der Satz:

„Die Tangenten einer Parabel treffen irgend zwei feste Parabeltangenten in ähnlichen Punktreihen."

Hieraus ergibt sich aber die in Aufgabe 35 durchgeführte Parabelkonstruktion.

Figur 56.



Aufgabe 35. Es sind, siehe Figur 57, zwei Parabeltangenten mit ihren Berührpunkten gegeben. Man soll beliebig viele weitere Parabeltangenten konstruieren.

Erkl. 38. Aus der Scheitelgleichung der Parabel lässt sich noch eine weitere Parabelkonstruktion ableiten, die mit Vorteil angewandt werden kann, wenn man von der Kurve den Scheitel, die Achse und einen Punkt kennt.

Sind nämlich a und b zwei Parabelpunkte und $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ die zugehörigen Koordinaten, so gelten die Beziehungen:

$$y_1^2 = 2px_1$$
$$y_2^2 = 2px_2$$

oder:

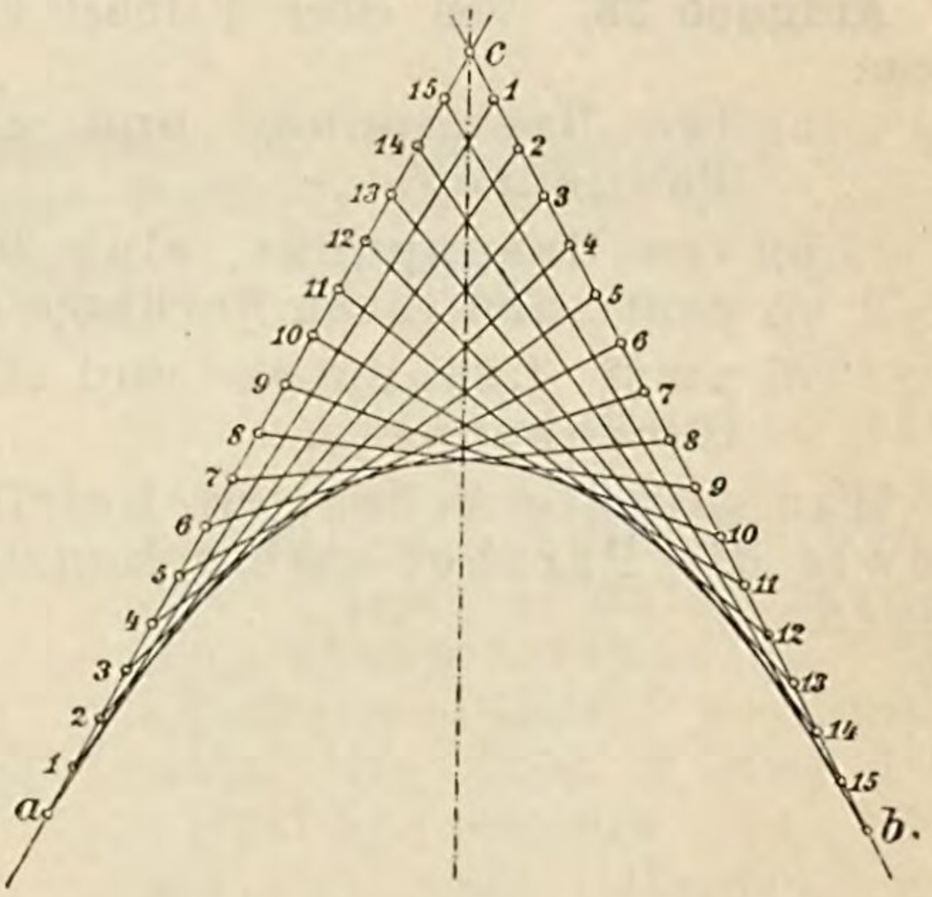
$$y_1^2 : y_2^2 = x_1 : x_2$$

$$77) \ldots y_1 : y_2 = \sqrt{x_1} : \sqrt{x_2}$$

Aus dieser Beziehung folgt aber die in Auflösung der Aufgabe 36 angegebene Konstruktion der Parabel.

Auflösung. Man teile die Strecken $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ in dieselbe Anzahl gleicher Teile und bezeichne die Teilpunkte, wie die Figur 57 dies zeigt; die Verbindungslinien gleich bezeichneter Teilpunkte sind Parabeltangenten.

Figur 57.



Aufgabe 36. Von einer Parabel kennt man: den **Scheitel**, die **Achse**, sowie einen **Punkt**. Man soll beliebig viele weitere Parabelpunkte konstruieren.

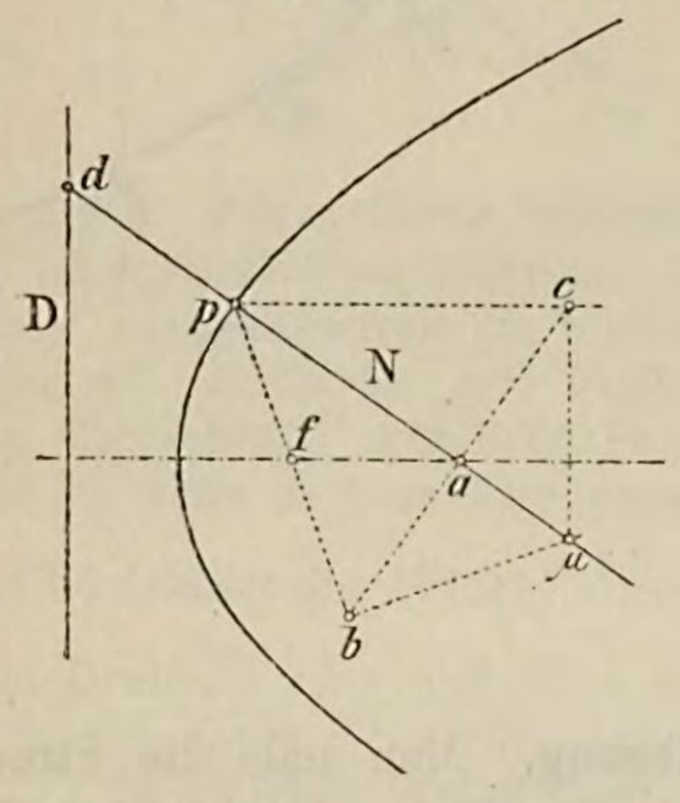
Auflösung. Man teile y-Koordinate des Punktes a in n gleiche Teile. Die x-Koordinate dagegen in n^2 gleiche Teile.

Die Parallelen zur Parabelachse durch die erstgenannten Teilpunkte und die Senk-

rechte zur Achse durch den Teilpunkt auf letzterer liefern durch ihre gegenseitigen Schnitte Parabelpunkte.

Aufgabe 37. Von einer Parabel kennt man Achse, Brennpunkt und Leitlinie. Für einen beliebigen Kurvenpunkt soll der Krümmungsmittelpunkt konstruiert werden.

Figur 58.



Auflösung. In Rücksicht auf die Beziehung 76) erhält man den Krümmungsmittelpunkt μ durch Abtragung des von der Achse und der Leitlinie D begrenzten Stückes $\overline{ad}$ der Normalen N nach $\overline{p\mu}$. Es lassen sich aber auch die für die Ellipse, siehe Aufgabe 19, angegebenen Konstruktionen in gleicher Weise für die Parabel durchführen.

Zieht man demnach, siehe Figur 58, den Brennstrahl pf sowie die Linien ab senkrecht zu N und $b\mu$ senkrecht zu pf, so schneidet $b\mu$ auf N den Krümmungsmittelpunkt μ aus. Ohne Benützung des Brennpunktes f erhält man den Krümmungsmittelpunkt μ durch Ziehen der Parallelen pc zur Achse, welche von der Senkrechten zu N durch a in c getroffen wird; die zur Achse gezogene Senkrechte $c\mu$ schneidet die Normale N gleichfalls im Krümmungsmittelpunkt μ.

---

e) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 38. Von einer Parabel kennt man:

a) den Brennpunkt und zwei Tangenten,

b) den Brennpunkt, eine Tangente und ihren Berührpunkt,

c) zwei Tangenten und ihre Berührpunkte.

Man soll die Achse, die Leitlinie sowie die Parabel selbst konstruieren.

Andeutung. Auflösung a. Die Senkrechten vom Brennpunkt auf die gegebenen Tangenten bestimmen zwei Punkte der Scheiteltangente und damit auch die Achse der Parabel. Kennt man aber Scheitel, Achse und Brennpunkt, so ist dadurch auch die Leitlinie gegeben.

Auflösung b. Der nach dem Berührpunkt der Tangente gezogene Brennstrahl bestimmt mit der Tangente den gleichen Winkel, wie die Achsenrichtung. Letztere ist somit bestimmbar. Ausserdem erhält man in dem Fusspunkte der vom Brennpunkte auf die Tangente gefällten Senkrechten einen Punkt der Scheiteltangente.

Auflösung c. Man bestimme den Brennpunkt auf Grund des in Anmerkung 10 zuletzt genannten Satzes, indem man über dem zwischen Berührpunkt und Schnittpunkt

beider Tangenten gelegenen Stücke Kreisbögen beschreibt, welche den Supplementswinkel des Tangentenwinkels als Peripheriewinkel fassen. Der Schnittpunkt dieser Kreisbögen ist der Parabelbrennpunkt.

Aufgabe 39. Von einer Parabel sind gegeben:

a) die Achse und zwei Punkte,
b) die Achse und zwei Tangenten.

Man soll die Parabel konstruieren.

Andeutung. Auflösung a. Mittels der Beziehung 77) bestimmt sich der Scheitel der Parabel, die weitere Konstruktion bleibt wie in Aufgabe 36.

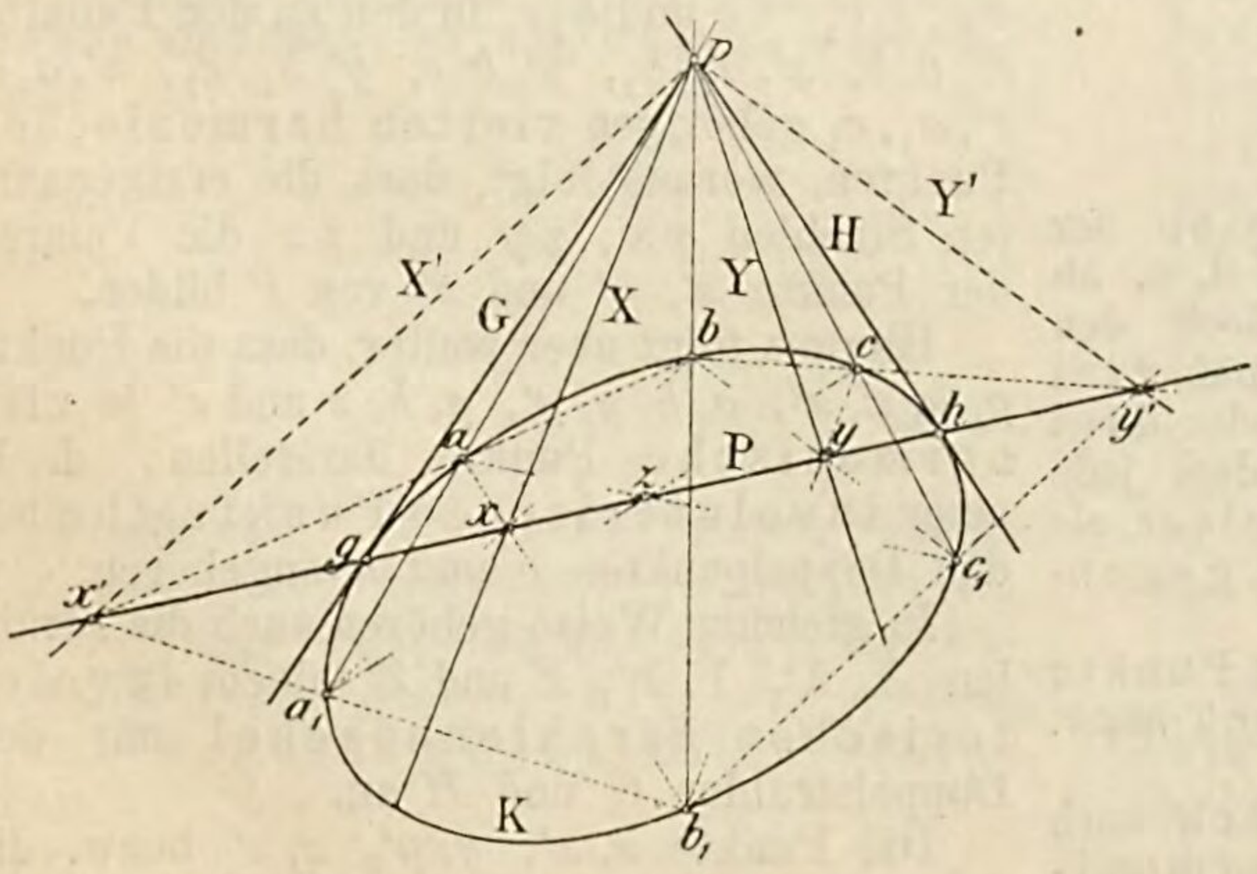
Auflösung b. Durch die beiden gegebenen Tangenten sind durch die zu ihnen hinsichtlich der Parabelachse symmetrisch liegenden Tangenten und damit vier Tangentendreiecke bestimmt, deren umbeschriebene Kreise den Parabelbrennpunkt enthalten.

E. Ueber einige projektive Eigenschaften der Kegelschnitte.

a) Beziehungen zwischen Pol und Polare, conjugierte Pole und Polaren, die zu einem Kegelschnitt gehörigen Punkt-, bezw. Strahleninvolutionen, Konstruktion conjugierter Punkt-, bezw.- Strahlenpaare einer Involution, Involutionen mit gemeinsamem Träger, bezw. Mittelpunkt, besondere Centralcollineation zwischen Kreis- und Kegelschnitt.

Frage 38. Welche Beziehungen bestehen hinsichtlich der gegenseitigen Lage von Pol und Polare eines Kegelschnittes im allgemeinen.

Figur 59.



Antwort. Ist, siehe Figur 59, p ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes K, so gehört zu dem Punkte p eine Gerade P als Polare, d. i. die Verbindungslinie der vierten harmonischen Punkte hinsichtlich des Punktes p und der Schnittpunkte sämtlicher den Punkt p enthaltenden Kegelschnittsekanten. Man erhält diese Polare P konstruktiv, indem man durch p etwa drei beliebige Sekanten paa_1, pbb_1 und pcc_1 zieht. Hierdurch entstehen drei dem Kegelschnitt einbeschriebene Vierecke abb_1a_1, bcc_1b_1, $accc_1a_1$, für welche die in Erkl. 126, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, III. Teil. 1. Hälfte angeführten Sätze Gültigkeit haben, d. h. es treffen die Diagonalen xx', yy', zz' die Gegenseitenpaare aa_1, bb_1 und cc_1 in den hinsichtlich des Punktes p zu

Erkl. 39. Ist eine Gerade P als Polare für einen Kegelschnitt K gegeben, so wähle man zur Bestimmung des Poles p von P auf letzterer Linie einen Punkt x ganz willkürlich und ziehe durch ihn zwei beliebige Kegelschnittsehnen ab_1 und a_1b, so schneiden sich die Verbindungslinien aa_1 und bb_1 ihrer Endpunkte im Pole p von P.

den Schnittpunkten aa_1, bb_1 cc_1 conjugierten vierten harmonischen Punkten. Die Geraden xx', yy' und zz' fallen daher in eine Gerade zusammen und zwar in die Polare P des Punktes p hinsichtlich des Kegelschnittes K. In Rücksicht auf die möglichen Lagen von vier harmonischen Punkten lässt sich folgender Satz aussprechen:

„Liegt ein Punkt p, als Pol genommen, ausserhalb eines Kegelschnittes, so schneidet die zu p gehörige Polare P den Kegelschnitt in zweien Punkten, den Berührpunkten der von p an den Kegelschnitt möglichen Tangenten."

„Liegt der Pol innerhalb eines Kegelschnittes, so liegt die zugehörige Polare des Poles ausserhalb des Kegelschnittes, d. h. sie hat mit dem Kegelschnitt keine Punkte gemein."

Man sagt in diesem Falle, die Schnittpunkte von Kegelschnitt und Polare seien imaginär.

„Fällt endlich der Pol auf die Peripherie des Kegelschnittes, so geht die Polare durch den Pol und ist eine Tangente des Kegelschnittes."

Frage 39. Welche Beziehungen bestehen zwischen den einzelnen durch einen Punkt p gehenden Polaren, bezw. zwischen den auf einer Geraden P liegenden Polen eines Kegelschnittes.

Antwort. Zieht man durch die Punkte x, y, z auf P, s. Figur 59, Strahlen durch p, so schneiden dieselben die Seiten ab, a_1b_1, bc, b_1c_1, ac und a_1c_1 in den zu den Punkten x', a, b, x', a_1, b_1, y', b, c, y', b_1, c_1, z', a, c, z', a_1, c_1 gehörigen vierten harmonischen Punkten, woraus folgt, dass die erstgenannten Strahlen px, py und pz die Polaren der Punkte x', y' und z' von P bilden.

Hieraus folgt aber weiter, dass die Punkte g, h, x, x', g, h, y, y', g, h, z und z' je vier harmonische Punkte darstellen, d. h. einer involutorischen Punktreihe mit den Doppelpunkten g und h angehören.

In gleicher Weise gehören auch die Strahlen X, X', Y, Y', Z und Z' einem involutorischen Strahlenbüschel mit den Doppelstrahlen G und H an.

Die Punkte x, x', y, y', z, z' bezw. die Strahlen X, X', Y, Y', Z und Z' stehen in dem Zusammenhange miteinander, dass jedem der genannten Punkte, als Pol aufgefasst,

Erkl. 40. Nimmt man zu zweien der Punkte x, x' oder y, y' oder z, z', d. h. zu zweien conjugierten Polen noch den dritten Punkt p hinzu, so erhält man drei Punkte als Ecken eines Dreieckes oder drei Seiten eines Dreiseites derart, dass jede Seite des Dreieckes bezw. Dreiseites als Polare genommen, die Polare der gegenüberliegenden Ecke darstellt.

Drei derartig einander zugeordnete Punkte oder Geraden bilden ein Poldreieck bezw. ein Poldreiseit.

Man nennt ein solches Poldreieck auch ein Tripel oder auch Tripol harmonischer Pole, das Poldreiseit aber ein Tripel oder auch ein Tripol harmonischer Polaren.

eine Gerade als Polare entspricht, die den anderen Punkt enthält, oder dass jedem der genannten Strahlen, als Polare genommen, ein Pol entspricht, der auf der anderen Geraden liegt.

Zwei derartig einander zugeordnete Punkte oder Strahlen heissen conjugierte Pole, bezw. conjugierte Polaren des Kegelschnittes.

Frage 40. Welche Sätze folgen aus den in Antwort der Frage 39 gewonnenen Beziehungen?

Erkl. 41. Ist die Gerade P eine Tangente des Kegelschnittes, so sind alle Punkte der Geraden, als Pole genommen, conjugiert zu dem Berührpunkt und man nennt in diesem Falle die Involution der Geraden eine parabolische Involution. Liegt der Punkt p auf dem Kegelschnitt, so sind alle den Punkt p enthaltenden Strahlen, als Polaren genommen, conjugiert zur Tangente in p an den Kegelschnitt und man nennt in diesem Falle die Involution des Punktes eine parabolische Involution.

Erkl. 41a. Liegt ein Kreis oder ein Kegelschnitt centrisch-collinear zu einem zweiten Kegelschnitte, so sind sowohl das Centrum wie die Collineationsachse sich selbst entsprechende Elemente beider Systeme; die zu diesen Elementen gehörigen Involutionen sind daher beiden Kurven gemeinsam.

Frage 41. Wie konstruiert man die zu einer Geraden hinsichtlich eines Kegelschnitts gehörige Punktinvolution, bezw. die zu einem Punkte gehörige Strahleninvolution?

Antwort. Die in Antwort der Frage 39 kennen gelernten Beziehungen zwischen conjugierten Polen und Polaren lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen:

„Jede Gerade P in der Ebene eines Kegelschnittes ist Träger einer involutorischen Punktreihe, d. h. einer Punktinvolution, gebildet aus den auf der Geraden liegenden conjugierten Polen.“

„Die Involution ist gleichlaufend, elliptisch, oder ungleichlaufend, hyperbolisch, je nachdem die Gerade den Kegelschnitt nicht schneidet oder schneidet. Die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt sind die Doppelpunkte der Involution.“

„Jeder Punkt p in der Ebene eines Kegelschnittes ist Mittelpunkt einer Strahleninvolution, gebildet aus den durch den Punkt gehenden conjugierten Polaren.“

„Die Involution ist gleichlaufend, elliptisch, oder ungleichlaufend, hyperbolisch, je nachdem der Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnittes sich befindet. Die von dem Punkte an den Kegelschnitt möglichen Tangenten geben die Doppelstrahlen der Involution.“

Antwort. Erste Konstruktion. Ist P die gegebene Gerade, so verschaffe man sich den zugehörigen Pol p, siehe Frkl. 39. Zieht man durch p eine beliebige Sekante, etwa aa_1, so erhält man den zu einem Punkte x conjugierten Punkt x_1 der

Erkl. 42. Dreht sich der Strahl A um den Punkt p, so liegt der zum Punkte x conjugierte Punkt stets auf der Verbindungslinie af' und es ist, da der Punkt f' seine Lage nicht ändert, der Winkel paf', als Peripheriewinkel über der Sehne pf' von unveränderlicher Grösse.

Erkl. 42a. Auf Grund des eben Gesagten lassen sich in einfacher Weise einige für spätere Konstruktionen sehr wichtige Sätze ableiten.

Zieht man nämlich durch die Endpunkte conjugierter Punktpaare der Involution Strahlen, welche zu den Verbindungslinien dieser Punkte mit dem Punkte f' unter einem konstanten Winkel von beliebiger Grösse geneigt sind, so umhüllen diese Linien eine Parabel und besitzen zugleich auch konstante Neigung zu den durch die conjugierten Punkte der Involution auf P gehenden Strahlen der Involution von p.

Man kann also folgenden Satz aussprechen:

„Dreht sich um einen Punkt p in der Ebene eines Kegelschnittes ein Strahl, und zieht man durch den ihm in jeder Lage zugehörigen Pol einen zu dem beweglichen Strahle unter einem Winkel von konstanter Grösse geneigten Strahl, so umhüllen alle diese Strahlen eine Parabel."

Bemerkenswert sind die Fälle, in welchen der konstante Winkel die Grösse Null oder 90 Grad besitzt.

Im ersten Falle gewinnt man den Satz:

„Dreht sich um einen Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes ein Strahl und zieht man zu ihm durch den in jeder Lage ihm zugehörigen Pol einen Parallelstrahl, so umhüllen alle diese Strahlen eine Parabel, welche die Polare des Punktes p sowie die von p an den Kegelschnitt möglichen Tangenten als Tangenten hat."

Im zweiten Falle heisst der Satz:

„Dreht sich um einen Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes ein Strahl und fällt man in jeder Lage durch den zugehörigen Pol eine Senkrechte zum beweglichen Strahl, so umhüllen alle diese Strahlen eine Parabel."

In allen den angeführten Fällen ist der zu den Punkten g, h und p gehörige vierte harmonische Punkt f' auf dem Hilfskreise der Parabelbrennpunkt.

zu P gehörigen Punktinvolution, indem man die Punkte a und a_1 mit x verbindet und von den zweiten Endpunkten b_1 und b dieser Sehnen nach a_1 und a zieht. Die Verbindungslinien ab und a_1b_1 schneiden sich auf P in dem zum Punkte x conjugierten Punkte x_1. Soll für einen gegebenen Punkt die Strahleninvolution konstruiert werden, so verschaffe man sich die Polare P von p und verfahre in gleicher Weise wie vorhin.

Zweite Konstruktion. Eine andere ebenso einfache Konstruktion, bei welcher der Kegelschnitt nicht gezeichnet vorzuliegen braucht, lässt sich mit Zuhilfenahme eines Kreises ausführen, vorausgesetzt, dass der Punkt ausserhalb des Kegelschnitts liege, bezw. die Gerade den Kegelschnitt schneide.

Ist p der Pol und P die zugehörige Polare, sind ferner g und h die Berührpunkte der von p an den Kegelschnitt möglichen Tangenten, so lege man durch die drei Punkte p, g und h eine Kreislinie und vermittele den Pol p' von P bezüglich des Kreises. Die Gerade pp' schneidet dann die Kreislinie in dem vierten dem Punkte p bezüglich der Punkte g und h harmonisch conjugierten Punkte f'. Ein beliebiger durch p gehender Strahl A schneidet P im Punkte x, die Kreislinie K in einem Punkte a derart, dass die Linie af' die Polare P in dem zu x conjugierten Punkte x_1 schneidet. Zieht man ausserdem noch $p'a$ bis zum Schnitt a' mit K, so geht auch $a'p$ durch x_1.

Anmerkung 10. Ist der Kegelschnitt ein Kreis K, so steht die Polare eines Punktes stets senkrecht zur Mittelpunktssekante des Poles, siehe auch Anmerkung 4. Nimmt man nun zwei conjugierte Punkte auf einer Geraden P,

so liegen die Schnittpunkte ihrer Polaren mit den durch die Punkte x und x_1 gehenden Mittelpunktssekanten auf dem über $\overline{xx_1}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise K_0 und dieser Kreis schneidet den gegebenen Kreis rechtwinklig. Liegt p innerhalb, also P ausserhalb des Kreises, so kann man vom Mittelpunkte m des Kreises K_0 eine Senkrechte zu P fällen, welche P in dem Mittelpunkt q der Punktinvolution auf P, den Kreis K_0 aber in den Punkten u und v so trifft, dass $\overline{qu^2} = \overline{qx} \cdot \overline{qx_1} =$ const. gleich der Länge der Tangente von q an K_0 ist.

Durch die Punkte u und v geht somit eine Schar von Kreisen K_0, welche auf P conjugierte Punktpaare der Involution bestimmen und den Kreis K rechtwinklig schneiden. Jener Kreis, welcher durch q und seinen ihm conjugierten unendlich fernen Punkt q_1 hindurch geht, ist die Gerade mq.

Liegt der Pol p ausserhalb von K, so schneidet P den Kreis K und die Kreise der obengenannten Kreisschar schneiden die Geraden mq nicht in reellen Punkten; es bildet vielmehr die Linie mq eine ideelle gemeinsame Sehne sämtlicher Kreise der Kreisschar.

Liegt endlich p auf K, so ist P eine Tangente an K und die Kreise haben sämtlich den Punkt p gemeinsam.

Soll für eine Gerade P die ihr bezüglich eines Kreises K zukommende Punktinvolution konstruiert werden, so erhält man dieselbe für den Fall, dass die Gerade P den Kreis nicht schneidet, indem man sich mittels der Beziehung $\overline{qu^2} = \overline{qx} \cdot \overline{qx_1}$, die beiden Punkte u und v auf dem zu P senkrechten Durchmesser von K_0 verschafft und durch diese Punkte eine Kreisschar legt.

Schneidet dagegen P den Kreis K, so zieht man durch seinen Mittelpunkt m beliebige Halbmesser und in deren Endpunkten die zu ihnen senkrechten Tangenten an K, so schneidet je ein Halbmesser und die zugehörige senkrechte Tangente conjugierte Punktpaare der Involution auf P aus.

Soll dagegen die zu einem Punkte gehörige Strahleninvolution ermittelt werden, so bestimme man die Polare P von p und die zu ihr gehörige Punktinvolution, welche perspektivisch liegt zu der gesuchten Strahleninvolution.

Man vergleiche hiermit auch die Konstruktion auf Seite 130 des Lehrbuches des Projektionszeichnens, Band III, 1. Hälfte.

Selbstverständlich hat die in Antwort der Frage 41 besprochene Konstruktion auch für den Kreis in gleicher Weise Gültigkeit.

Frage 42. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Pol, Polare und den übrigen Punkten eines Kegelschnittes?

Erkl. 43. Da bei der in Antwort der Frage 42 bezeichneten centrischen Collineation des Kegelschnittes für jeden Collineationsstrahl das Centrum und der Schnittpunkt mit der Collineationsachse ein Punktpaar bilden, harmonisch conjugiert zu den Schnittpunkten des Collineationsstrahles mit dem Kegelschnitt, so ist die centrische Collineation des Kegelschnittes eine harmonische, d. h. eine Centralcollineation mit der Charakteristik $\triangle = -1$.

Kurz zusammengefasst kann man den Satz aussprechen:

„Sämtliche Punkte eines Kegelschnittes befinden sich in harmonischer Centralcollineation bezüglich eines jeden Punktes der Ebene als Centrum und der zugehörigen Polare als Achse.“

Antwort. Zwischen den Punkten a, a_1, b, b_1, c, c_1, siehe Figur 59, besteht der nämliche Zusammenhang wie zwischen den entsprechenden Punkten einer centrischen Collineation, für welche p das Centrum und P die Collineationsachse bildet.

Hieraus folgt aber der Satz:

„Jeder Kegelschnitt ist sich selbst centrisch-collinear bezüglich eines beliebigen Punktes seiner Ebene als Centrum und der Polare dieses Punktes als Collineationsachse.“

Frage 43. Besteht zwischen den entsprechenden Punktpaaren einer harmonischen Centralcollineation eines Kegelschnittes noch eine weitere Beziehung?

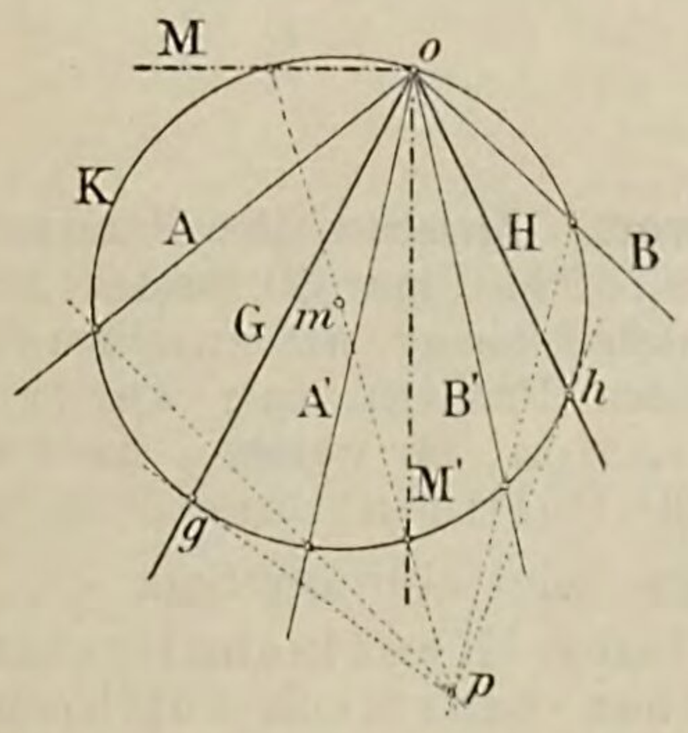
Erkl. 44. Der Punkt p, in welchem sich die Verbindungslinien conjugierter Punktpaare der Involution auf dem Kegelschnitt schneiden, heisst der Mittelpunkt, die Gerade P, auf welcher die Schnittpunkte conjugierter Tangenten liegen, heisst die Achse der Kegelschnittinvolution.

Erkl. 45. Liegt der Punkt p ausserhalb des Kegelschnittes, so sind von ihm aus zwei Tangenten an den Kegelschnitt möglich und ihre Berührpunkte heissen die Doppelpunkte der Punktinvolution des Kegelschnittes, sie bilden mit jedem entsprechenden conjugierten Punktpaare vier harmonische Punkte des Kegelschnittes.

Erkl. 46. Da der Kreis nur einen speziellen Fall eines Kegelschnittes darstellt, so haben die in den Antworten der Fragen 39 bis 42 sowie in den Erklärungen angeführten Beziehungen auch für die Kreislinie volle Gültigkeit.

Frage 44. Wie konstruiert man mit Bezugnahme auf das in Antwort der Frage 43 Angeführte für eine gegebene Strahlen- oder Punktinvolution zusammengehörige Elemente derselben?

Figur 60.



Erkl. 47. Aus der Konstruktion in Antwort der Frage 44 folgt die schon an anderer Stelle, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, Band III, 1. Hälfte, Erkl. 160, bewiesene Beziehung, dass sämtliche conjugierte Strahlenpaare einer Involution aufeinander senkrecht stehen, sobald dies für zwei Paare stattfindet, denn in diesem Falle fällt der Punkt p, siehe Figur 60, in den Kreismittelpunkt m, es gehen also

Antwort. Die Punkte aa_1, bb_1, cc_1, siehe Figur 59, bilden eine auf dem Kegelschnitt liegende Punktreihe und zwar kann man diese wegen des Entsprechens mit Vertauschbarkeit eine involutorische Punktreihe oder eine Punktinvolution auf dem Kegelschnitt nennen. Dabei sind die Punktpaare aa_1, bb_1, cc_1 conjugierte Punktpaare der Involution. Verbindet man die Punkte der Involution mit einem beliebigen Punkte o des Kegelschnittes, so entsteht hierdurch eine Strahleninvolution. Zeichnet man dagegen in den conjugierten Punktpaaren der Involution Tangenten an den Kegelschnitt, so bilden diese ein involutorisches Tangentenbüschel und die Tangenten dieses Büschels schneiden auf jeder Tangente eine Punktinvolution aus.

Antwort. Hat man, siehe Figur 60, zwei conjugierte Strahlenpaare AA' und BB' einer Strahleninvolution, so lege man durch o eine beliebige Kreislinie K, welche mit den beiden gegebenen Strahlenpaaren zwei Kreissekanten bestimmt, die sich in p schneiden. Jede weitere durch p gehende Kreissekante liefert ein conjugiertes Strahlenpaar der Involution; so ergibt sich insbesondere mittels der Mittelpunktssekante durch p das Achsenpaar MM' der Involution.

Je nach der Lage des Punktes p bezüglich des Kreises K sind von demselben zwei Tangenten oder keine solche Linien an den Kreis K möglich; im ersten Falle gehen durch die Berührpunkte g und h der genannten Tangenten die Doppelstrahlen G und H der Involution hindurch, im letzten Falle sind Doppelstrahlen nicht vorhanden.

Sind dagegen, s. Figur 61, zwei conjugierte Punktpaare aa' und bb' einer Involution gegeben, so zeichne man eine den Träger der Involution berührende Kreislinie K und ziehe von den gegebenen Punkten Tangenten an diese Kreislinie. Die

conjugierte Strahlenpaare der Involution durch die Endpunkte eines Durchmessers und stehen daher aufeinander senkrecht.

Erkl. 48. Wird eine rechtwinklige Involution central in eine beliebige Ebene projiziert, so behält man eine allgemeine elliptische Involution.

Erkl. 49. Besitzt die Involution Doppelstrahlen, so halbieren die Achsen den Winkel der Doppelstrahlen, welche Eigenschaft aus der in Antwort der Frage 44 angegebenen Konstruktion der Achsen und Doppelstrahlen unmittelbar folgt, denn die Linie pm, siehe Figur 60, halbiert den Kreisbogen gh; und folglich sind die über den bezüglichen Hälften stehenden Peripheriewinkel $G\hat{M}'$ und $H\hat{M}'$ einander gleich, siehe auch Lehrbuch des Projektionszeichnens, Band III, 1. Hälfte, Erkl. 159.

Ist demnach ein Punkt der Ebene gemeinsamer Scheitel von Winkeln mit den nämlichen Halbierungslinien, so bilden die sämtlichen Strahlen eine Involution, und zwar eine symmetrische Involution, mit den genannten Halbierlinien als Doppelstrahlen. Jede zu einer der beiden Halbierlinien senkrechte Gerade schneidet aus der Strahleninvolution eine symmetrische Punktinvolution aus.

Erkl. 50. Auch die ebenfalls schon früher bewiesene Eigenschaft, dass die Doppelstrahlen einer Involution harmonisch conjugiert sind zu sämtlichen conjugierten Strahlenpaaren, folgt aus der in Antwort der Frage 44 durchgeführten Konstruktion, denn die Schnittpunkte eines conjugierten Strahlenpaares, z. B. AA' mit dem Kreise K, bilden mit den Berührpunkten $g_1 h$ vier harmonische Punkte des Kreises, siehe Erkl. 45, und es sind somit die Strahlen A, A' harmonisch conjugiert zu den Strahlen G und H.

Erkl. 51. Liegt der Punkt p innerhalb des Hilfskreises, so kann man in den Endpunkten einer durch p gehenden Sehne Tangenten an den Kreis ziehen, die sich in einem Punkte q treffen. Durch q geht eine Sekante nach p; sie schneidet auf dem Hilfskreise zwei Schnittpunkte aus, welche mit den Endpunkten der oben genannten Sehne vier harmonische Punkte bilden. Es sind somit die durch diese Punkte gehenden conjugierten Strahlenpaare vier harmonische Strahlen. Das eben Gesagte enthält aber folgenden Satz:

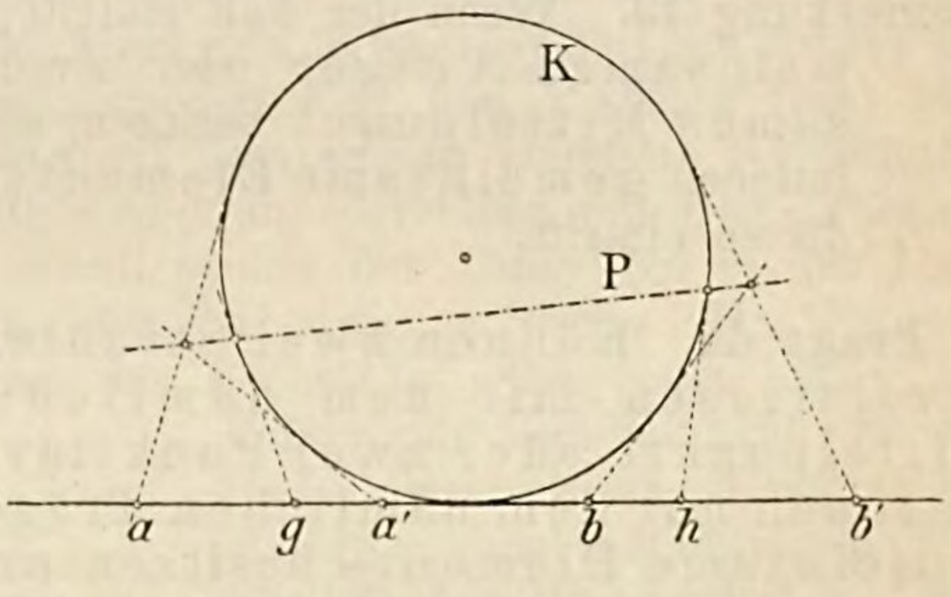
> „In einer gleichlaufenden, elliptischen Strahlen- oder Punktinvolution gibt es zu jedem conjugierten Elementenpaar ein ihm harmonisch conjugiertes Elementenpaar.“

Tangenten durch je ein conjugiertes Punktpaar der Involution liefern durch ihre Schnittpunkte eine Gerade P. Zu jedem auf P angenommenen Punkte gehört ein Tangentenpaar an den Kreis K, das auf dem Träger der Involution ein conjugiertes Punktpaar bestimmt.

Schneidet die Gerade P den Kreis K, so gehen durch die Schnittpunkte Tangenten, welche die Doppelpunkte g und h der Involution enthalten; liegt die Gerade P ganz ausserhalb der Kreislinie K, so besitzt die Involution keine Doppelpunkte.

Welche Spezialfälle der Involution erhält man, wenn entweder der Punkt p, siehe Figur 60, auf die Peripherie des Kreises K fällt, oder die Gerade P, siehe Figur 61, die Kreislinie K berührt?

Figur 61.



Anmerkung 11. Man erkennt unter den Involutionen von Punkten und Geraden nunmehr folgende Spezialfälle:

1) Die symmetrische Punkt- bezw. Strahleninvolution, d. h. als Spezialfall einer allgemeinen hyperbolischen Involution; sie unterscheidet sich von der allgemeinen hyperbolischen Involution durch die Lage ihrer Doppelelemente, es liegt nämlich bei der symmetrischen Punktinvolution ein Doppelpunkt in unendlicher Ferne, der andere ist Mittelpunkt für alle conjugierten Punktpaare. Bei der Strahleninvolution stehen die Doppelelemente aufeinander senkrecht, siehe auch Lehrbuch des Projektionszeichnens, III. Teil, 1. Hälfte, Erkl. 159.

2) Die rechtwinklige Strahleninvolution als Spezialfall der elliptischen Involution, bei ihr stehen conjugierte Strahlenpaare aufeinander senkrecht.

Anmerkung 12. Die Beziehungen zwischen Punkt- bezw. Strahleninvoutionen haben selbstverständlich auch für die Ebeneninvolution Gültigkeit; man braucht ja nur die Punkte einer Punktinvolution mit einer den Träger der Involution nicht schneidenden Geraden, die aber die Strahlen einer Strahleninvolution mit einem ausserhalb der Ebene der Strahleninvolution befindlichen Punkte schneiden, zu Ebenen zu vereinigen.

Anmerkung 13. Wenn der Fall eintritt, dass zwei Punktinvolutionen einen gemeinsamen Träger oder zwei Strahleninvolutionen einen gemeinsamen Mittelpunkt besitzen, so interessiert die Frage, ob die genannten Involutionen gemeinsame Elemente besitzen können und unter welchen Bedingungen dieses eintritt.

Frage 45. Können zwei Strahleninvolutionen mit dem nämlichen Mittelpunkte oder zwei Punktinvolutionen mit dem nämlichen Träger gemeinsame Elemente besitzen und unter welchen Bedingungen tritt dies ein?

Antwort. Betrachtet man zwei Strahleninvolutionen, so erhält man mittels einer durch den gemeinsamen Mittelpunkt geführten Kreislinie K für jede Involution einen Punkt p und damit eine Verbindungslinie pp', welche die Kreislinie K schneiden, berühren oder ganz ausserhalb derselben liegen kann. Im ersten Falle können nun entweder beide Punkte p und p' innerhalb bezw. ausserhalb von K liegen oder es liegt der eine Punkt p innerhalb, der andere Punkt p' ausserhalb von K. Befindet sich dagegen die Verbindungslinie pp' ganz ausserhalb von K, so liegen auch stets beide Punkte p und p' ausserhalb der Kreislinie. Man erhält zusammengefasst folgendes Ergebnis:

„Zwei Strahleninvolutionen mit gemeinsamem Mittelpunkt besitzen stets ein gemeinsames Strahlenpaar, wenn entweder die gegebenen Involutionen beide gleichlaufend, elliptisch, oder die eine gleichlaufend, elliptisch, die andere ungleichlaufend, hyperbolisch, oder endlich

Erkl. 52. Die in Antwort der Frage 45 genannte Gerade pp' kann insbesondere auch Tangente an den Hilfskreis werden. In diesem Falle besitzen die beiden gegebenen Involutionen offenbar ein Doppelelement gemeinsam und dieses vertritt eben das beiden Involutionen gemeinsame Elementenpaar.

beide ungleichlaufend, hyperbolisch sind, im letzteren Falle aber nur dann, wenn die Doppelelemente der gegebenen Involutionen sich gegenseitig nicht trennen."

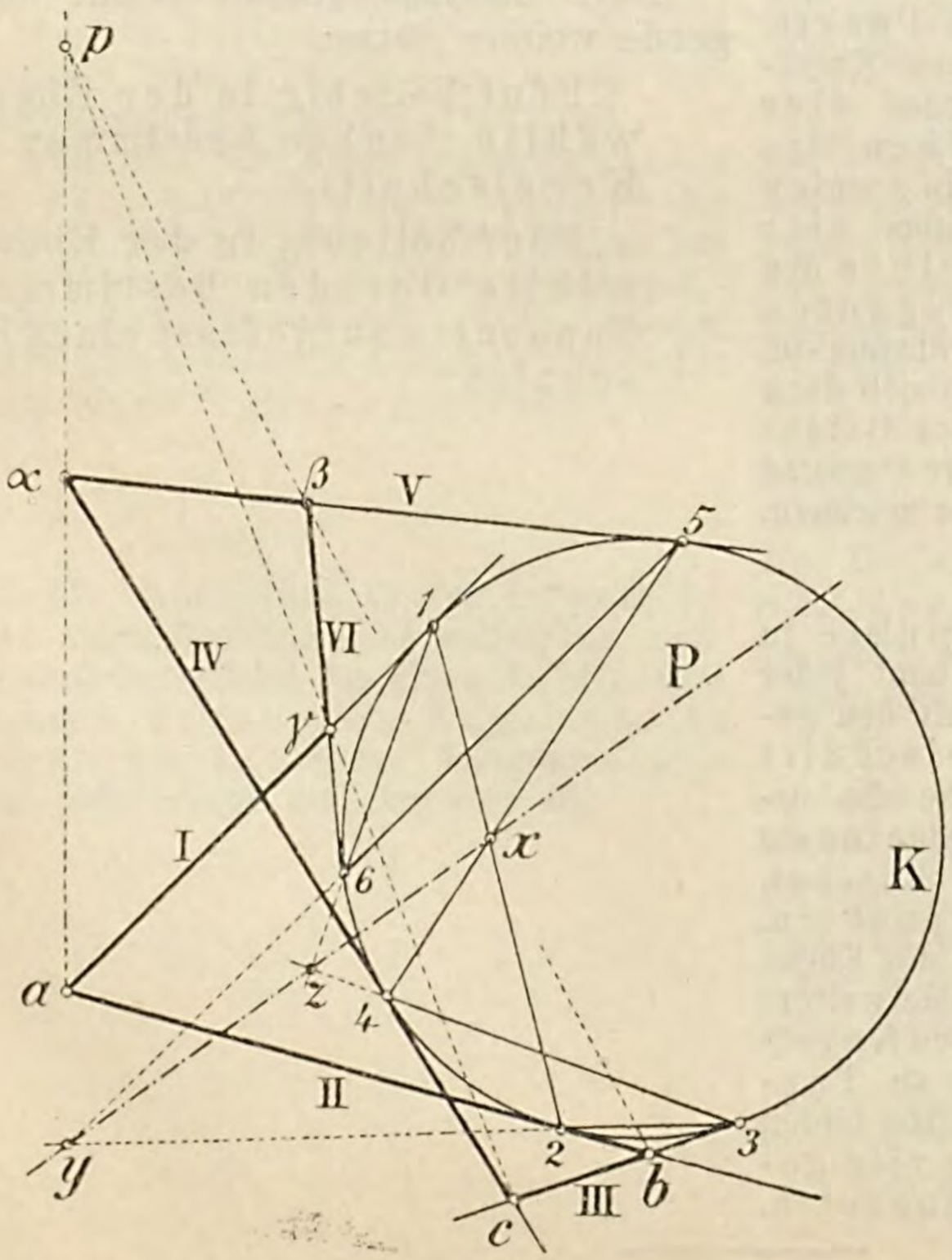
Der gleiche Satz hat auch für Punktinvolutionen mit gemeinsamem Träger bezw. für Ebeneninvolutionen mit gemeinsamer Achse Gültigkeit.

---

b) Satz von Pascal und Brianchon, Zahl der Bestimmungsstücke eines Kegelschnittes, das umbeschriebene Vier- und Dreiseit.

Anmerkung 14. In der ersten Hälfte des dritten Teiles dieses Lehrbuches, siehe Anmerkung 19, 20 u. ff., wurde bereits der Pascal'sche und Brianchon'sche Satz bei der Besprechung des Erzeugnisses von projektiven Strahlbüscheln und Punktreihen erwähnt. Da dieses Erzeugnis ein Kegelschnitt ist, so gelten diese Sätze für alle Kegelschnitte. In der Anmerkung 20 und 25 ist überdies die Gültigkeit des Pascal'schen und Brianchon'schen Satzes für die Kreislinie und damit auch für die übrigen Kegelschnitte direkt bewiesen worden. Mittels der Beziehungen zwischen Pol und Polare lässt sich aber auch in einfacher Weise der eine Satz aus dem andern ableiten: Ist nämlich, siehe Figur 62, K eine beliebige Kreislinie und auf derselben ein Pascal'sches Sechseck 123456 gegeben, so bilden die Schnittpunkte der Tangenten in den Endpunkten je einer der Seiten des Sechsecks die Pole dieser Seiten. Den Schnittpunkten x, y und z der Gegenseitenpaare des Sechsecks entsprechen daher als Polaren die Verbindungslinien der Pole dieser Seiten. Da aber die Punkte x, y und z einer Geraden P, nämlich der Pascal'schen Linie angehören, so schneiden sich die zugehörigen Polaren in einem Punkte p.

Figur 62.



Die Polare des Punktes x ist die Verbindungslinie $a\alpha$ der Pole a und α der Seiten 12 und 45, desgleichen ist die Polare von y die Verbindungslinie $b\beta$ der Pole b und β der Seiten 23 und 56, endlich ist die Polare des Punktes z die Verbindungslinie $c\gamma$ der Pole c und γ der Seiten 34 und 61. Die drei Verbindungslinien $a\alpha$, $b\beta$ und $c\gamma$ schneiden sich demnach in einem Punkte p.

Die Tangenten I, II, III, IV, V und VI in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5 und 6 bilden ein dem Kreise K umbeschriebenes Sechsseit, ein sogenanntes Brianchon'sches Sechsseit, dessen Hauptdiagonalen die Verbindungslinien $a\alpha$, $b\beta$ und $c\gamma$ der Schnittpunkte von I II und IV V,

II III und V VI, III IV und VI I sich in dem Brianchon'schen Punkte p schneiden.

Der Zusammenhang zwischen Pol und Polare eines Kegelschnittes ist reciprok, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, III. Teil, 1. Hälfte, Anmerkung 14.

Auf Grund dieses Zusammenhanges lässt sich nun zu jedem Satze bezüglich der Pole, der reciproke bezüglich der Polaren bilden. So ist der Brianchon'sche Satz der reciproke Satz des Pascal'schen und umgekehrt.

Frage 46. Welche Sätze folgen aus dem Inhalt der Anmerkung 14?

Antwort. Mit Bezugnahme auf den Inhalt der Anmerkung 14 lassen sich nunmehr folgende Sätze aussprechen:

„Irgend sechs Punkte eines Kegelschnittes bilden ein Pascal'sches Sechseck."

„Irgend sechs Tangenten eines Kegelschnittes bilden ein Brianchon'sches Sechsseit."

Es können demnach keine sechs Punkte oder sechs Tangenten eines Kegelschnittes beliebig gewählt werden. Der Kegelschnitt ist vielmehr durch fünf Punkte, bezw. fünf Tangenten vollständig bestimmt, denn jeder weitere sechste Punkt, bezw. jede weitere sechste Tangente muss mit den fünf gegebenen Elementen ein Pascal'sches Sechseck, bezw. ein Brianchon'sches Sechsseit bilden.

Kurz zusammengefasst erhält man folgende weitere Sätze:

„Fünf beliebig in der Ebene gewählte Punkte bestimmen einen Kegelschnitt."

„Fünf beliebig in der Ebene gewählte Geraden bestimmen als Tangenten aufgefasst einen Kegelschnitt."

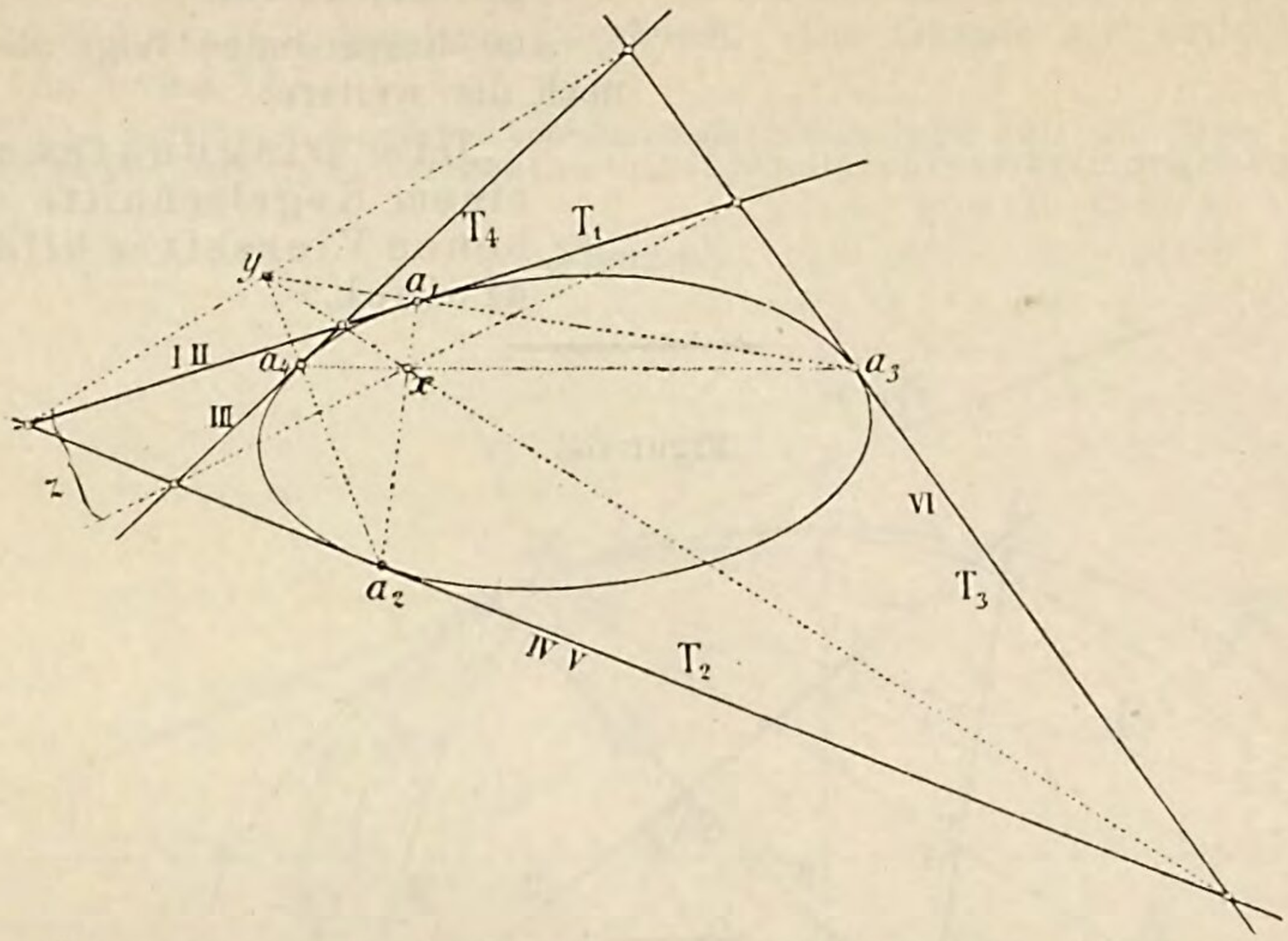
Erkl. 53. Da die fünf Punkte oder Tangenten ganz beliebig gewählt werden dürfen, so können unter Umständen auch drei der Punkte auf einer Geraden liegen, bezw. drei der Geraden durch denselben Punkt gehen. Im ersten Falle artet der Kegelschnitt in zwei sich schneidende oder parallele Geraden aus.

Gehen dagegen drei der Geraden durch einen festen Punkt p, so erhält man statt des Kegelschnittes zwei Punkte, nämlich einmal den Punkt p und ausserdem den Schnittpunkt q der beiden übrigen gegebenen Tangenten.

Erkl. 54. Liegen zwei der gegebenen Punkte oder Tangenten einander unendlich nahe, so bestimmen sie in beiden Fällen eine Tangente und deren Berührpunkt, so dass man statt der fünf Punkte, bezw. der fünf Tangenten eines Kegelschnittes auch geben kann entweder vier Punkte und in einem derselben die Tangente, bezw. drei Punkte und in zweien derselben die Tangenten oder aber vier Tangenten und auf einer derselben den Berührpunkt, bezw. drei Tangenten und in zweien derselben die Berührpunkte. In jedem der angeführten Fälle lassen sich dann mit Hilfe des Pascal'schen, bezw. des Brianchon'schen Satzes beliebig viele weitere Punkte oder Tangenten des Kegelschnittes zeichnen.

Erkl. 55. Nimmt man vier Punkte in der Ebene beliebig an, so bestimmt jeder weitere fünfte Punkt der Ebene mit den gegebenen vier Punkten einen Kegelschnitt und alle diese Kegelschnitte, welche die ursprünglich gegebenen vier Punkte gemeinsam besitzen, bilden ein Kegelschnittbüschel, mit den vier Punkten als Grundpunkten. Desgleichen kann man vier Gerade der Ebene willkürlich wählen, so bestimmt jede weitere Gerade mit der gegebenen Geraden einen Kegelschnitt, der diese fünf Geraden zu Tangenten hat. Alle diese Kegelschnitte bilden eine Kegelschnittschar mit den vier gegebenen Geraden als Grundtangenten.

Figur 63.



Frage 47. Welche Beziehungen bestehen, in Rücksicht auf den Brianchon'schen Satz, für ein dem Kegelschnitte umbeschriebenes Vierseit?

Erkl. 56. Ist der Kegelschnitt eine Parabel und stehen die Seiten eines umbeschriebenen Vierseites paarweise aufeinander senkrecht, so ist die Verbindungslinie der Scheitel der rechten Winkel die Direktrix, ihr Pol daher der Brennpunkt der Parabel.

Hat man also von einer Parabel zwei Paare von aufeinander senkrecht stehenden Tangenten, so erhält man den Parabelbrennpunkt als jenen Diagonalpunkt des Tangentenvierseites, welcher der Verbindungslinie der Scheitel der rechten Winkel gegenüberliegt.

Erkl. 57. Auf Grund des in Antwort der Frage 47 angegebenen Satzes kann man nunmehr in einfacher Weise für einen durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitt die Berührpunkte dieser Tangenten konstruieren, siehe Frage und Antwort 48.

Antwort. Sind, siehe Figur 63, T_1, T_2, T_3 und T_4 vier Tangenten eines Kegelschnittes und a_1, a_2, a_3 und a_4 ihre Berührpunkte, sind ferner x, y, z die Diagonalpunkte des durch die Tangenten gebildeten Vierseites, so kann man letzteres als ein dem Kegelschnitt umbeschriebenes Brianchon'sches Sechsseit betrachten, für welches z. B. in den Berührpunkten a_1 und a_2 die Schnittpunkte zweier aufeinander folgenden Tangenten etwa I, II und IV, V zusammenfallen; man erhält dann für dieses Sechsseit den Brianchon'schen Punkt x, d. h. die Berührsehne a_1a_2 geht durch den Punkt x. In gleicher Weise ergibt sich, wenn die Berührpunkte a_3 und a_4 als Schnittpunkte von aufeinander folgenden Tangenten, etwa von I' II' und IV V aufgefasst werden, ein Brianchon'sches Sechsseit mit dem nämlichen Brianchon'schen Punkt x; es geht somit auch die Berührsehne a_3a_4 durch den Punkt x.

Nimmt man aber die Berührpunkte a_1 und a_4 bezw. a_2 und a_3 oder endlich a_1 und a_3 oder a_2 und a_4 je als Gegenecken eines Brianchon'schen Sechsseites, so findet man hierfür die Brianchon'schen Punkte z und y, welches Ergebnis sich in folgendem Satze aussprechen lässt:

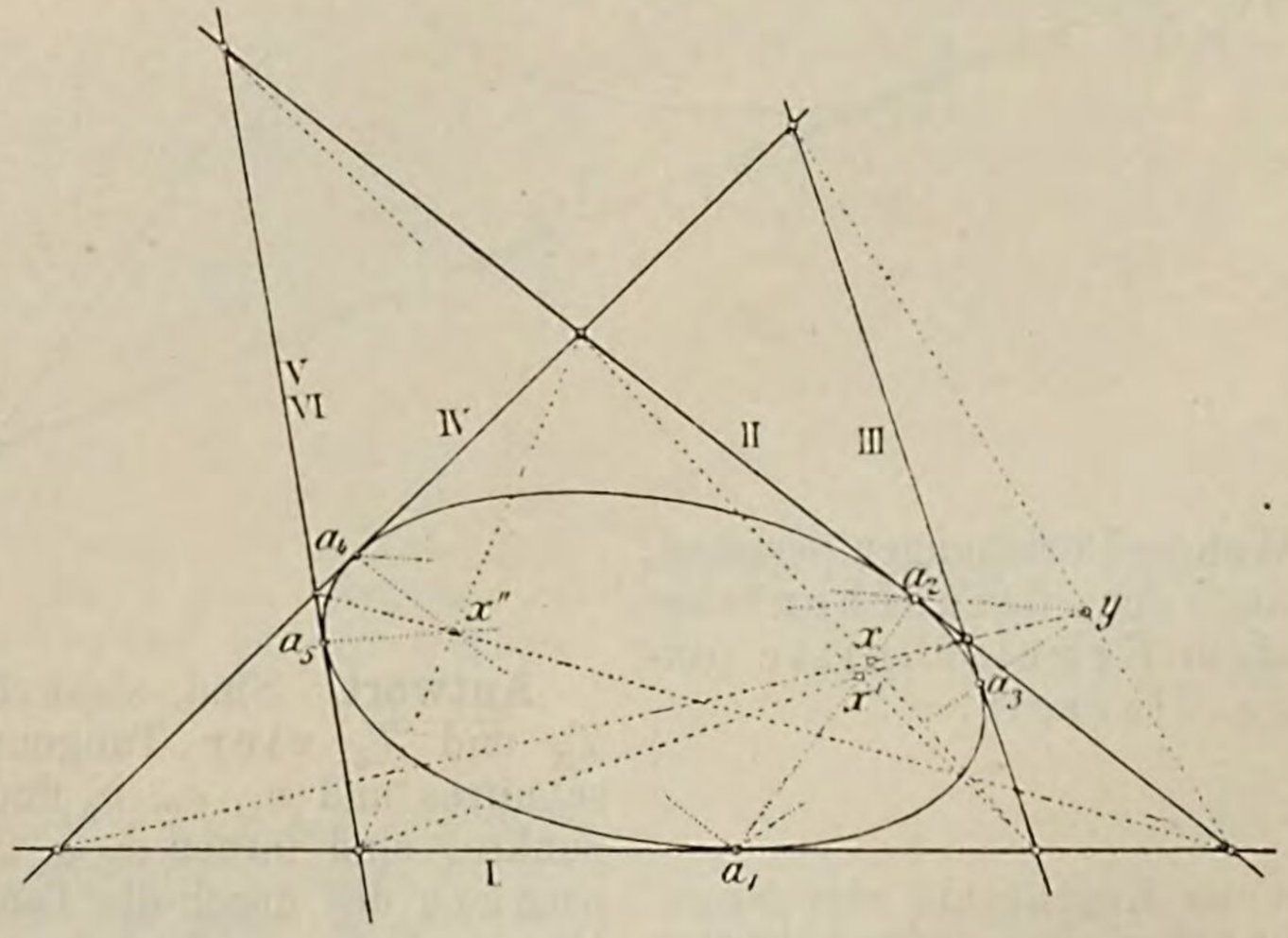
„Für ein dem Kegelschnitte umbeschriebenes Vierseit gehen die Berührsehnen der Tangenten, d. h. die Polaren der Ecken des

Vierseites durch dessen Diagonalpunkte."

Aus diesem Satze folgt aber unmittelbar noch der weitere:

„Die Diagonalpunkte eines einem Kegelschnitte umbeschriebenen Vierseites bilden ein Poldreieck."

Figur 64.



Frage 48. Wie bestimmt man für einen durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitt dessen Berührpunkte mit den gegebenen Tangenten?

Erkl. 58. Sind durch die Linien I, II, III drei Tangenten eines Kegelschnittes mit den Berührpunkten a_1, a_2 und a_3 gegeben, so kann man das Dreiseit I, II, III als ein Brianchon'sches Sechsseit auffassen, für welches die Punkte a_1, a_2 und a_3 als Schnittpunkte aufeinander folgender Seiten erscheinen. Der Brianchon'sche Punkt ist in diesem Falle der Schnittpunkt der Verbindungslinien der Berührpunkte a_1, a_2 und a_3 mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiseites. Es besteht somit folgender Satz:

„In einem dem Kegelschnitt umbeschriebenen Dreiseit schneiden sich die Verbindungslinien der Berührpunkte der drei Seiten mit den gegenüberliegenden Ecken in einem Punkte."

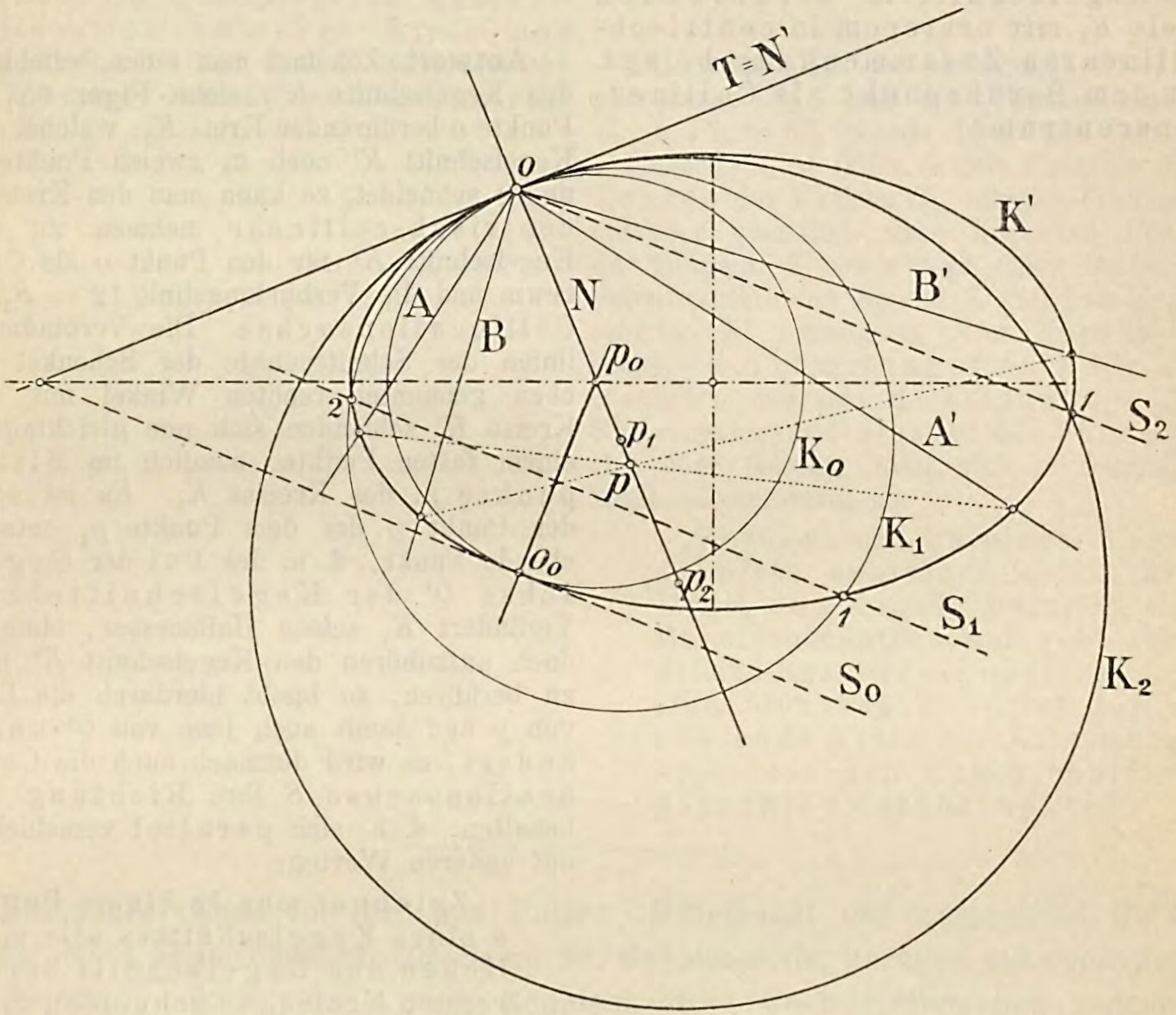
Antwort. Sind die Linien I bis V, siehe Figur 64, die gegebenen Tangenten eines Kegelschnittes, so liefern die beiden Vierseite I, II, III, IV und I, II, III, V sofort die Diagonalpunkte x und x' und damit die Verbindungslinie xx', welche die Berührpunkte a_1 und a_2 enthält. Hiermit ist aber auch der Punkt y bestimmt, wodurch sich auf den Linien ya_1 und ya_2 die Berührpunkte a_3 und a_4 ergeben. Mittels des Schnittpunktes x'' findet sich schliesslich auf der Verbindungslinie a_2x'' auch der noch fehlende Berührpunkt a_5 auf der Tangente V.

Anmerkung 15. Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so gestaltet sich die Konstruktion der Berührpunkte gegebener Tangenten besonders einfach. Man hat in diesem Falle nur vier Gerade als Tangenten sich zu geben, die fünfte Tangente liegt in unendlicher Ferne. Sind I, II, III, IV die vier Tangenten, so liegt der

Punkt x im Schnitt der durch die Schnittpunkte von I III und II III zu II bezw. I gezogenen Parallelen, der Punkt x' im Schnitt der durch die Punkte I IV und II IV zu II bezw. I gezogenen Parallelen. Die Gerade xx' enthält die Berührpunkte von I und II.

Welche einfache Konstruktion von Parabeltangenten leitet sich aus dieser Konstruktion ab, wenn die Parabel durch zwei Tangenten mit ihren Berührpunkten gegeben ist?

Figur 65.



Frage 49. Welche besonderen Beziehungen erhält man, wenn ein Punkt eines Kegelschnittes als Mittelpunkt einer rechtwinkligen Strahleninvolution genommen wird?

Erkl. 59. Zwei Kegelschnitte können sich höchstens in vier Punkten schneiden, denn hätten die Kegelschnitte fünf Punkte gemeinsam, so müssten sie sich vollständig decken, also aufeinander fallen.

Erkl. 60. Auf Grund der Erkl. 59 kann der Kreis K_1, nachdem er im Punkte o schon zwei Punkte mit dem Kegelschnitt gemein hat, den letzteren nur mehr in höchstens zweien Punkten schneiden.

Antwort. Ist der Punkt o, s. Figur 65, auf dem Kegelschnitt K' Mittelpunkt einer rechtwinkligen Strahleninvolution, so bestimmen conjugierte Strahlenpaare auf dem Kegelschnitt conjugierte Punktpaare sowie einen Punkt p derart, dass die Verbindungslinie po eine Normale N des Kegelschnittes K' ist. Man hat also folgenden Satz:

„Dreht sich der Scheitel eines rechten Winkels um einen beliebigen Punkt o eines Kegelschnittes, so schneiden sich die Verbindungslinien der Schnittpunkte seiner Schenkel mit dem

Kegelschnitt in einem festen Punkte p auf der den Punkt o enthaltenden Normalen des Kegelschnittes."

Frage 50. Welche besonderen Beziehungen erhält man, wenn man einen den Kegelschnitt K' berührenden Kreis K_1 mit ersterem in centrisch-collinearen Zusammenhang bringt, mit dem Berührpunkt als Collineationscentrum?

Antwort. Zeichnet man einen beliebigen, den Kegelschnitt K', siehe Figur 65, im Punkte o berührenden Kreis K_1, welcher den Kegelschnitt K' noch in zweien Punkten 1 und 2 schneidet, so kann man den Kreis K_1 centrisch-collinear nehmen zu dem Kegelschnitt K' für den Punkt o als Centrum und die Verbindungslinie $12 = S_1$ als Collineationsachse. Die Verbindungslinien der Schnittpunkte der Schenkel der oben genannten rechten Winkel mit dem Kreise K_1 schneiden sich nun gleichfalls in einem festen Punkte, nämlich im Mittelpunkte p_1 des Kreises K_1. Es ist somit der Punkt p der dem Punkte p_1 entsprechende Punkt, d. h. der Pol der Gegenachse Q' der Kegelschnittebene. Verändert K_1 seinen Halbmesser, ohne jedoch aufzuhören den Kegelschnitt K' in o zu berühren, so bleibt hierdurch die Lage von p und damit auch jene von Q' ungeändert, es wird demnach auch die Collineationsachse S ihre Richtung beibehalten, d. h. sich parallel verschieben, mit anderen Worten:

„Zeichnet man in einem Punkte o eines Kegelschnittes alle möglichen den Kegelschnitt berührenden Kreise, so schneiden diese den Kegelschnitt in parallelen Sehnen."

Unter allen den genannten Kreisen wird sich auch der Kreis K_0 befinden, der den Kegelschnitt K' zum zweiten Male, etwa in einem Punkte o_0 berührt. Die beiden Kegelschnittnormalen in den Punkten o und o_0 gehen durch den Mittelpunkt p_0 von K_0, besitzen also gleiche Länge, d. h. der Punkt p_0 liegt auf einer Achse des Kegelschnittes. Aus Vorstehendem folgt der Satz:

„Berührt ein Kreis einen Kegelschnitt und nimmt man den Kreis centrisch-collinear zum Kegelschnitt mit dem Berührpunkt als Centrum, so sind die Achsen des Kegelschnittes parallel zu den Halbierungslinien des Win-

kels zwischen der Collineationsachse und der gemeinsamen Tangente von Kreis und Kegelschnitt."

Frage 51. Welche Beziehungen erhält man, wenn für die in Frage und Antwort 50 geschilderte Centralcollineation zwischen Kreis und Kegelschnitt die Collineationsachse noch ausserdem durch das Centrum geht?

Antwort. Hat der berührende Kreis K_2 eine solche Lage, dass die Collineationsachse S_2, s. Figur 65, gerade durch den Punkt o hindurchgeht, so fallen in dem Punkte o drei Punkte des Kreises K_2, nämlich die beiden einander unendlich nahe liegenden Punkte der Tangente T sowie noch einer der beiden Schnittpunkte von K_2 und K' mit dem Kegelschnitte K' zusammen. Der Kreis K_2 ist somit der Krümmungskreis für den Punkt o und sein Mittelpunkt p_2 der Krümmungsmittelpunkt des Punktes o. Das eben Gesagte lässt sich in folgendem Satze zusammenfassen:

„Berührt ein zu einem Kegelschnitte centrisch-collinearer Kreis den Kegelschnitt im Collineationscentrum und geht durch dieses ausserdem noch die Collineationsachse, so ist der berührende Kreis der Krümmungskreis für den Kegelschnitt im genannten Berührpunkte."

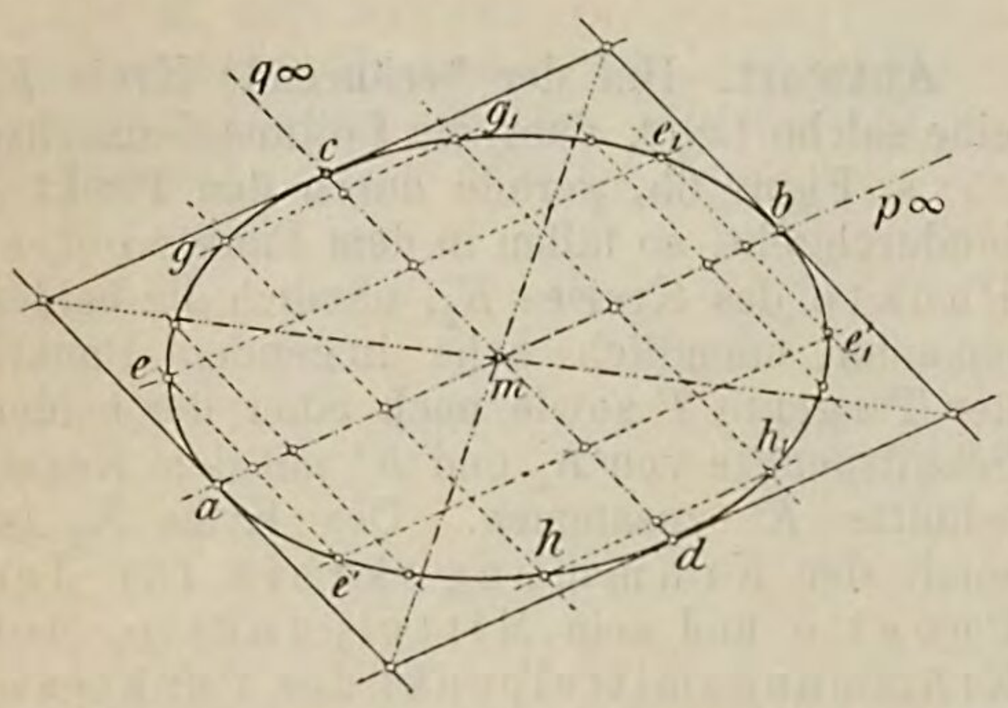
---

c) Besondere Lagen von Pol und Polare, Mittelpunkt und conjugierte Durchmesser eines Kegelschnittes, Gleichung der Kegelschnitte, bezogen auf conjugierte Durchmesser. Brennpunkte eines Kegelschnittes; Centralcollineation zwischen Kreis und Kegelschnitt, wobei ein Brennpunkt im Collineationscentrum liegt.

Frage 52. Welche Lagen, ausser den schon kennen gelernten, können Pol und Polare eines Kegelschnittes noch gegen den letzteren einnehmen und was für Eigenschaften für den Kegelschnitt folgen hieraus?

Antwort. Es kann entweder der Pol oder die Polare eines Kegelschnittes in unendliche Ferne rücken; im ersten Falle ergibt sich folgendes. Liegt der Pol p unendlich fern auf einer gegebenen Geraden A, siehe Figur 66, so werden die Sekanten durch p^∞ alle zu einander parallel und ihre hinsichtlich p^∞ zu den Schnittpunkten e, e_1 und e', e_1' · · · harmonisch conjugierten Punkte gehen durch die Mitten der Sehnen $\overline{ee_1}$ und $\overline{e'e_1'}$ · · · Die Verbindungslinie cd dieser Mittelpunkte heisst ein Durchmesser des Kegelschnittes.

Figur 66.



Bezeichnet ferner q^∞ den unendlich fernen Punkt von cd, so erhält man die Polare hierzu in gleicher Weise als Verbindungslinie der Mitten der zu cd parallelen Sehnen, und diese Verbindungslinie fällt mit dem Durchmesser $\overline{ab}$ zusammen. Die Geraden mp und pq sind bezüglich des Kegelschnittes conjugierte Polaren und sie heissen, wenn die zugehörigen Pole unendlich fern liegen, conjugierte Durchmesser des Kegelschnittes. Die Verbindungslinie $p^\infty q^\infty$ kann man als die unendlich ferne Gerade der Kegelschnittebene nehmen, ihr entspricht als Pol der Schnittpunkt m von ab und cd, d. i. der Mittelpunkt des Kegelschnittes.

Zusammengefasst kann man das eben Gesagte so aussprechen:

„Unter einem Durchmesser eines Kegelschnittes, versteht man die Polare eines unendlich fernen Punktes des Kegelschnittes.“

„Conjugierte Durchmesser eines Kegelschnittes sind conjugierte Polaren, mit unendlich fernen Polen.“

„Mittelpunkt eines Kegelschnittes ist der Pol der unendlich fernen Geraden der Kegelschnittebene.“

Frage 53. Welche Beziehungen bestehen hinsichtlich der Lage des Mittelpunktes sowie jener von conjugierten Durchmessern bei den kennen gelernten dreierlei Arten von Kegelschnitten?

Antwort. Sowohl für die Ellipse als auch für die Hyperbel liegt der Mittelpunkt der Kurve im Endlichen und zwar bei der ersteren Kurve innerhalb, und bei der letzteren Kurve ausserhalb derselben, siehe Erkl. 61. Bei der Parabel fällt der Mittelpunkt in unendliche Ferne.

Bei der Ellipse schneidet jedes Paar conjugierter Durchmesser die Kurve in vier reellen Punkten, bei der Hyperbel dagegen liegt stets einer der conjugierten Durchmesser ganz ausserhalb der Kurve; seine Länge findet sich mittels eines Parallelogrammes, dessen Ecken auf den Asymptoten der Hyperbel liegen, während das eine Paar paralleler Seiten, durch die Tangenten in den Endpunkten des zweiten Durchmessers gebildet ist. Das andere Seitenpaar dieses Parallelogrammes bildet ein Tangentenpaar an die zur gegebenen Hyperbel gehörige conjugierte Hyperbel.

Erkl. 61. Die in Antwort der Frage 53 bezeichneten Kegelschnitte, für welche der Mittelpunkt im Endlichen sich befindet, also die Ellipse und die Hyperbel führen auch die Bezeichnung: Centralkegelschnitte.

Erkl. 62. Bei der gleichseitigen Hyperbel geht das in Antwort der Frage 53 genannte Parallelogramm in einen Rhombus über; es besitzen daher zwei conjugierte Durchmesser stets gleiche Länge und gleiche Neigung gegen die Asymptoten.

Bei der Parabel sind alle Durchmesser parallel zur Parabelachse und von unendlicher Grösse, die zugehörigen conjugierten Durchmesser liegen ganz in unendlicher Ferne. Es gibt aber zu jedem Durchmesser eine conjugierte Richtung, nämlich die Richtung der Tangente in dem im Endlichen befindlichen Endpunkte des Durchmessers.

Frage 54. Welche Beziehungen ergeben sich für die zum Mittelpunkte eines Kegelschnittes gehörige Strahleninvolution?

Erkl. 63. Die Durchmesserinvolution eines Kegelschnittes besitzt ein Paar Achsen, welche man die Hauptachsen des Kegelschnittes nennt. Besitzt die Durchmesserinvolution zwei Paar Rechtwinkelstrahlen, so besteht sie aus lauter Rechtwinkelstrahlen und der Kegelschnitt geht in einen Kreis über.

Erkl. 64. Für den Mittelpunkt des Kegelschnittes geht die centrische Collineation desselben in eine centrische Symmetrie über.

Erkl. 65. Die zum Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbel gehörige Strahleninvolution ist eine symmetrische Involution, die zum Mittelpunkte einer Parabel gehörige Strahleninvolution ist eine parabolische Involution.

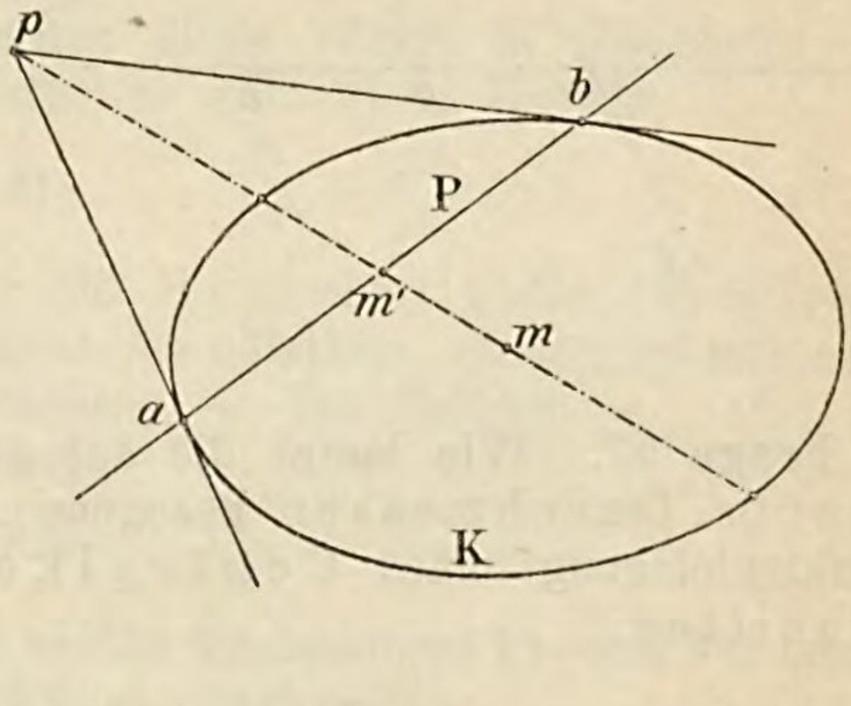
Erkl 66. Ist ab, siehe Figur 67, eine beliebige Sehne eines Kegelschnittes, so gibt die Verbindungslinie ihres Halbierpunktes m' mit dem Kegelschnittmittelpunkt m den zur Richtung ab conjugierten Durchmesser, denn die Schnittpunkte dieses Durchmessers mit dem Kegelschnitt, sind die Berührpunkte der parallel zu ab an den Kegelschnitt K möglichen Tangenten. Nimmt man ab als Polare, so liegt ihr Pol auf mm'. Hieraus folgt aber der Satz:

„Die Verbindungslinie eines ausserhalb eines Kegelschnittes liegenden Punktes mit dem Mittelpunkte der durch seine Polare begrenzten Sehne geht stets durch den Kegelschnittmittelpunkt.“

Frage 55. Welche Sätze für die Hyperbel folgen aus der in Antwort der Frage 54 hervorgehobenen Eigenschaft, dass die Asymptoten mit jedem Paar conjugierter Durchmesser je vier harmonische Strahlen bilden?

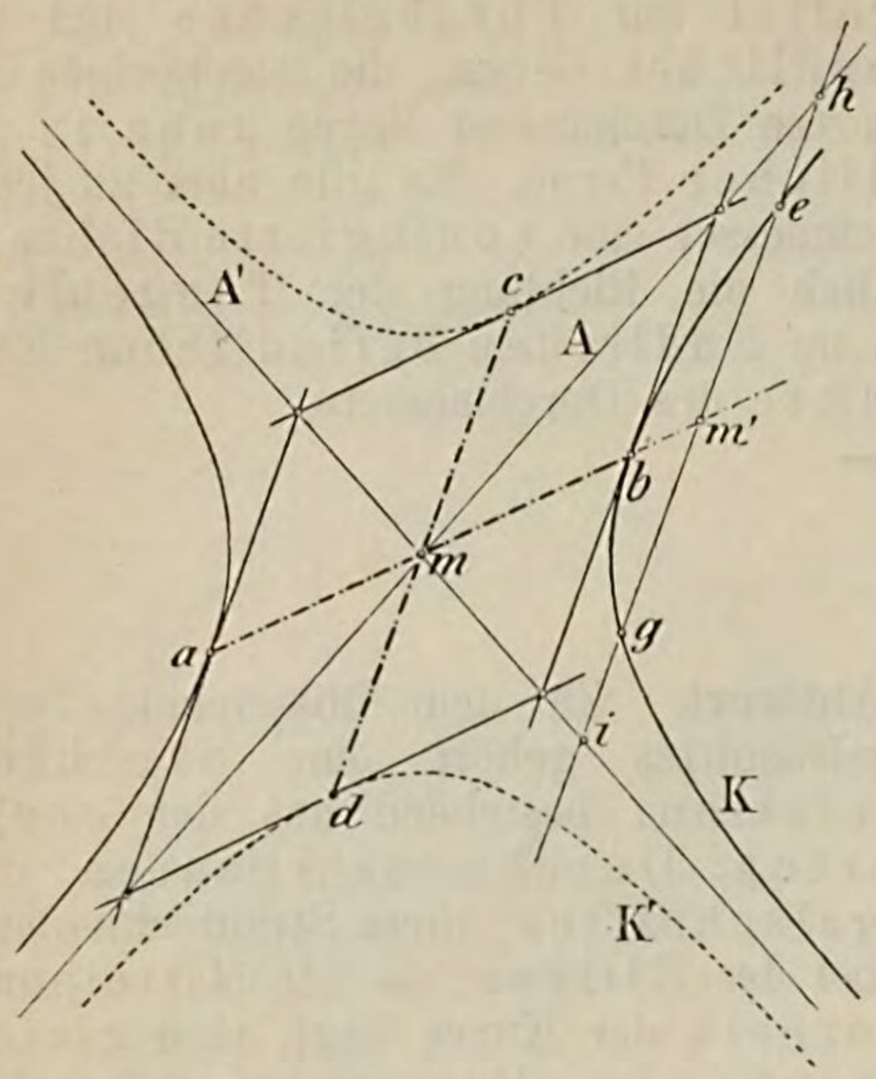
Antwort. Zu dem Mittelpunkte eines Kegelschnittes gehört eine Strahleninvolution, bestehend aus den conjugierten Durchmesserpaaren des Kegelschnittes; diese Strahleninvolution ist bei der Ellipse, da der Mittelpunkt innerhalb der Kurve liegt, eine gleichlaufende oder elliptische, d. h. ohne Doppelstrahlen; bei der Hyperbel dagegen eine ungleichlaufende oder hyperbolische mit zweien reellen Doppelstrahlen, den Asymptoten der Hyperbel. Diese bilden demnach mit jedem Paare conjugierter Durchmesser vier harmonische Strahlen, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, III. Teil, 1. Hälfte, Seite 143 u. ff.

Figur 67.



Antwort. Aus der Eigenschaft, dass je zwei conjugierte Durchmesser

Figur 68.



mit den Asymptoten vier harmonische Strahlen bilden, folgen einige Sätze, welche wegen ihrer Bedeutung für später folgende Konstruktionen hier besonders erwähnt werden sollen.

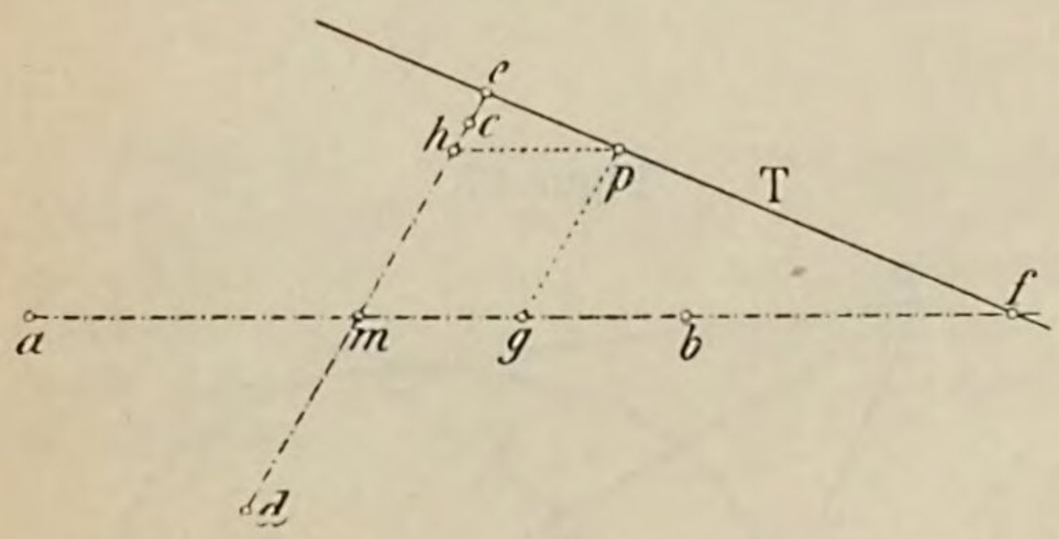
Zunächst ergibt sich, dass der Berührpunkt b, siehe Figur 68, jeder Tangente der Mittelpunkt des zwischen den Asymptoten liegenden Stückes der Tangente sein muss.

Zieht man nun eine zur Tangente parallele Sehne, welche den verlängerten Durchmesser ab, siehe Figur 68, in m' schneidet, so ist der Punkt m' sowohl der Mittelpunkt der Strecke $\overline{eg}$ als auch der Strecke $\overline{hi}$, woraus die Gleichheit der Strecken $\overline{gi}$ und $\overline{he}$ folgt. Man hat also folgenden Satz:

„Die zwischen den Asymptoten und den Kurvenpunkten liegenden Abschnitte einer Hyperbelsekante sind von gleicher Grösse."

Frage 56. Was versteht man unter der auf conjugierte Durchmesser bezogenen Gleichung eines Centralkegelschnittes?

Figur 69.



Antwort. Sind, siehe Figur 69, $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ zwei conjugierte Durchmesser eines Centralkegelschnittes zunächst einer Ellipse, so kann man einen beliebigen Punkt der Kurve, z. B. den Punkt p durch Parallele zu den Durchmessern mit letzteren in eine gewisse Beziehung bringen, indem man die Längen $\overline{pg}$ und $\overline{hp}$ mit den Längen $\overline{mb}$ und $\overline{mc}$ zu einer Gleichung vereinigt. Man nennt eine solche Gleichung die auf conjugierte Durchmesser bezogene Mittelpunktsgleichung des Kegelschnittes.

Frage 57. Wie lautet die auf conjugierte Durchmesser bezogene Mittelpunktsgleichung eines Centralkegelschnittes?

Antwort. Für die Ellipse erhält man, wenn T, siehe Figur 69, eine Tangente der Kurve im Punkte p darstellt, folgendes:

Es sei $\overline{mb} = a'$, $\overline{mc} = b'$, ferner $\overline{mg} = \overline{hp} = x'$, $\overline{mh} = \overline{gp} = y'$, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ehp und emf die Beziehung:

$$78) \ldots \frac{\overline{hp}}{\overline{mf}} = \frac{\overline{ep}}{\overline{ef}}$$

desgleichen aus der Aehnlichkeit der Dreiecke:

pgf und emf

die Gleichung:

$$79) \ldots \frac{\overline{pg}}{\overline{em}} = \frac{\overline{pf}}{\overline{ef}}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen 78 und 79 erhält man die neue Gleichung:

$$\frac{\overline{hp}}{\overline{mf}} + \frac{\overline{pg}}{\overline{em}} = \frac{\overline{ep}}{\overline{ef}} + \frac{\overline{pf}}{\overline{ef}}$$

oder in Rücksicht auf die oben angegebenen Bezeichnungen:

$$80) \ldots \frac{x'}{mf} + \frac{y'}{em} = \frac{ep + pf}{\overline{ef}} = \frac{ef}{\overline{ef}} = 1$$

Nun sind aber die Linien pg und hp die Polaren der Punkte f und e hinsichtlich des Kegelschnittes, daher sowohl die Punkte f, g, a, b, als auch die Punkte e, h, c, d je vier harmonische Punkte. Es findet somit, weil m sowohl die Mitte von $\overline{ab}$ als auch jene von $\overline{cd}$ darstellt, auch die Beziehung statt:

$$\overline{mb^2} = \overline{mg} \cdot \overline{mf}$$

und

$$\overline{mc^2} = \overline{mh} \cdot \overline{me}$$

oder:

$$a'^2 = x \cdot \overline{mf}$$

und

$$b'^2 = y \cdot me$$

daher:

$$\overline{mf} = \frac{a'^2}{x'}$$

und

$$\overline{me} = \frac{b'^2}{y'}$$

Werden diese Werte in Gleichung 80) eingesetzt, so geht diese über in:

$$81) \ldots \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

Für die Hyperbel bleibt die Betrachtung ganz die nämliche, nur ergibt sich statt des Zeichens + das Zeichen —, also die Gleichung:

$$82) \ldots \frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

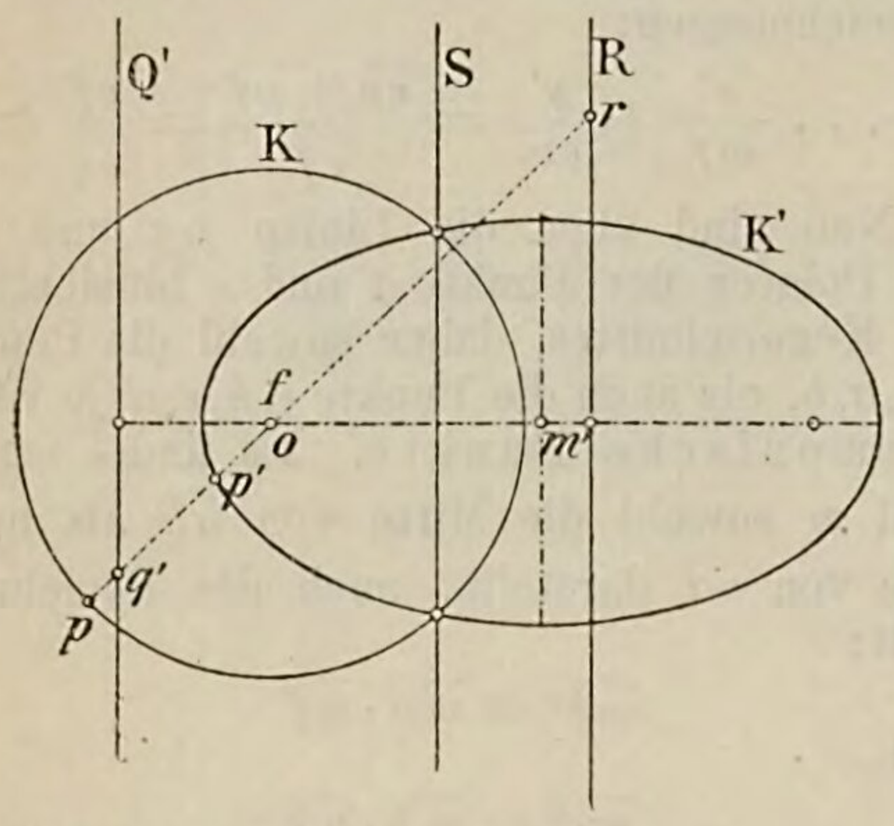
Die beiden Gleichungen 81) und 82) lassen sich auch so anschreiben:

$$83) \ldots x'^2 b'^2 \pm y'^2 a'^2 = a'^2 b'^2$$

Frage 58. Welche Besonderheiten ergeben sich für die Centralcollineation eines Kreises, wenn das Centrum mit dem Kreismittelpunkt zusammenfällt?

Antwort. Fällt das Centrum o der Collineation mit dem Kreismittelpunkte zusammen, s. Figur 70, so erkennt man zunächst, dass die durch o zu S gezogene Senkrechte

Figur 70.



Erkl. 66a. Die Entfernung des Punktes o von R sei mit (oR), jene des Punktes p' von Q' mit $(q'Q')$ bezeichnet.

eine Achse des Kegelschnittes sein muss.

Sind ferner R und Q die Gegenachsen und pp' ein Paar entsprechender Punkte, so hat man, siehe Figur 70, die Beziehung:

$$(oq, pr) = (oq', p'r')$$

oder:

84) . . . $(o\infty, pr) = (oq', p'\infty)$

Schreibt man die durch die Gleichung 84) angedeuteten Doppelverhältnisse wirklich an, so erhält man:

$$\frac{\frac{\overline{op}}{\overline{or}}}{\frac{\overline{\infty p}}{\overline{\infty r}}} = \frac{\frac{\overline{op'}}{\overline{o\infty}}}{\frac{\overline{q'p'}}{\overline{q'\infty}}}$$

oder:

85) . . . $\frac{\overline{op}}{\overline{or}} = \frac{\overline{op'}}{\overline{q'p'}}$ oder $\frac{\overline{op}}{\overline{op'}} = \frac{\overline{or}}{\overline{q'p'}}$

Nun ist aber das Verhältnis:

$$\frac{\overline{or}}{\overline{q'p'}}$$

gleich dem Verhältnis der Abstände von o und R und von p' und Q', daher ist auch, s. Erkl. 66a:

85a) . . . $\frac{\overline{op'}}{(p'Q')} = \frac{\overline{op}}{(oR)} =$ konstant

d. h. der Punkt p' ist der Ort eines Punktes, der von einem festen Punkte o und einer festen Geraden Q' ein gegebenes Abstandsverhältnis besitzt. Da aber p' einem Kegelschnitt angehört, so muss der feste Punkt o ein Brennpunkt, die Linie Q' die Brennpunktspolare, d. h. die Leitlinie oder Direktrix des Kegelschnittes sein. Man kann also folgenden Satz aussprechen:

> „Besteht zwischen einem Kreise und einem Kegelschnitte centrische Collineation derart, dass das Centrum mit dem Kreismittelpunkt zusammenfällt, so ist derselbe zugleich ein Brennpunkt des Kegelschnittes."

Frage 59. Von welchen Umständen hängt die Art des Kegelschnittes ab, der zu einem um seinen Brennpunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreise unter den in Frage und Antwort 58 bezeichneten Bedingungen in centrisch-collinearem Zusammenhange steht?

Antwort. Die Art des Kegelschnittes hängt von der Lage der zum Kreise K gehörigen Gegenachse R gegen die Kreislinie K ab. Je nachdem nämlich die Gerade R ganz ausserhalb des Kreises K liegt, den Kreis K berührt oder aber in

Erkl. 67. Mit Bezugnahme auf die Erkl. 41a gehört die Strahleninvolution des Cen-

trums o beiden Kurven K und K' gemeinsam an, ist somit eine rechtwinklige Involution:

„Man kann aus diesem Grunde den Brennpunkt auch kennzeichnen als jenen Punkt in der Ebene des Kegelschnittes, für welchen die zugehörige Strahleninvolution eine rechtwinklige ist."

Dreht sich um einen Brennpunkt des Kegelschnittes eine Sehne, so bleibt die zu ihr in jeder Lage conjugierte Polare stets normal zur ersteren Linie und ihr Schnittpunkt mit der Direktrix gibt den Pol der ursprünglichen Sehne, das eben Gesagte kann man mit anderen Worten auch so ausdrücken:

„Das zwischen dem Berührpunkt und der Direktrix liegende Stück einer Kegelschnittstangente erscheint vom Brennpunkte aus gesehen, stets unter einem rechten Winkel."

Frage 60. Welche Sätze folgen aus der Eigenschaft, dass die zu einem Brennpunkte eines Kegelschnittes gehörige Strahleninvolution eine rechtwinklige ist?

Erkl. 68. Die in Antwort der Frage 60 genannten unendlich fernen ideellen Brennpunkte eines Kegelschnittes kann man auch die unendlich fernen Kreispunkte der Ebene nennen, weil sie sämtlichen Kreisen der Ebene insoferne gemeinsam sind, als sie die Durchschnittspunkte der nicht reellen Doppelstrahlen der zu den Kreismittelpunkten gehörigen rechtwinkligen Strahleninvolution mit der unendlich fernen Geraden darstellen.

Erkl. 69. Die in Antwort der Frage 60 genannte unendlich ferne Gerade in der Ebene eines Kegelschnittes kann man auch als die dritte Hauptachse desselben bezeichnen, so dass ein Kegelschnitt eigentlich drei Hauptachsen derart besitzt, dass jede Achse die Polare des Schnittpunktes der beiden übrigen Achsen ist.

Erkl. 70. Besitzt der zum Kegelschnitte centrisch collineare Kreis einen Halbmesser gleich der Länge der Brennpunktsachse, so fällt die Collineationsachse zusammen mit der zum zweiten Brennpunkt gehörigen Polaren des Kegelschnittes.

Erkl. 71. Ist die centrische Collineation zwischen Kreis und Kegelschnitt eine harmonische, siehe Frage und Antwort 42 sowie Erkl. 43, so fallen die Gegenachsen zusammen mit der zum Collineationscentrum gehörigen Brennzweien Punkten schneidet, besitzt das Verhältnis:

$$\frac{\overline{op}}{(oR)}$$

einen Wert kleiner, gleich oder grösser als die Einheit, der Kegelschnitt ist also entweder eine: Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

Antwort. Die zu einem Brennpunkte gehörige Strahleninvolution schneidet sowohl auf der zweiten Kegelschnittsachse als auch auf der unendlich fernen, der Geraden R entsprechenden Geraden R' eine elliptische Punktinvolution aus, welche bekanntlich ein zum Mittelpunkte der Involution symmetrisch liegendes Punktpaar besitzt.

Der Mittelpunkt der auf erstgenannter Kegelschnittachse liegenden Involution ist aber der Kegelschnittmittelpunkt.

Das genannte symmetrische Punktpaar liegt also symmetrisch zum Kegelschnittmittelpunkt. Man bezeichnet diese Punkte wohl auch als die ideellen Doppelpunkte der elliptischen Punktinvolution oder als die ideellen Brennpunkte des Kegelschnitts. Ein zweites Paar solcher ideeller Doppelpunkte befindet sich auf der unendlich fernen Geraden R'.

Kurz zusammengefasst kann man sagen:

„Ein Kegelschnitt besitzt im Ganzen sechs Brennpunkte, wovon jedoch im allgemeinen nur zwei reell vorhanden sind. Die Achse, auf welcher sie liegen, heisst die Brennpunktsachse. Auf der zweiten oder Nebenachse des Kegelschnittes liegen im nämlichen Abstande vom Mittelpunkte wie die reellen Brennpunkte, zwei

punktspolaren, bezw. Direktrix des Kegelschnittes. Der Kreisdurchmesser ist gleich dem Parameter des Kegelschnittes.

Erkl. 72. Da jeder Kegelschnitt zu einem Kreise, dessen Mittelpunkt ein Brennpunkt des Kegelschnittes ist, in centrisch-collinearer Beziehung steht, so folgt hieraus auch, dass zwei Kegelschnitte mit gemeinsamem Brennpunkt unter sich selbst centrisch-collinear sein müssen, bezüglich dieses gemeinsamen Brennpunktes als Centrum.

ideelle Brennpunkte, desgleichen sind zwei solcher Punkte auf der unendlich fernen Geraden R' des Kegelschnittes vorhanden."

Anmerkung 16. Es gibt eine Reihe von Sätzen, welche sich auf Eigenschaften der Brennpunkte eines Kegelschnittes beziehen. Hier sollen nur einige erwähnt werden, welche später für wichtige darstellend-geometrische Konstruktionen Anwendung finden.

Ist p ein Punkt eines Kegelschnittes, so gehört zu demselben eine Strahleninvolution, deren Achsen die Nebenachse des Kegelschnittes in zweien Punkten u und v treffen, welche mit einem der Brennpunkte verbunden, ein rechtwinkliges Strahlenpaar liefern, da ja die zum Brennpunkte f gehörige Strahleninvolution eine rechtwinklige ist. Die vier Punkte p, f, u und v liegen demnach auf einer Kreislinie K und man hat folgenden Satz:

„Die Achsen der zu einem Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes gehörigen Strahleninvolution schneiden die Nebenachse des Kegelschnittes in zweien Punkten, welche mit dem gegebenen Punkte einer durch die Brennpunkte des Kegelschnittes gehenden Kreislinie K angehören."

Liegt der Punkt p ausserhalb des Kegelschnittes, so bilden die genannten Achsen der Strahleninvolution die Halbierlinien des Winkels der von p an den Kegelschnitt möglichen Tangenten.

Anmerkung 17. Die Achsen der zu einem Punkte p gehörigen Strahleninvolution, desgleichen die Achsen des Kegelschnittes sind conjugierte, aufeinander senkrecht stehende Strahlenpaare und bilden somit Tangenten an eine Parabel, deren Direktrix die Mittelpunktssekante von p ist. Der Brennpunkt f' dieser Parabel ist jener Durchschnittspunkt des Tangentenvierseites, welcher der Diagonale pm gegenüberliegt. Letzterer Punkt ist aber zufolge der rechten Winkel bei p und m der Höhenschnittpunkt des durch die Kegelschnittachsen sowie eine der Achsen der Involution von p gebildeten Dreieckes und liegt daher gleichfalls auf der Kreislinie K.

Nach einem bekannten planimetrischen Satze bilden aber die Linien $f'm$ und $f'p$ mit den Dreieckshöhen, d. h. mit den Kegelschnittsachsen gleiche Winkel.

Ausserdem ist schon früher, s. Erkl. 42, erwähnt worden, dass der Punkt f' als Parabelbrennpunkt der vierte harmonische Punkt zu den Punkten p, g und h ist und mit denselben auf einer Kreislinie K^0 liegt, wenn g und h die Doppelpunkte der Involution auf P bezeichnen.

Als weitere Tangenten an obengenannte Parabel erkennt man sofort einerseits die Polare P von p, dann die durch den Mittelpunkt der Involution auf P zu P gezogene Senkrechte, endlich, die beiden Kegelschnittnormalen in den Punkten g und h, für den Fall der Punkt g ausserhalb des Kegelschnittes liegt. Zusammengefasst kann man folgende Sätze aussprechen:

„Die Achsen der zu einem Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes gehörigen Strahleninvolutionen bilden mit den Hauptachsen des Kegelschnittes vier Tangenten einer Parabel, deren Direktrix die Mittelpunktssekante des gegebenen Punktes ist."

„Die Verbindungslinien des Brennpunktes dieser Parabel mit dem Kegelschnittmittelpunkt und dem Mittelpunkt der gegebenen Strahleninvolution bilden mit den Kegelschnittachsen gleiche Winkel."

Fällt der Punkt p auf die Peripherie des Kegelschnittes, so geht die Polare P in die Kegelschnitttangente über, so dass man folgenden weiteren Satz erhält:

„Für jeden Punkt eines Kegelschnittes bilden die Tangente und die Normale mit den Hauptachsen Tangenten an eine Parabel, deren Direktrix der durch den Punkt gezogene Durchmesser ist."

Man erhält leicht noch weitere Tangenten an diese Parabel; denn zieht man etwa durch den Punkt p nach den Brennpunkten des Kegelschnittes Strahlen, so stehen die zu diesen Strahlen conjugierten Strahlen auf ihnen senkrecht, sind somit gleichfalls Parabeltangenten.

d) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 40. Von einem Centralkegelschnitt sind gegeben fünf Punkte. Man soll:

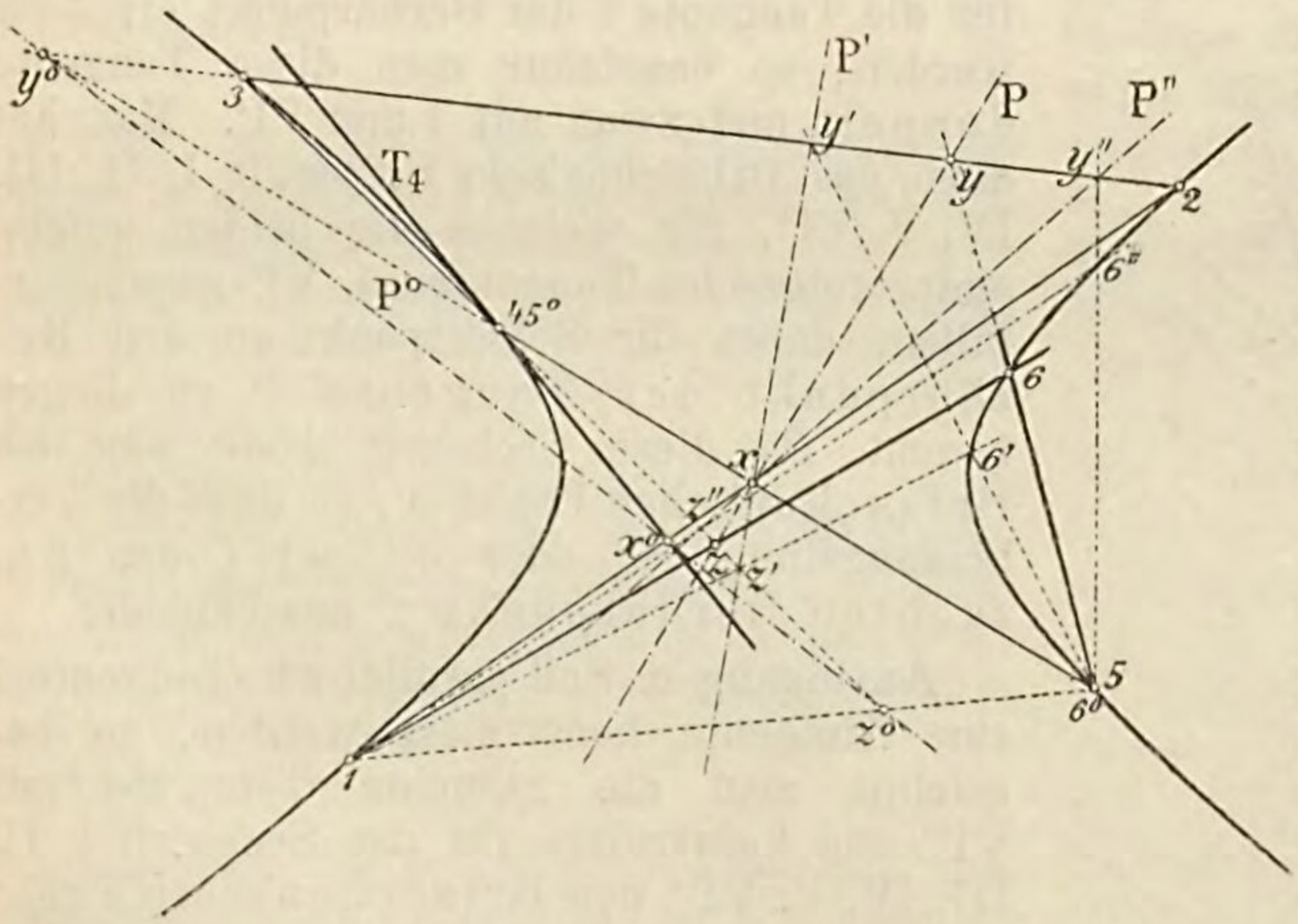
a) beliebig viele weitere Punkte,

b) in einem der gegebenen Punkte die Tangente,

c) zu einem nicht dem Kegelschnitt angehörigen Punkte q die Polare Q

konstruieren.

Figur 71.



Auflösung a. Bezeichnet man die fünf gegebenen Punkte, siehe Figur 71, mit 1, 2, 3, 4, 5, so liefert der Schnitt der Verbindungslinien 12 und 45 einen Punkt x, durch welchen eine ganz beliebige Gerade P gezogen und als Pascal'sche Linie genommen werden kann. Die Verbindungslinien 23 und 34 liefern auf P die Punkte y und z, durch welche die Geraden 56 und 61 hindurchgehen und durch ihren Schnitt den Punkt 6 des Kegelschnittes bestimmen. Hält man den Punkt x fest und zeichnet durch ihn beliebige weitere Gerade P', $P''\ldots$, so erhält man die weiteren Punkte y', y'' und z', z'' und mittels derselben die Kegelschnittpunkte 6' und 6''.

Auflösung b. Will man etwa im Punkte 4, siehe Figur 71, die Tangente T_4 konstruieren, so bezeichne man den Punkt 4 doppelt, nämlich mit 45^0, den Punkt 5 dagegen mit 6^0. Man erhält dann ein Pascal'sches Sechseck 1, 2, 3, 4, 5^0, 6^0, in welchem zwei aufeinander folgende Punkte 4 und 5^0 zusammenfallen, ihre Verbindungslinie gibt daher die Tangente T_4 in 4. Die zu genanntem Sechseck gehörige Pascal'sche Linie P^0 bestimmt sich durch die Schnittpunkte x^0 und y^0 der Linien 12, 45^0 und 23, 5^0 6^0, die Gerade 34 ergibt den Punkt z^0, durch welchen die Tangente T_4 hindurch geht.

Auflösung c. Man verbinde den Punkt q mit dreien der gegebenen Punkte, etwa mit

1, 2 und 3; bestimme mittels des Pascal'schen Satzes die zweiten Schnittpunkte 1′, 2′, 3′ dieser Verbindungslinien mit dem Kegelschnitt; die Schnittpunkte der Diagonalen 12′, 12, 23′ und 2′3 gehören der gesuchten Polaren an.

Man löse die Aufgabe 40 für den Fall, dass einer der gegebenen Punkte des Kegelschnittes oder der Punkt q in unendlicher Ferne liege.

Aufgabe 41. Von einem Kegelschnitt sind gegeben fünf Tangenten. Man soll:

a) beliebig viele weitere Tangenten,

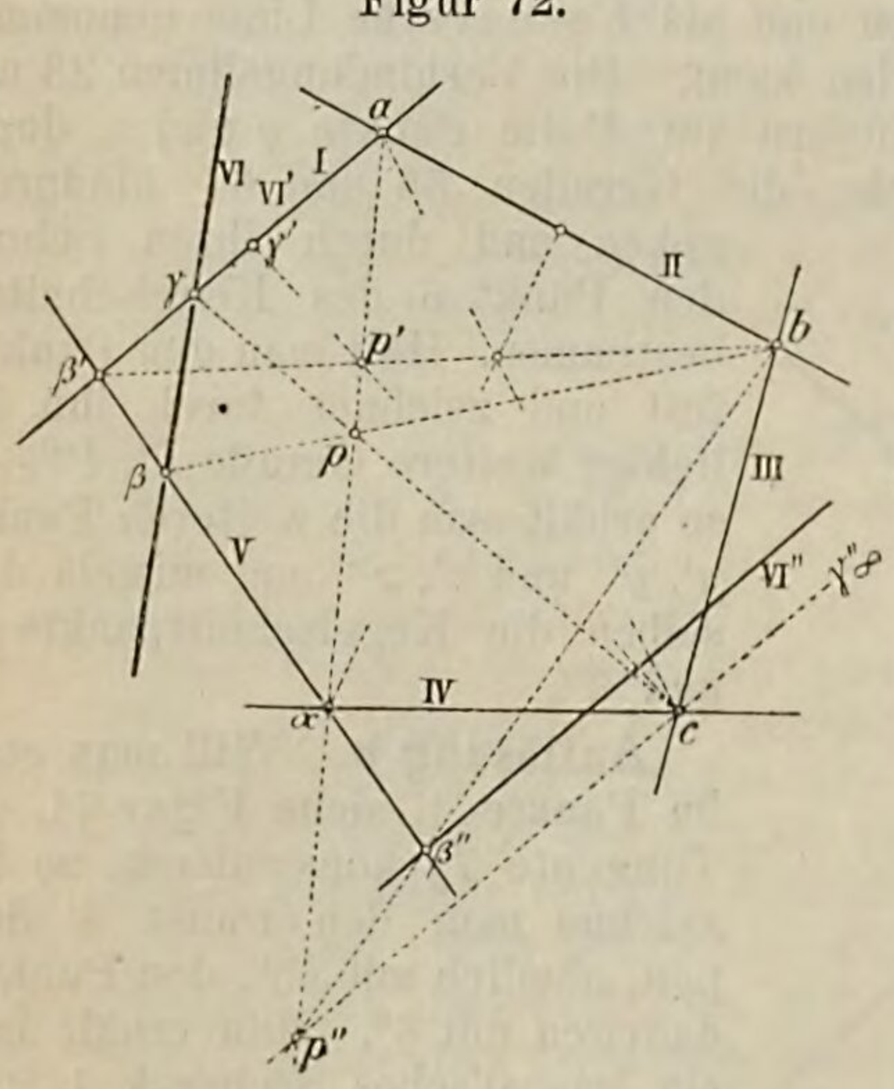
b) für eine der Tangenten den Berührpunkt,

c) parallel zu einer der gegebenen Tangenten eine Tangente,

d) zu einer Geraden Q den Pol q

konstruieren.

Figur 72.



Auflösung a. Bezeichnet man die fünf gegebenen Tangenten, siehe Figur 72, mit I, II, III, IV, V, so liefern die Schnittpunkte a und α von I II und IV V die Verbindungslinie $a\alpha$, auf welcher ein Punkt p beliebig als Brianchon'scher Punkt gewählt werden kann. Durch ihn gehen die Verbindungslinien $b\beta$ und $c\gamma$ der Schnittpunkte von II III und V VI; III IV und VI I und bestimmen hierdurch auf den Tangenten V und I die Punkte β und γ einer Tangente VI. Durch Annahme beliebiger weiterer Punkte auf $a\alpha$ kann man durch Wiederholung des eben angegebenen Verfahrens beliebige weitere Tangenten des Kegelschnittes erhalten.

Auflösung b. Soll z. B., s. Figur 72, für die Tangente I der Berührpunkt ermittelt werden, so bezeichne man diese Tangente doppelt und zwar mit I und VI′. Man hat dann das Brianchon'sche Sechsseit I, II, III, IV, V, VI′, für welches die beiden aufeinander folgenden Tangenten I, VI′ zusammenfallen, daher ihr Schnittpunkt in den Berührpunkt der Tangente I zu liegen kommt. Für dieses Sechsseit erhält man den Brianchon'schen Punkt p', so dass die Verbindungslinie cp' oder $c\gamma'$ auf I den gesuchten Berührpunkt γ' ausschneidet.

Auflösung c. Soll parallel zur Tangente I eine Tangente konstruiert werden, so bezeichne man die gesuchte Tangente mit VI″ und konstruiere für das Sechsseit I, II, III, IV, V, VI″ den Brianchon'schen Punkt p''; es liefert sodann die Verbindungslinie bp'' auf V einen Punkt β'' der gesuchten Tangente VI″.

Auflösung d. Man bestimme den Schnittpunkt a der Tangente I mit Q und zeichne die zweite durch a gehende Tangente V an den Kegelschnitt mittels des Brianchon'schen Satzes und hierauf mit Zuhilfenahme der beiden umbeschriebenen Vierseite I, II, III, V und I, II, III, VI die Polare A von a. In

gleicher Weise verschaffe man sich den Schnittpunkt c einer anderen Tangente, etwa III, mit Q, und konstruiere die zweite durch c gehende Tangente IV an den Kegelschnitt, sowie die Polare C von c. Der Schnittpunkt q der Polaren A und C ist der Pol der Geraden Q.

Man löse die Aufgabe 41 für den Fall eine der gegebenen Tangenten des Kegelschnittes oder die gegebene Gerade Q in unendlicher Ferne liege.

Anmerkung 18. Lässt man, siehe Figur 71, die Gerade P um den Punkt x sich drehen, so beschreibt sie ein Strahlbüschel, das perspektivisch liegt sowohl zu dem Büschel der Strahlen $5(y, y', y'' \cdots)$, als auch zu jenem der Strahlen $1(z, z', z'' \cdots)$; die letzteren beiden Büschel sind somit projektiv in allgemeiner Lage und ihr Erzeugnis ist, wie auch schon früher bewiesen wurde, ein Kegelschnitt.

Lässt man dagegen, siehe Figur 72, den Punkt p die Gerade $a\alpha$ durchlaufen, so beschreibt derselbe eine Punktreihe, die sowohl zu der Reihe der Punkte β auf der Tangente V als auch zu der Reihe der Punkte γ auf der Tangente I perspektivisch liegt, letztere beiden Reihen sind somit projektiv in allgemeiner Lage und ihr Erzeugnis ist ein Kegelschnitt. Dass das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen identisch ist mit dem Erzeugnis zweier projektiven Strahlbüschel, ist gleichfalls schon früher bewiesen worden, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens III. Teil, 1. Hälfte, Seite 158.

Aufgabe 42. Von einem Centralkegelschnitt sind gegeben fünf Punkte. Man soll den Kegelschnitt mittels eines zu ihm centrisch-collinearen Kreises konstruieren, sowie seinen Mittelpunkt und seine Hauptachsen bestimmen.

Erkl. 73. Schneller als auf die in der Figur 73 angedeutete Weise gelangt man zum Ziele, wenn man Rücksicht nimmt auf die in Anmerkung 10 speziell für den Kreis angegebene Konstruktion der zu einer Geraden bezw. zu einem Punkte gehörigen Punkt- bezw. Strahleninvolution.

Bestimmt man nämlich jenen Kreis, der die Punktinvolution auf R ausschneidenden Kreisschar, dessen Mittelpunkt auf R liegt, so enthält derselbe die Punkte m und m', durch welche jene Kreissehnen von K hindurch gehen, denen im Kegelschnitt K' die Achsen entsprechen.

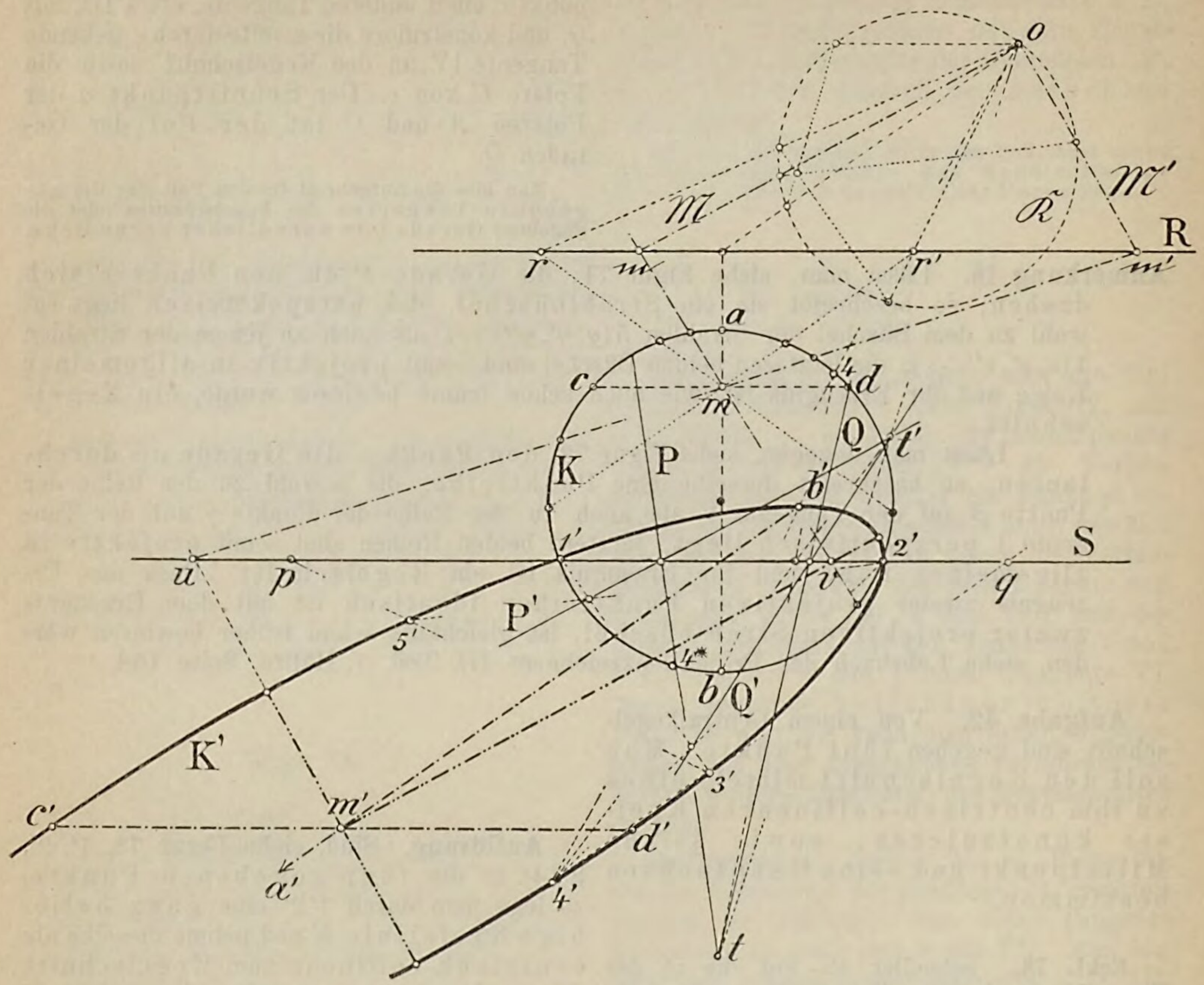
Erkl. 74. Eine weitere, ebenfalls sehr zweckmässige Konstruktion der Achsen gewinnt man durch Benützung der in Anmerkung 16 und 17 aufgeführten Sätze.

Denkt man sich nämlich vom Centrum o Tangenten an den Hilfskreis K gezogen, so sind diese Linien zugleich Tangenten an den Kegelschnitt und man kann sich leicht die Berührpunkte mit denselben verschaffen und durch diese sowie das Centrum o eine Kreislinie legen.

Der vierte harmonische Punkt f' auf diesem Kreise zu den genannten drei

Auflösung. Sind, siehe Figur 73, 1', 2', 3', 4', 5' die fünf gegebenen Punkte, so lege man durch 1'2' eine ganz beliebige Kreislinie K und nehme dieselbe als centrisch-collinear zum Kegelschnitt K', so kennt man zunächst die Achse S der Collineation in der Verbindungslinie 1' 2'. Mittels des Vierecks 1'2'3'5', dessen Gegenseiten 1'2' und 3'5' sich in einem Punkte p von S schneiden, ergibt sich die Polare P' des Punktes p, welcher im Kreise die Polare P entspricht; desgleichen bestimmt sich mittels des Viereckes 1'2'3'4' die Polare Q' des Schnittpunktes q' hinsichtlich des Kegelschnittes, der im Kreise die Polare Q entspricht. P' und Q', ebenso P und Q schneiden sich in einem Paar entsprechender Punkte $t't$; demnach ist die Verbindungslinie tt' ein Ort für das Centrum o. Verbindet man ferner t' mit einem der fünf gegebenen Punkte, etwa mit 4', so entspricht dieser Verbindungslinie die Gerade ts, welche auf dem Kreise zwei Punkte 4 und 4* bestimmt, die als dem Punkte 4' entsprechend genommen werden können. Es ist also die Verbindungsgerade 4'4 oder 4'4* ein zweiter Ort für das Centrum o. In der Figur 73 ist die Linie 4'4 gewählt und dadurch das Centrum o bestimmt worden.

Figur 73.



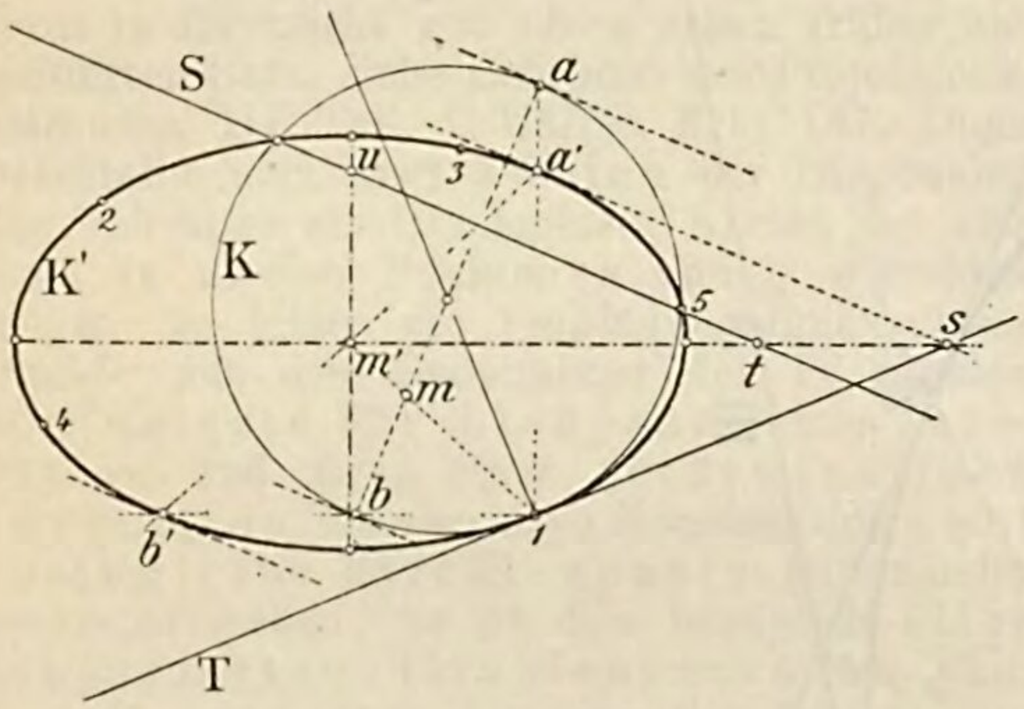
Punkten gibt den Brennpunkt jener Parabel, für welche die Achsen Tangenten sind. Die Verbindungslinien dieses Brennpunktes mit dem Kegelschnittmittelpunkt und dem Punkte o bilden aber mit den Achsen gleiche Winkel, wodurch die Lage der ersteren bestimmt ist.

Zeichnet man ferner die Halbierlinien des Winkels der Kegelschnitttangenten im Punkte o, so geht durch deren Schnittpunkte mit der Nebenachse des Kegelschnittes sowie durch o ein Kreis, der auf der Brennpunktsachse die Brennpunkte des Kegelschnittes K' ausschneidet, womit dann auch die Achsenlängen von K' bestimmt sind.

Nunmehr kann die Gegenachse R und damit auch für jeden Kreispunkt der entsprechende Kegelschnittpunkt konstruiert werden.

Zur Bestimmung des Mittelpunktes m' des Kegelschnittes ermittele man den Pol m der Gegenachse R, letzterem Punkte m entspricht der Punkt m'. Jeder durch m gehenden Kreissehne entspricht ein Kegelschnittdurchmesser, beispielsweise entsprechen den beiden aufeinander senkrechten Kreissehnen $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$, zwei conjugierte Durchmesser $a'b'$ und $c'd'$. Mittels derselben lassen sich die Hauptachsen nach einem der im ersten Teile dieses Lehrbuches, S. 78 u. ff., angegebenen Verfahren ermitteln. Will man aber die Achsen direkt, ohne Zuhilfenahme zweier conjugierten Durchmesser konstruieren, so benütze man die zu den Punkten m und m' gehörige Strahleninvolution. Dem Punkte m des Kreises gehört, wie bekannt, eine Strahleninvolution an, gebildet aus

Figur 74.



den conjugierten Polaren des Kreises; derselben entspricht perspektiv eine Strahleninvolution mit dem Centrum o als Mittelpunkt; die Achsen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ des letzteren geben die Richtungen der Hauptachsen des Kegelschnittes.

Den Strahlen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ entsprechen die durch die Punkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ nach m gezogenen Kreissekanten, welche auf dem Kreise Sehnen ausschneiden, denen im Kegelschnitt die Hauptachsen entsprechen, siehe auch Erkl. 73 und 74.

Einfacher gelangt man zum Ziele, wenn man sich mittels des Pascal'schen Satzes in einem der gegebenen Punkte, etwa in 1, siehe Figur 74, die Tangente T verschafft und nun den zum Kegelschnitt K' centrisch-collinearen Kreis K durch einen der obigen Punkte, z. B. 5, sowie im Punkte 1 berührend, an T zeichnet. Mittels der beiden Punkte 2 und 4 bestimmt sich die Collineationsachse S; dem zu S senkrechten Kreisdurchmesser $\overline{ab}$ entspricht der Durchmesser $\overline{a'b'}$ und sein Mittelpunkt m' ist zugleich der Kegelschnittmittelpunkt; ihm entspricht auf ab der Punkt m. Die Hauptachsen des Kegelschnittes sind parallel zu den Halbierlinien des Winkels der Geraden T und S, s. Antwort der Frage 50, und ihre Längen bestimmen sich mittels Zuhilfenahme der entsprechenden Kreispunkte.

Anmerkung 19. Die Konstruktion in Aufgabe 40 ergibt für eine angenommene Collineationsachse S zwei Centra der Collineation. Da nun aber zwei Kegelschnitte sich höchstens nur in vier Punkten schneiden, welche auf sechs verschiedene Arten miteinander verbunden werden können, so lassen sich zwei Kegelschnitte im allgemeinen auf zwölf verschiedene Arten in centrisch-collineare Lage bringen.

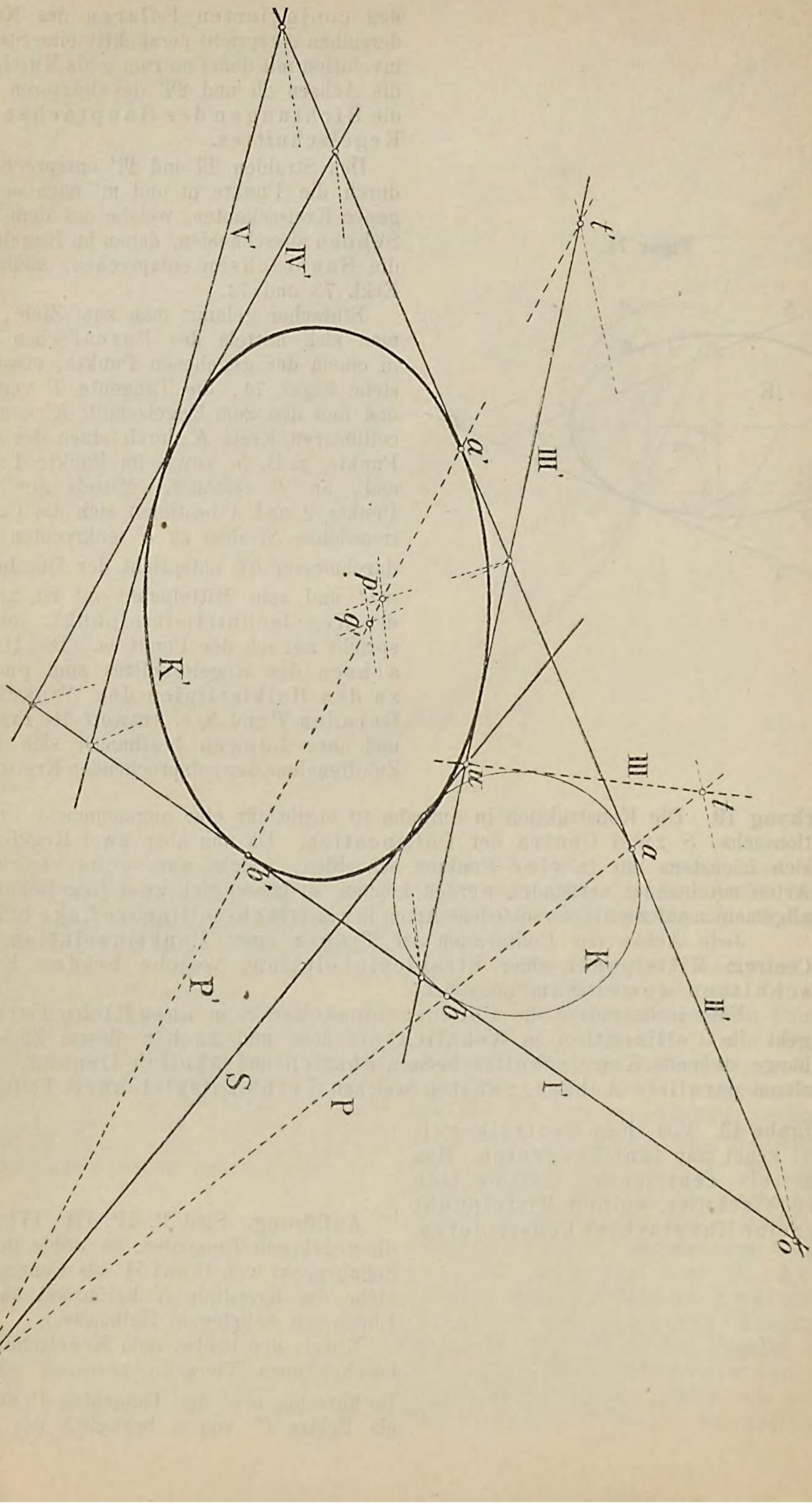
Jede Achse der Collineation ist Träger einer Punktinvolution, jedes Centrum Mittelpunkt einer Strahleninvolution, welche beiden Kegelschnitten gemeinsam angehört.

Fällt insbesondere die Collineationsachse S in unendliche Ferne, so geht die Collineation in Aehnlichkeit über und zwei in diesem Zusammenhange stehende Kegelschnitte heissen ähnlich und ähnlich liegend, sie besitzen parallele Achsen, zwischen welchen Verhältnisgleichheit besteht.

Aufgabe 43. Von einem Centralkegelschnitt kennt man fünf Tangenten. Man soll mittels centrischer Collineation den Kegelschnitt, seinen Mittelpunkt sowie seine Hauptachsen konstruieren.

Auflösung. Sind I′, II′, III′, IV′ und V′ die gegebenen Tangenten, so wähle man den Schnittpunkt von I′ und II′ als Centrum und ziehe die Kreislinie K berührend an diese Linien mit beliebigem Halbmesser.

Mittels der beiden dem Kegelschnitt umbeschriebenen Vierseite bestimmt sich die Berührsehne $\overline{a'b'}$ der Tangenten I′ und II″, als Polare P' von o bezüglich des Kegel-



Figur 75.

Erkl. 75. Für ein Vierseit gilt folgender Satz:

„Die über den Diagonalen eines Vierseites als Durchmesser beschriebenen Kreise schneiden sich in zweien festen Punkten, die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf einer festen Geraden."

Die genannte feste Gerade kann man die Mittelpunktsgerade des Vierseits nennen.

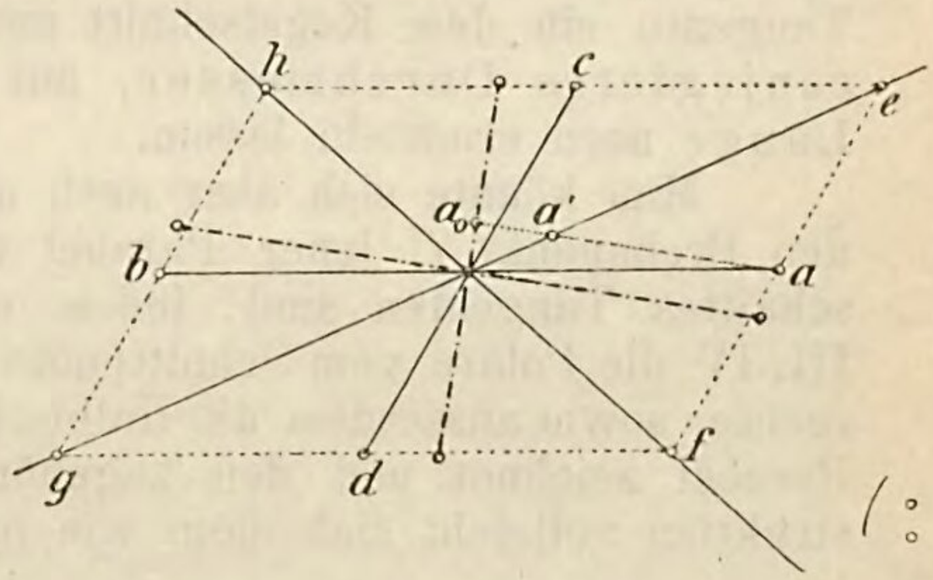
Der Beweis obigen Satzes folgt ohne weiteres in Rücksicht auf einen schon früher angeführten Satz, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, III. Teil, 1. Hälfte, Erkl. 167. Dann beschreibt man über zweien der Diagonalen des Vierseites als Durchmesser Kreise, die sich etwa in zweien Punkten p und q schneiden mögen, so bilden die Verbindungslinien dieser Punkte mit den Endpunkten der Diagonalen conjugierte Strahlenpaare einer Involution und zwar einer rechtwinkligen Involution. Da aber nach Konstruktion zwei conjugierte Strahlenpaare aufeinander senkrecht stehen, so ist dies bezüglich aller conjugierten Strahlenpaare der Fall, es geht somit auch der über der dritten Diagonale als Durchmesser beschriebene Kreis durch die Punkte p und q. Die Mittelpunkte der genannten Kreise liegen aber auf der Halbiersenkrechten zu $\overline{pq}$.

Erkl. 76. Kennt man von einer Hyperbel zwei conjugierte Durchmesser $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$, siehe Figur 76, so erhält man zunächst die Asymptoten, gehend durch die Ecken des Parallelogrammes $efgh$, dessen Mittellinien die gegebenen Durchmesser sind. Die Halbierlinien des Asymptotenwinkels sind die Achsen der Hyperbel der Lage nach. Die Länge der reellen Achse findet sich aus der Beziehung $\alpha = \sqrt{x^2 - x'^2}$, wobei $x = \overline{aa_0}$ und $x' = \overline{a_0a'}$ ist.

schnittes und zwar als Verbindungslinie der Diagonalpunkte p' und q'; ihr entspricht die Kreisberührsehne $\overline{ab}$ als Polare P von o hinsichtlich des Kreises K. P und P' schneiden sich in einem Punkte s der Collineationsachse. Ein weiterer Punkt bestimmt mittels einer der übrigen Tangenten, z. B. der Tangente III'. Dieselbe schneidet P' in einem Punkte t', dem auf P der Punkt t entspricht, durch t geht eine Tangente III an K entsprechend der Tangente III' an K'. Die Tangenten III und III' liefern durch ihren Schnitt u einen zweiten Punkt von S. Nunmehr ist die centrisch-collineare Beziehung zwischen K und K' hergestellt und es können beliebige Punkte oder Tangenten von K' mittels der entsprechenden Punkte oder Tangenten von K konstruiert werden. Die Bestimmung des Mittelpunktes und der Hauptachsen kann in ähnlicher Weise ausgeführt werden wie in Aufgabe 40, siehe auch Anmerk. 20.

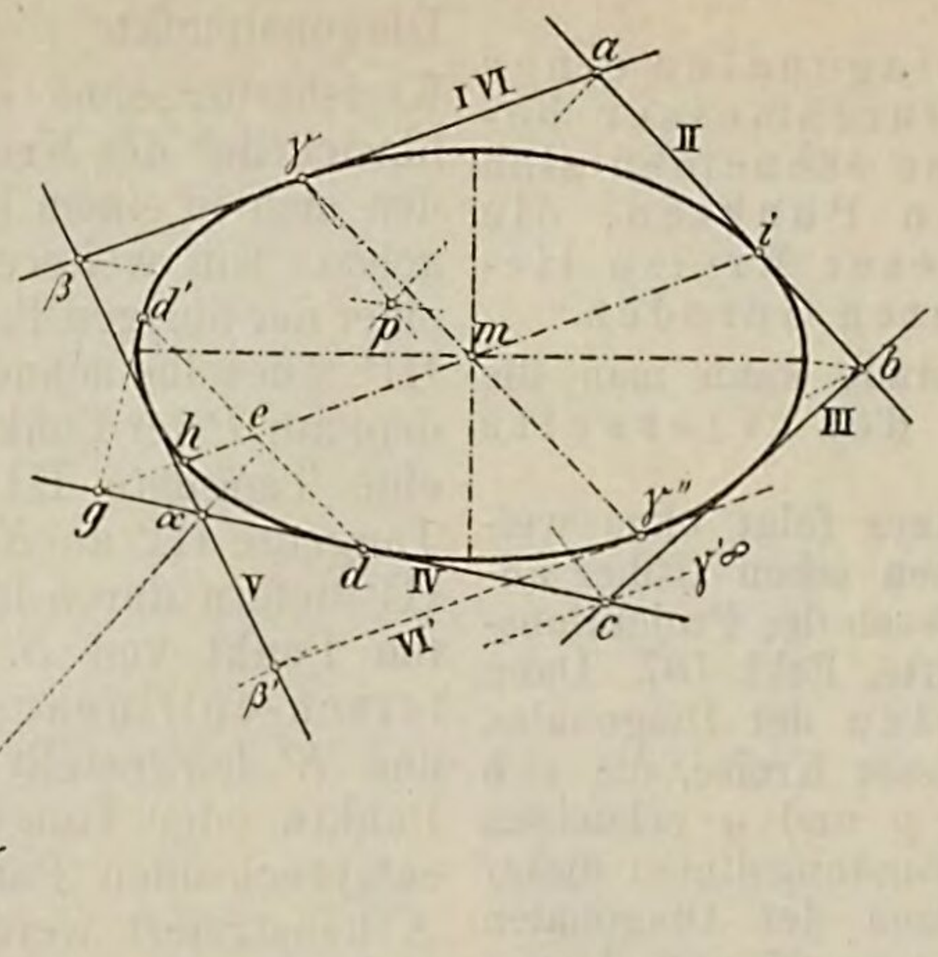
(Da von t zwei Tangenten an den Kreis K möglich sind, so gibt es noch eine zweite Lage S^* der Collineationsachse, für welche K und K' in centrisch-collinearer Beziehung stehen.)

Figur 76.



Anmerkung 20. Soll ein Kegelschnitt aus fünf Tangenten ohne Benützung eines Kreises, sowie sein Mittelpunkt und seine Hauptachsen konstruiert werden, so kann das mit Benützung des Brianchon'schen Satzes wie folgt geschehen: Bei fünf gegebenen Tangenten, siehe Figur 77, konstruiere man in einer derselben, etwa I, ihren Berührpunkt γ, hierauf die zu I parallele Tangente VI' sowie deren Berührpunkt γ'', dann ist $\overline{\gamma\gamma''}$ ein Durchmesser des Kegelschnittes und der Halbierpunkt m von $\overline{\gamma\gamma''}$ ist sein Mittelpunkt. Der zu $\overline{\gamma\gamma''}$ conjugierte Durchmesser ist parallel zu I und VI' und es bleibt nur noch übrig seine Länge zu ermitteln. Zu diesem Zweck bestimme man noch auf einer anderen der gegebenen Tangenten, z. B. IV, denen Berührpunkt d und zeichne die zu $\overline{\gamma\gamma''}$ parallele Sehne $\overline{dd'}$, deren zweiter Endpunkt d' durch die Beziehung $\overline{de} = \overline{d'e}$ sich ergibt. Der Schnittpunkt g von IV mit dem Durchmesser hi ist der Pol von dd' und man erhält, da die Punkte g, e, h, i vier harmonische Punkte bilden und m die Mitte von $\overline{hi}$ ist, die Punkte h und i mittels der Beziehung $\overline{mh^2} = \overline{mi^2} = \overline{me} \cdot \overline{mg}$. Hat man aber zwei conjugierte Durchmesser des Kegelschnittes, so ergeben sich dessen Achsen, für den Fall derselbe eine Ellipse ist, auf die schon früher angegebene Art, s. I. Teil dieses Lehrbuches, Seite 78 u. ff., für den Fall derselbe aber Hyperbel ist, so wie in Erkl. 76 angegeben.

Figur 77.



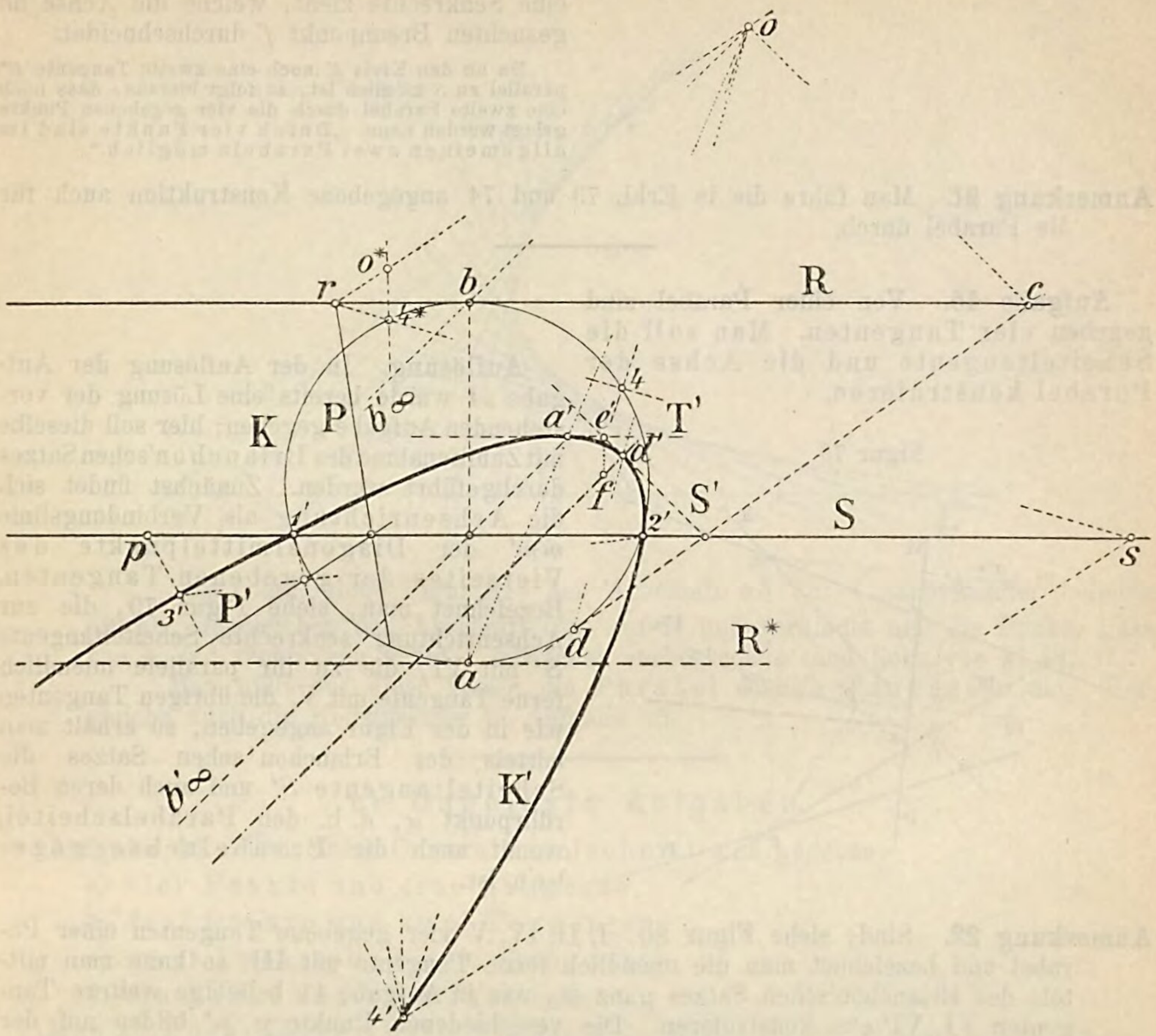
Will man die Konstruktion der Berührpunkte auf den gegebenen Tangenten umgehen, so gelangt man zum Ziele unter Benützung des in Erkl. 75 angeführten Satzes, denn man erhält unmittelbar den Mittelpunkt des Kegelschnittes im Durchschnitte der Mittelpunktsgeraden der Vierseite I, II, III, IV und I, II, III, V, und ausserdem vier Punkte des Kreises, auf welchem die Schnittpunkte rechtwinkliger Tangentenpaare liegen, nämlich die beiden Grundpunktpaare der zu den genannten Vierseiten gehörigen Kreisscharen. Mittels der gegebenen Tangenten erhält man dann sofort auch die zu ihnen senkrechten Tangenten bezw. zu jeder Tangente ein dem Kegelschnitt umbeschriebenes Tangentenrechteck und damit conjugierte Durchmesser, aus welchen sich die Achsen der Grösse und Länge nach ermitteln lassen.

Man könnte sich aber auch mit Bezugnahme auf die Anmerkungen 16 und 17 den Brennpunkt f' jener Parabel verschaffen, an welche die Achsen des Kegelschnittes Tangenten sind, indem man beispielsweise mittels des Vierseites I, II, III, IV die Polare vom Schnittpunkt I II, die durch ihren Mittelpunkt gehende Senkrechte, sowie ausserdem die Halbierlinien des Winkels von I II als Tangenten dieser Parabel zeichnet und den zugehörigen Brennpunkt ermittelt. Die weitere Konstruktion vollzieht sich dann wie in Erkl. 74 beschrieben wurde.

Aufgabe 44. Von einer Parabel sind gegeben vier Punkte. Man soll die Parabel, sowie deren Achse und Brennpunkt konstruiren.

Auflösung. Sind, siehe Figur 78, $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ die vier gegebenen Punkte, so lege man wieder etwa durch $1'$, $2'$ die Collineationsachse S sowie eine beliebige Kreislinie K, letztere als Collinearfigur zur gesuchten Parabel. In diesem Falle kennt man die Gegenachse R des Kreises, und zwar als Tangente an K. Mittels des Vierecks $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ ergibt sich in gleicher Weise wie in Aufgabe 40 die Polare P', welcher im Kreis die Polare P entspricht. Da man nun die Gegenachse R kennt, so liegt das Centrum o auf der Parallelen zu P' durch den Schnittpunkt q von P und R; ein zweiter geometrischer Ort für o ergibt sich am einfachsten mittels einer Parallelen zu P' durch einen der gegebenen Punkte, z. B. durch 4; ihr entspricht die Linie rs, welche den Kreis in zweien Punkten 4 und 4^* schneidet. Die

Figur 78.



Verbindungslinie 4′4 oder 4′4* geht daher gleichfalls durch das Centrum o oder o^*. Es gibt demnach zwei Lagen des Centrums, für welche die Parabel und der Kreis mit S als Achse und R als Gegenachse centrisch-collinear sind.

Dem Kreisdurchmesser $\overline{ab}$ entspricht der unendlich grosse Parabeldurchmesser $a'b'$, die Richtung ob gibt die Achsenrichtung der Parabel an.

Die Achse selbst erhält man am einfachsten mittels der Scheiteltangente der Parabel. Zieht man nämlich durch o die Senkrechte zu ob und durch deren Schnitt mit R eine Kreistangente, so entspricht dieser Linie die Scheiteltangente S' der Parabel und durch ihren Berührpunkt d', entsprechend dem Punkte d, geht parallel zu ob die Achse der Parabel. Der Brennpunkt kann nun auf Grund der früher gelernten Sätze leicht bestimmt werden, z. B. dadurch, dass man im

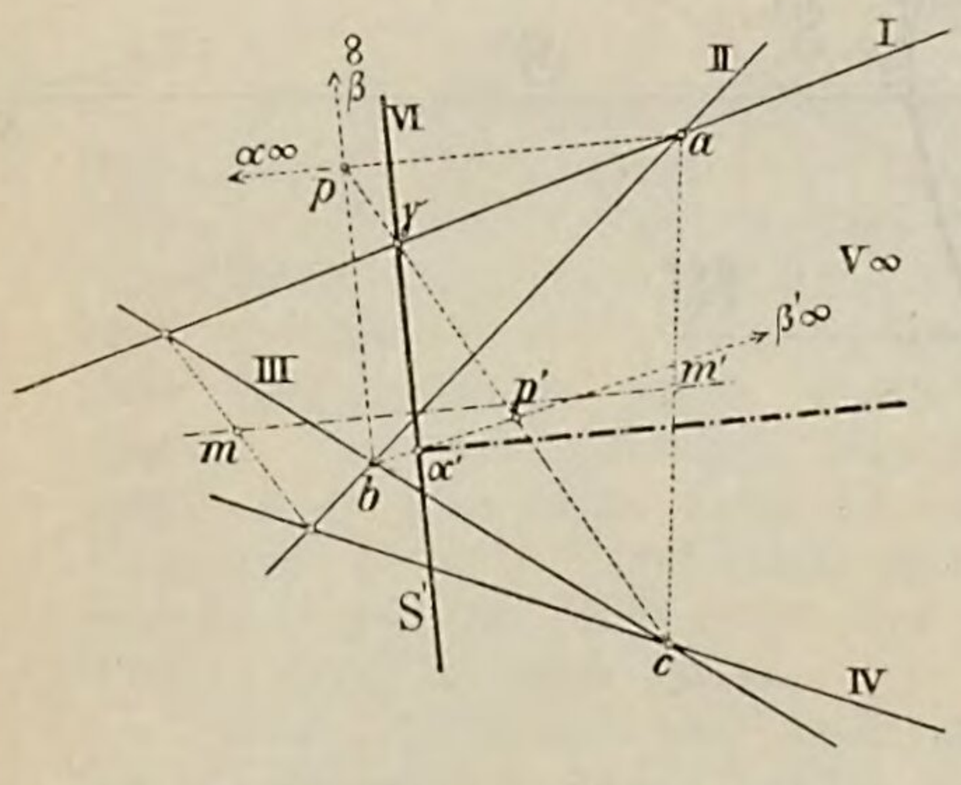
Schnitt von S' und T' zu letzterer Linie eine Senkrechte zieht, welche die Achse im gesuchten Brennpunkt f durchschneidet.

Da an den Kreis K noch eine zweite Tangente R^* parallel zu S möglich ist, so folgt hieraus, dass noch eine zweite Parabel durch die vier gegebenen Punkte gelegt werden kann. „Durch vier Punkte sind im allgemeinen zwei Parabeln möglich."

Anmerkung 21. Man führe die in Erkl. 73 und 74 angegebene Konstruktion auch für die Parabel durch.

Aufgabe 45. Von einer Parabel sind gegeben vier Tangenten. Man soll die Scheiteltangente und die Achse der Parabel konstruieren.

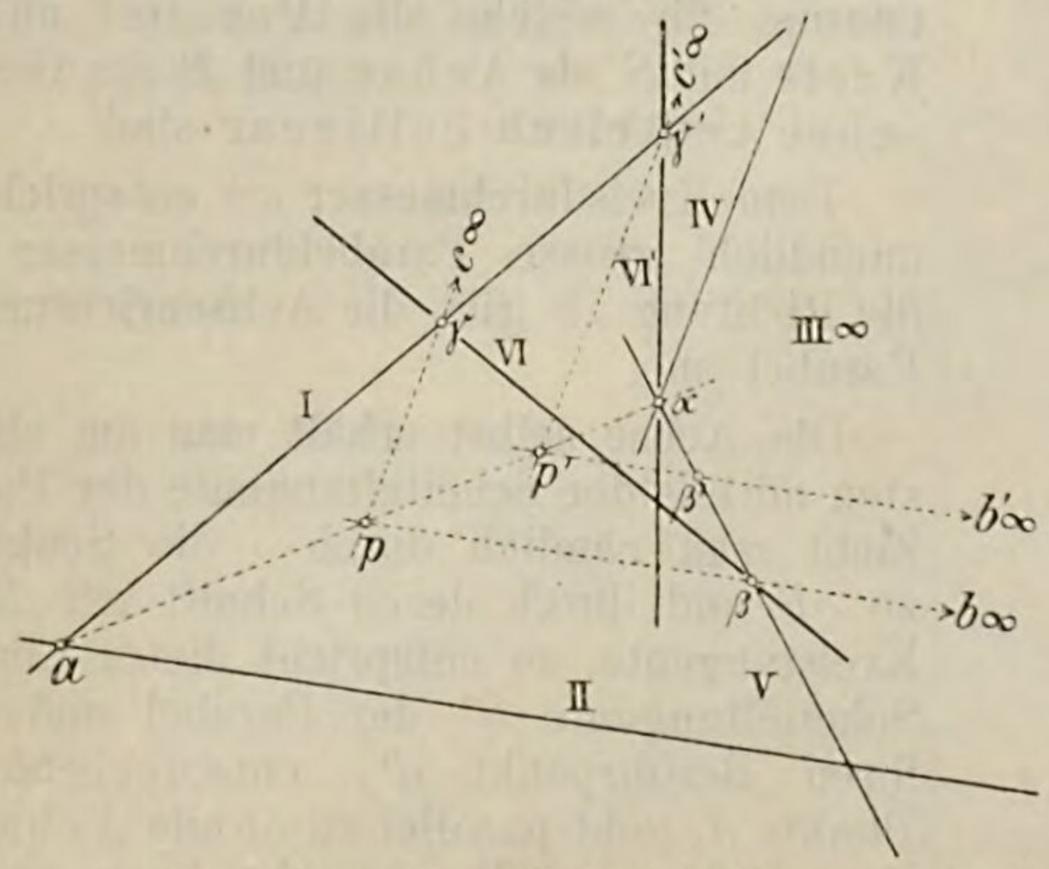
Figur 79.



Auflösung. In der Auflösung der Aufgabe 34 wurde bereits eine Lösung der vorstehenden Aufgabe gegeben; hier soll dieselbe mit Zuhilfenahme des Brianchon'schen Satzes durchgeführt werden. Zunächst findet sich die Achsenrichtung als Verbindungslinie mm' der Diagonalmittelpunkte des Vierseites der gegebenen Tangenten. Bezeichnet man, siehe Figur 79, die zur Achsenrichtung senkrechte Scheiteltangente S' mit VI, die zu ihr parallele unendlich ferne Tangente mit V, die übrigen Tangenten wie in der Figur angegeben, so erhält man mittels des Brianchon'schen Satzes die Scheiteltangente S' und auch deren Berührpunkt α, d. h. den Parabelscheitel, womit auch die Parabelachse gegeben ist.

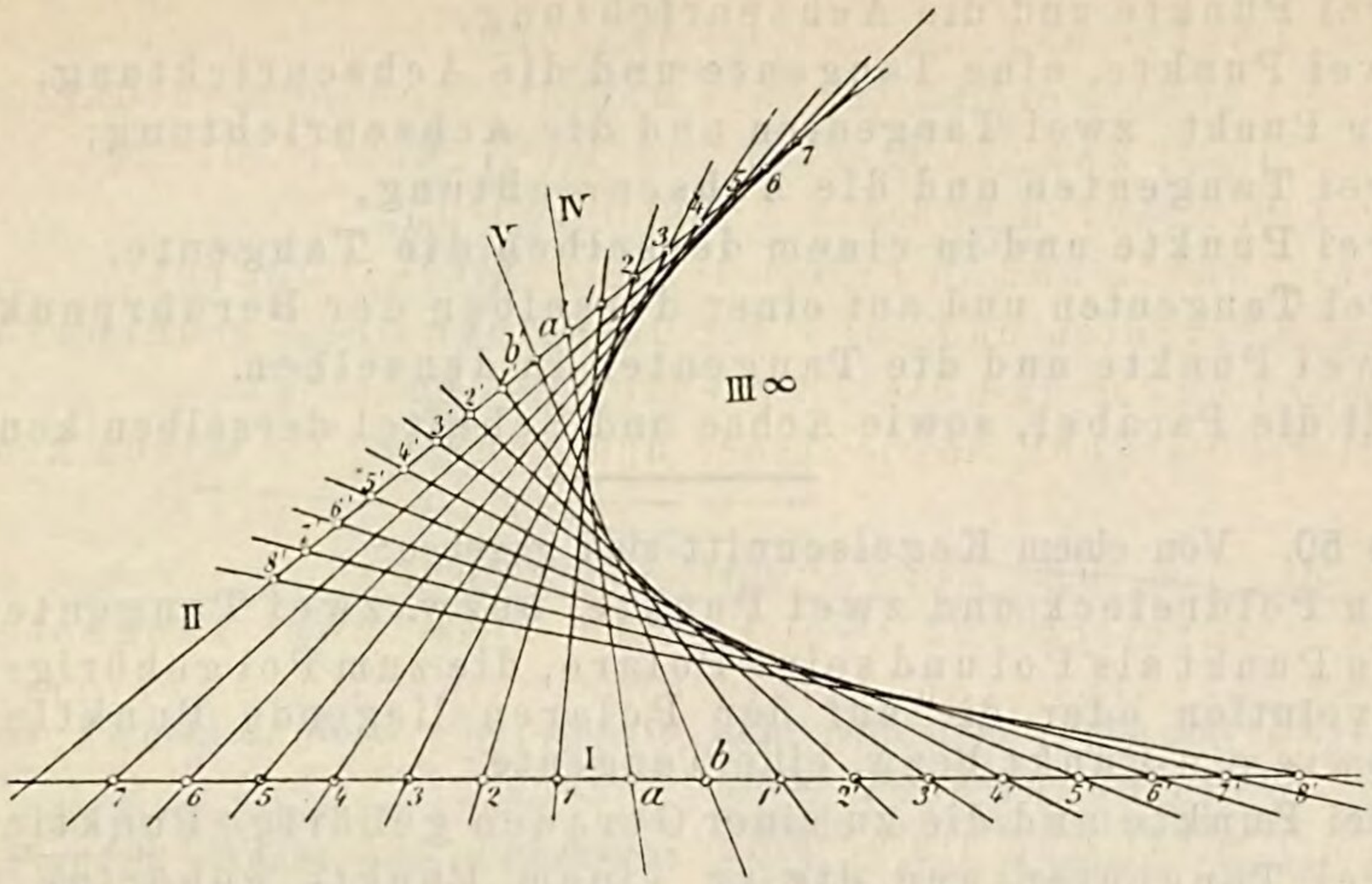
Anmerkung 22. Sind, siehe Figur 80, I, II, IV, V vier gegebene Tangenten einer Parabel und bezeichnet man die unendlich ferne Tangente mit III, so kann man mittels des Brianchon'schen Satzes ganz so, wie in Aufgabe 41 beliebige weitere Tangenten VI, VI' etc. konstruieren. Die verschiedenen Punkte p, p' bilden auf der Verbindungslinie $a\alpha$ eine Punktreihe, welche sowohl perspektivisch und ähnlich ist zu der Punktreihe $\beta, \beta' \cdots$ auf der Tangente V als auch zu der Punktreihe $\gamma, \gamma' \cdots$ auf der Tangente I. Die Punktreihen $\beta, \beta' \cdots$ und $\gamma, \gamma' \cdots$ sind also ähnlich, befinden sich aber in allgemeiner Lage, woraus hervorgeht, dass eine bewegliche Parabeltangente auf zweien festen Tangenten ähnliche Punktreihen ausschneidet, ein Ergebnis, das man sofort auch erhält, wenn man die Parabel als Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen nimmt, denn wegen der unendlich fernen Tangente entsprechen sich die unendlich fernen Punkte beider Reihen und letztere sind daher ähnlich, s. auch Lehrbuch des Projektionszeichnens, III. Teil, 1. Hälfte.

Figur 80.



Aus dem eben Entwickelten gewinnt man aber folgende allgemeine Konstruktion für beliebig viele Parabeltangenten, sobald man vier derselben von vornherein kennt.

Figur 81.



Man trägt, siehe Figur 81, den Abschnitt $\overline{ab}$ auf I nacheinander beliebig oft ab, desgleichen den Abschnitt $\overline{a'b'}$ auf II und verbindet nun die Punkte links von a und rechts von b auf I mit jenen rechts von a' und links von b' auf II.

Man hüllt auf diese Weise die Parabel durch Tangenten ein. Vergleiche auch die Konstruktion in Aufgabe 35.

---

e) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 46. Von einem Centralkegelschnitt sind gegeben:

a) vier Punkte und eine Tangente,
b) drei Punkte und zwei Tangenten,
c) zwei Punkte und drei Tangenten,
d) ein Punkt und vier Tangenten.

Man soll den Kegelschnitt, sowie seinen Mittelpunkt und seine Hauptachsen konstruieren.

Aufgabe 47. Von einer Parabel sind gegeben:

a) drei Punkte und eine Tangente,
b) zwei Punkte und zwei Tangenten,
c) ein Punkt und drei Tangenten.

Man soll die Parabel, sowie Achse und Scheitel konstruieren.

Aufgabe 48. Von einem Centralkegelschnitt sind gegeben:

a) vier Punkte und in einem derselben die Tangente,
b) drei Punkte und in zweien derselben die Tangenten,
c) vier Tangenten und auf einer derselben der Berührpunkt,
d) drei Tangenten und auf zweien derselben die Berührpunkte,
e) drei Punkte, bezw. drei Tangenten, ein weiterer nicht auf dem Kegelschnitt liegender Punkt p als Pol, sowie seine Polare F,
f) ein Punkt, bezw. eine Tangente, zwei nicht auf dem Kegelschnitte liegende Punkte p und q, sowie ihre Polaren P und Q.

Man soll den Kegelschnitt, seinen Mittelpunkt und seine Hauptachsen konstruieren.

Aufgabe 49. Von einer Parabel sind gegeben:

a) drei Punkte und die Achsenrichtung,
b) zwei Punkte, eine Tangente und die Achsenrichtung,
c) ein Punkt, zwei Tangenten und die Achsenrichtung,
d) drei Tangenten und die Achsenrichtung,
e) drei Punkte und in einem derselben die Tangente,
f) drei Tangenten und auf einer derselben der Berührpunkt,
g) zwei Punkte und die Tangenten in denselben.

Man soll die Parabel, sowie Achse und Scheitel derselben konstruieren.

Aufgabe 50. Von einem Kegelschnitt sind gegeben:

a) ein Poldreieck und zwei Punkte, bezw. zwei Tangenten,
b) ein Punkt als Pol und seine Polare, die zum Pol gehörige Strahleninvolution oder die auf der Polaren liegende Punktinvolution, sowie ein Punkt bezw. eine Tangente,
c) drei Punkte und die zu einer Geraden gehörige Punktinvolution,
d) drei Tangenten und die zu einem Punkte gehörige Strahleninvolution,
e) ein Punkt und die zu zweien Geraden gehörigen Punktinvolutionen,
f) eine Tangente und die zu zweien Punkten gehörigen Strahleninvolutionen.

Man soll den Kegelschnitt konstruieren.

---

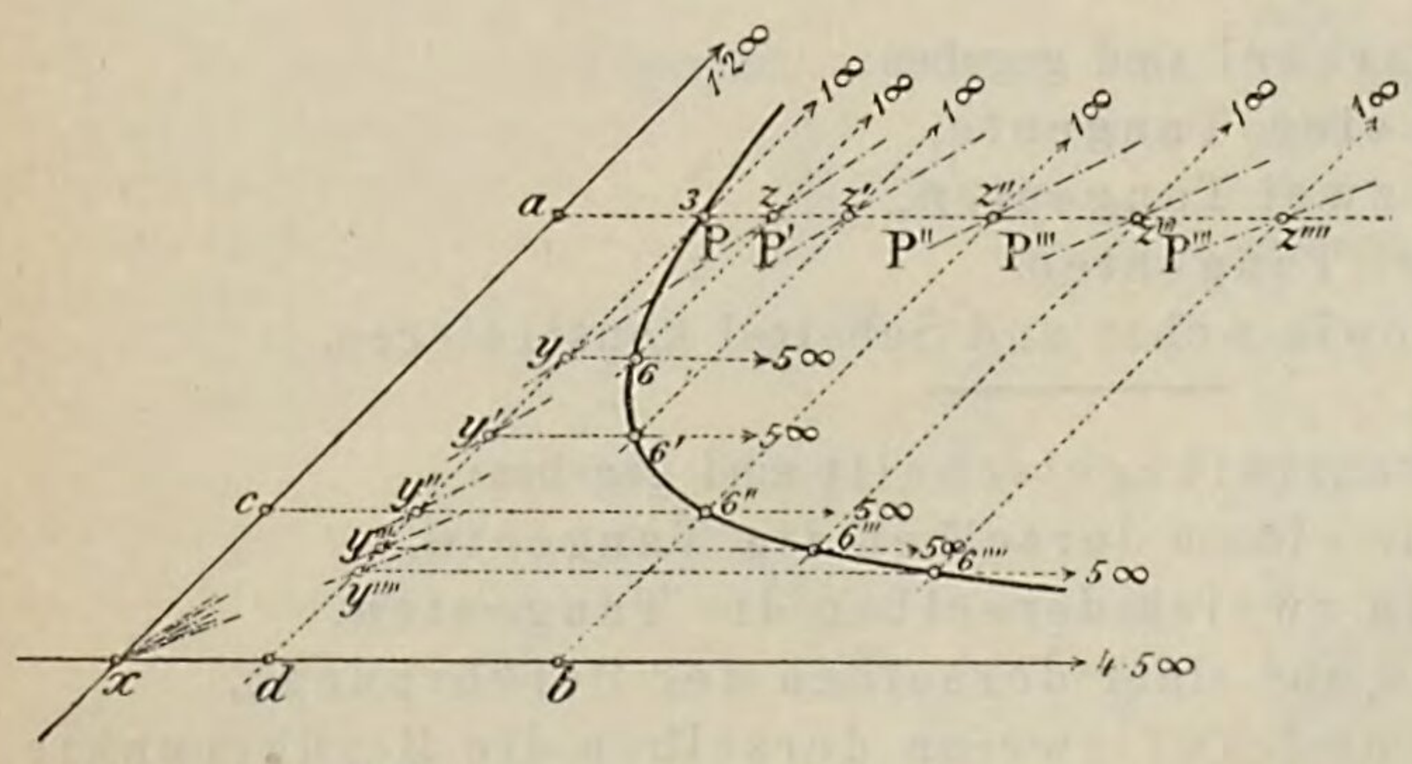
f) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 51. Von einer Hyperbel sind gegeben die beiden Asymptoten und

a) ein Punkt,
b) eine Tangente.

Man soll die Hyperbel konstruieren.

Figur 82.



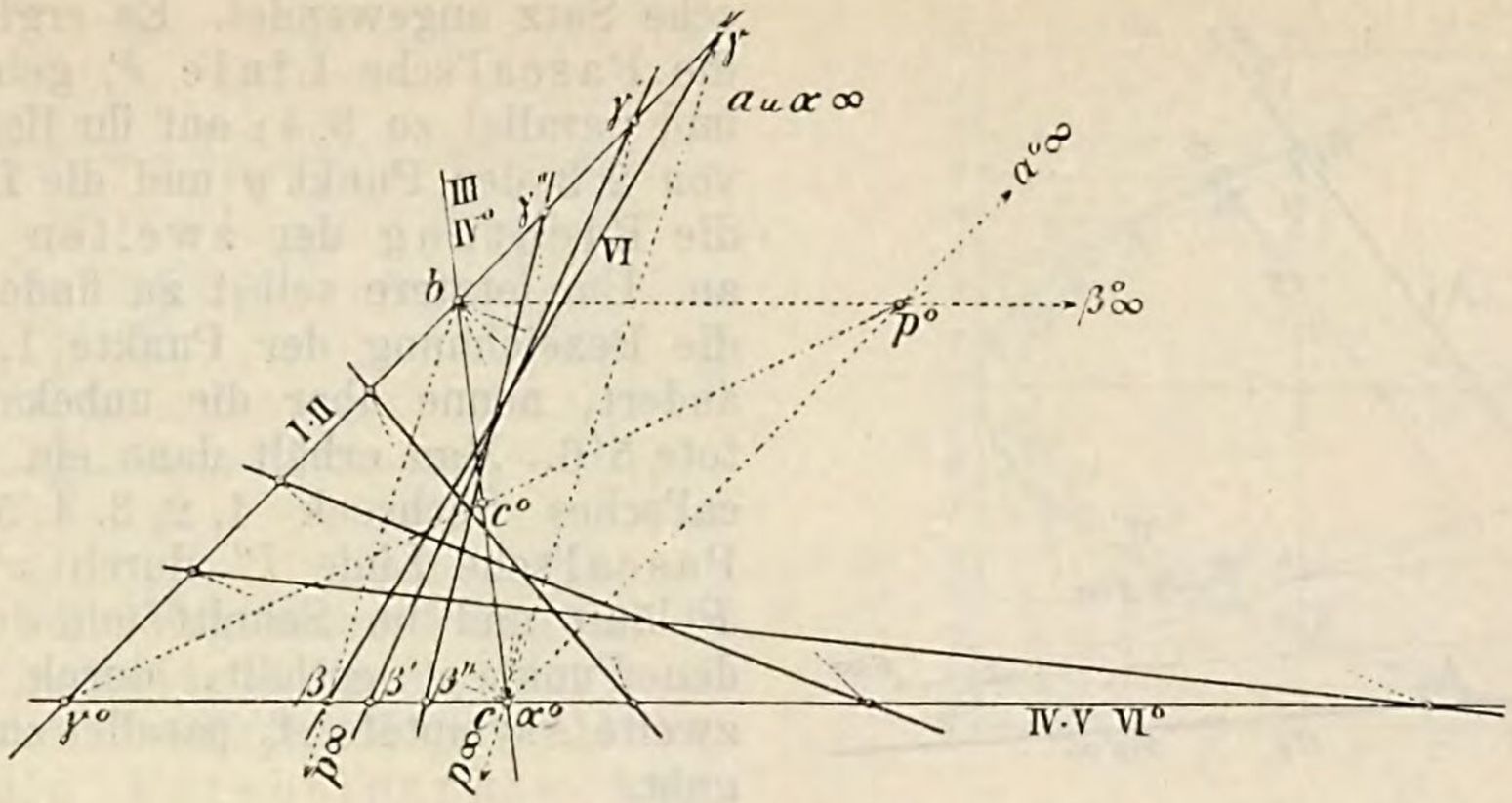
Auflösung a. Bezeichnet man, s. Fig. 82, die unendlich fernen Berührpunkte auf den Asymptoten mit $1 \cdot 2$ und $4 \cdot 5$, den gegebenen Punkt mit 3, einen beliebigen weiteren zu konstruierenden Punkt mit 6, so erhält man für jeden Punkt 6 ein Pascal'sches Sechseck, für welches der Schnittpunkt x der beiden Asymptoten stets ein Punkt der Pascal'schen Linie ist.

Zieht man also durch den Punkt x die Linie P beliebig, so ergibt sich hierfür der Punkt 6 im Schnitt der durch y und z zu den Asymptoten $4 \cdot 5$ bezw. $1 \cdot 2$ gezogenen Parallelen.

Erkl. 77. Will man gleich eine grössere Anzahl von Kurvenpunkten ermitteln, so trägt man auf der Parallelen durch 3 zu einer der beiden Asymptoten, z. B. zu $4 \cdot 5$ eine beliebige Strecke $\overline{3z}$ mehrere Male nacheinander ab, nach $z', z'' \cdots$ zieht durch diese Punkte Strahlen nach x, welche die Punkte $y', y'', \cdots$ enthalten, so

Auflösung b. Bezeichnet man, siehe Figur 83, die gegebenen Asymptoten mit I, II und IV, V, die gegebene Tangente mit III, die gesuchte mit VI, so fällt bei der angegebenen Bezeichnung für das Sechsseit I, II, III, IV, V, VI die Linie $a\alpha$ ins Unend-

Figur 83.



schneiden die Parallelen durch die Punkte $y', y'', \cdots$ bezw. $z', z'', \cdots$ zu den Asymptoten 4·5 bezw. 1·2 die Hyperbelpunkte 6', 6'', ·· aus.

Aus der Figur 82 erkennt man in Rücksicht auf die ausgeführte Konstruktion die Gleichheit der Parallelogramme $3acy''$ und $6''y''db$ und damit auch jene von $3axd$ und $6''cxb$, welche Eigenschaft sich als Satz, wie folgt aussprechen lässt:

„Zieht man in einer Hyperbel durch die Kurvenpunkte Parallele zu den Asymptoten, so haben die durch diese Parallelen und die Asymptoten eingeschlossenen Parallelogramme sämtlich gleichen Flächeninhalt."

Erkl. 78. Zufolge der Konstruktion der Tangente VI in Figur 83 erhellt die Flächengleichheit der Dreiecke $c\gamma b$ und $c\gamma\beta$ und damit auch jene der Dreiecke $\gamma^0 cb$ und $\gamma^0\gamma\beta$, was als Satz so ausgesprochen werden kann:

„Die sämtlichen Tangenten einer Hyperbel bestimmen mit den beiden Asymptoten Dreiecke von gleichem Flächeninhalt."

liche und damit auch der Brianchon'sche Punkt p. Zieht man daher durch b eine Gerade $b\beta$ in beliebiger Richtung und durch c eine Parallele hierzu, so schneiden diese Linien die Tangenten V und I, das sind die gegebenen Asymptoten, in den Punkten β und γ, welche der Tangente VI angehören. Lässt man den Strahl $b\beta$ um b als Mittelpunkt ein Strahlbüschel beschreiben und zeichnet durch c ein Parallelbüschel hierzu, so erhält man in den Schnittpunkten dieser Büschel mit den Asymptoten Punkte, welche weiteren Hyperbeltangenten angehören. Man kann also auf diese Weise die Hyperbel durch Tangenten einhüllen.

Anmerkung 23. Will man auf einer der gegebenen Tangenten, etwa auf der Tangente III, siehe Figur 83, den Berührpunkt ermitteln, so bezeichne man diese Tangente doppelt als III, IV°, nenne die eine Asymptote I, II, die andere V, VI° und wende den Brianchon'schen Satz an, dann wird der Brianchon'sche Punkt p^0 die vierte Ecke eines Parallelogrammes $b\gamma^0 cp^0$, die Verbindungslinie $p\gamma^0$ ist also eine Diagonale desselben und geht daher durch die Mitte c^0 von $\overline{bc}$, womit wieder gezeigt ist, dass der Berührpunkt einer Hyperbeltangente das zwischen den Asymptoten liegende Stück derselben hälftet, siehe Antwort der Frage 55.

Aufgabe 52. Von einer Hyperbel kennt man eine Asymptote, sowie:

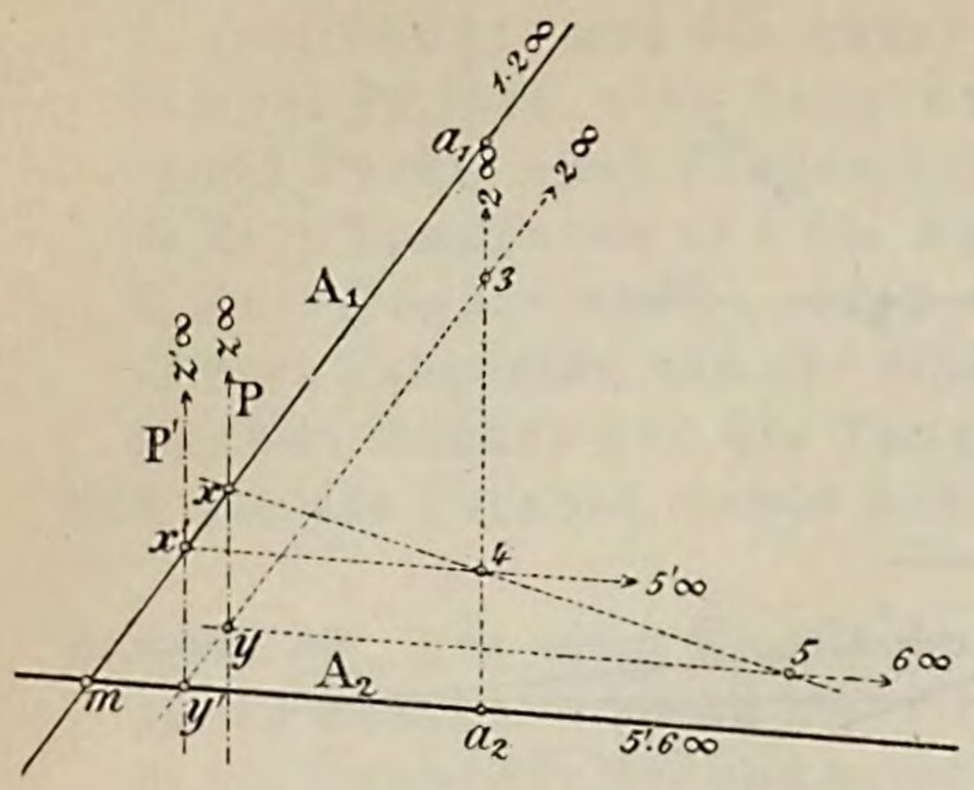
a) drei Punkte,

b) drei Tangenten.

Man soll die andere Asymptote, die Hauptachsen, sowie die Hyperbel selbst konstruieren.

Auflösung a. Die gegebene Asymptote, s. Figur 84, nenne man als Tangente im unendlich fernen Punkte 1, 2, die übrigen gegebenen Punkte seien mit 3, 4 und 5 bezeichnet. Der zweite nicht bekannte unendlich ferne Punkt heisse 6. Für das so

Figur 84.



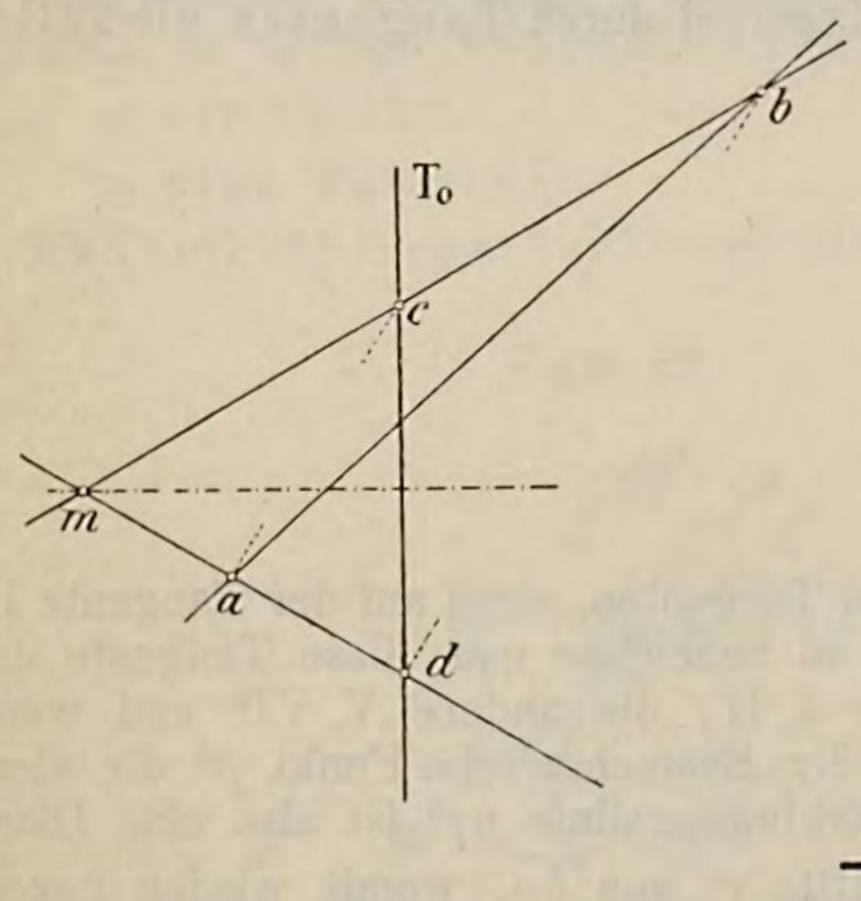
Erkl. 79. Schneidet die verlängerte Sehne 3, 4 die beiden Asymptoten in den Punkten a_1 und a_2, so erkennt man sofort in Rücksicht auf die Parallelogramme $a_1 3 y' x'$ und $x' y' a_2 4$ die Gleichheit der Strecken $\overline{a_1 3} = \overline{a_2 4}$, es ist also ein bereits früher kennen gelernter Satz für die Hyperbel, siehe Anmerkung 17, hiermit nochmals bewiesen.

bestimmte Sechseck werde nun der Pascal'sche Satz angewendet. Es ergibt sich dann die Pascal'sche Linie P, gehend durch x und parallel zu 3, 4; auf ihr liegt im Schnitt von 2, 3 der Punkt y und die Linie $y5$ gibt die Richtung der zweiten Asymptote an. Um letztere selbst zu finden, lasse man die Bezeichnung der Punkte 1, 2, 3, 4 ungeändert, nenne aber die unbekannte Asymptote 5'6. Man erhält dann ein zweites Pascal'sches Sechseck 1, 2, 3, 4, 5', 6, dessen Pascal'sche Linie P' durch x' parallel zu P läuft und im Schnitt mit der Linie 2, 3 den Punkt y' enthält, durch welchen die zweite Asymptote A_2 parallel zu $5y$ hindurch geht.

Auflösung b. Man konstruiere mittels des Brianchon'schen Satzes auf den drei gegebenen Tangenten die Berührpunkte und trage von denselben deren Entfernung von der gegebenen Asymptote nach der anderen Seite der bezüglichen Tangenten ab, so liegen die so erhaltenen Punkte auf der zweiten Asymptote.

Anmerkung 24. Die Hauptachsen der Hyperbel bestimmen sich in beiden Fällen a und b der Lage nach als die Halbierlinien des Asymptotenwinkels und der Länge nach im Falle a, wie in Erkl. 76, im Falle b, indem man sich, siehe Figur 85), die zur reellen Achse senkrechte Tangente T_o verschafft; letztere ergibt sich aber durch folgende Beziehung:

Figur 85.



Bezeichnet man $\overline{mc} = \overline{md} = x$, so hat man die Verhältnisgleichheit:

$$\overline{ma} : \overline{md} = \overline{mc} : \overline{mb}$$

oder:

$$\overline{ma} : x = x : \overline{mb}$$

d. h.:

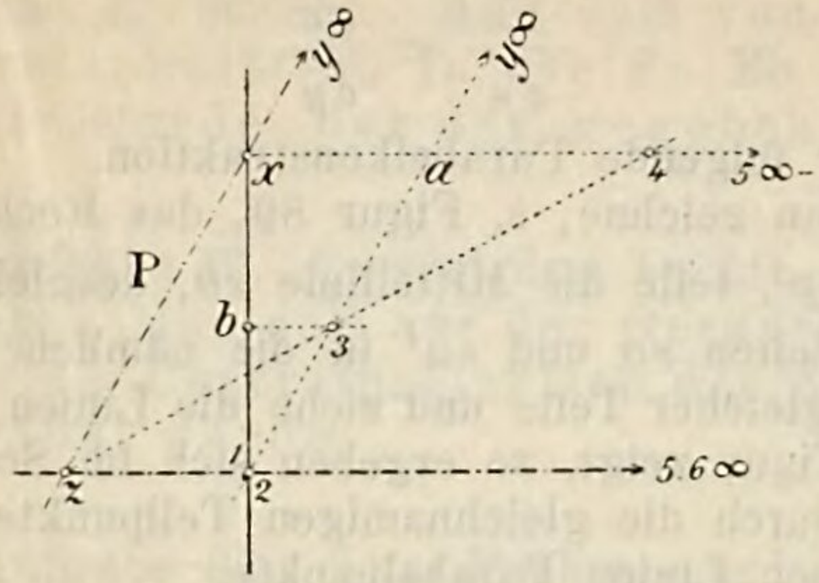
$$x^2 = \overline{ma} \cdot \overline{mb}$$

x ist demnach die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten einer Hyperbeltangente auf den Asymptoten.

Aufgabe 53. Eine Parabel ist durch vier Tangenten gegeben. Man soll parallel zu einer gegebenen Geraden A an die Kurve die möglichen Tangenten ziehen.

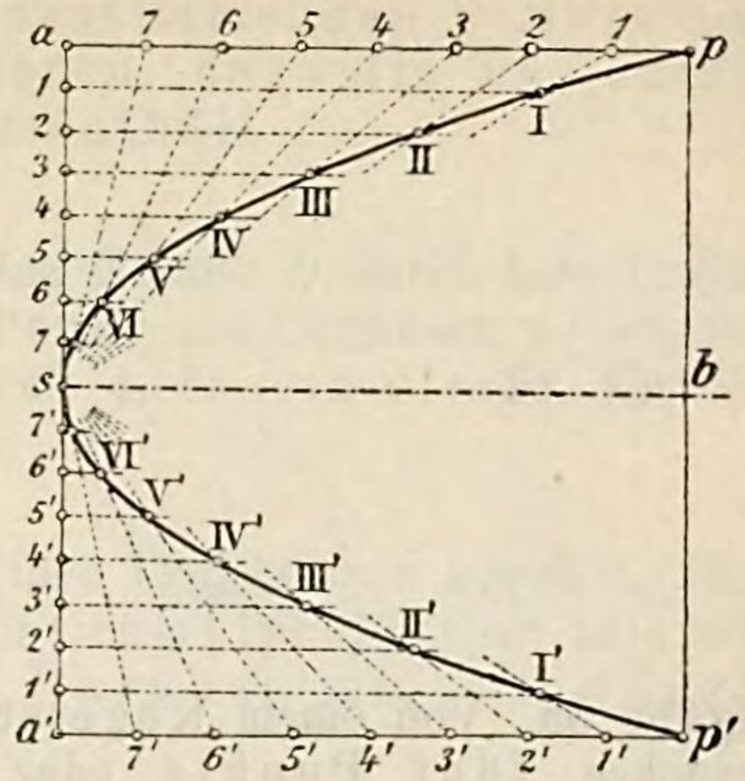
Auflösung. Man bezeichne die gegebenen Tangenten mit I, II, III, IV, die gesuchte mit VI und die unendlich ferne zu VI, d. h. zu A parallele Tangente mit V, so erhält man mittels des Brianchon'schen Satzes den Punkt γ auf I, durch welchen parallel zu A die gesuchte Tangente VI zu ziehen ist.

Figur 86.



Aufgabe 54. Von einer Parabel ist gegeben der Scheitel, die Achse, sowie ein weiterer Punkt. Man soll beliebig viele Parabelpunkte konstruieren.

Figur 87.



Auflösung. Bezeichnet man die gegebenen Punkte mit 1, 2, 5, 6 und 4, wie die Figur 86 zeigt, und wendet den Pascal'schen Satz an, so ergibt sich zunächst der Punkt x, durch welchen man die Pascal'sche Linie P beliebig ziehen kann, welcher der Punkt 3 entspricht. Aus der Konstruktion ist nun die Aehnlichkeit der Dreiecke $1z3$ und $a43$ ersichtlich, woraus die Verhältnisgleichheit folgt:

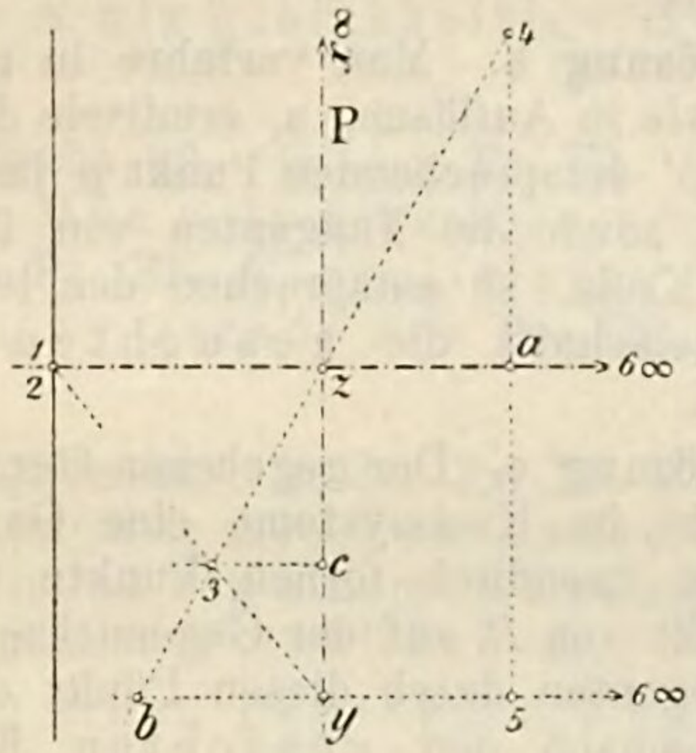
$$\frac{\overline{1z}}{\overline{a4}} = \frac{\overline{13}}{\overline{a3}}$$

oder mit Rücksicht auf die Figur 86:

$$\frac{\overline{ax}}{\overline{a4}} = \frac{\overline{1b}}{\overline{bx}}$$

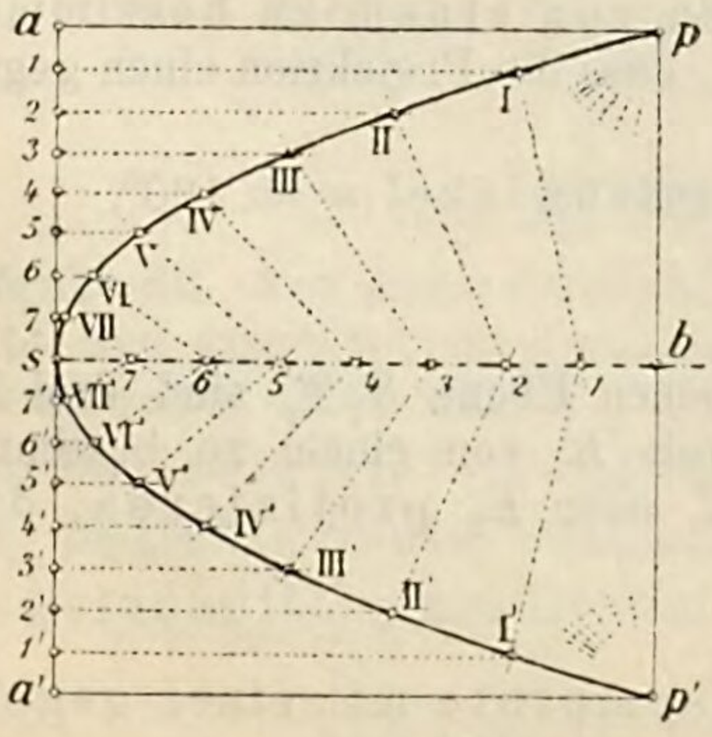
Aus dieser Beziehung folgt aber nachstehende Parabelkonstruktion.

Figur 88.



Man zeichne, siehe Figur 87, wenn sb die Achse, sa die Scheiteltangente und p den gegebenen Punkt darstellt, das Rechteck $apbs$ und teile die Seiten $\overline{as}$ und $\overline{ap}$ in die nämliche Anzahl gleicher Teile und bezeichne sie, wie die Figur 87 zeigt. Durch die Teilpunkte auf as ziehe Parallele zur Achse, die Teilpunkte von ap verbinde mit s, so schneiden sich die durch die gleichnamigen Teilpunkte geführten Linien in Parabelpunkten.

Figur 89.



Nimmt man noch den zu dem gegebenen Punkt 4 hinsichtlich der Achse symmetrischen Punkt 5, s. Figur 88, hinzu und bezeichnet wie in der Figur angegeben, so ergibt sich mittels des Pascal'schen Satzes eine weitere Konstruktion. Zunächst liegt x unendlich, daher ist P eine beliebige Pascal'sche Linie, welcher der Punkt 3 angehört. Nun ist wieder das Dreieck $1z3$ ähnlich dem Dreieck $yb3$, daher:

$$\frac{\overline{1z}}{\overline{by}} = \frac{\overline{23}}{\overline{y3}}$$

oder mit Rücksicht auf die Figur 88:

$$\frac{\overline{1z}}{\overline{za}} = \frac{\overline{zc}}{\overline{cy}}$$

daher folgende Parabelkonstruktion.

Man zeichne, s. Figur 89, das Rechteck $paa'p'$, teile die Mittellinie $\overline{sb}$, desgleichen die Seiten $\overline{sa}$ und $\overline{sa'}$ in die nämliche Anzahl gleicher Teile und ziehe die Linien, wie die Figur zeigt, so ergeben sich im Schnitt der durch die gleichnamigen Teilpunkte gezogenen Linien Parabelpunkte.

Aufgabe 55. Von einem Kegelschnitt sind gegeben fünf Punkte oder fünf Tangenten. Man soll:

a) den Durchschnitt einer Geraden A' mit dem Kegelschnitt bestimmen,

b) von einem gegebenen Punkte p',

c) parallel einer gegebenen Geraden B',

die möglichen Tangenten an den Kegelschnitt konstruieren.

Auflösung a. Man wähle wie in Aufgabe 42 oder in Aufgabe 43 einen zum Kegelschnitt collinearen Kreis, ermittele das Centrum bezw. die Achse, sowie die der Geraden A' entsprechende Gerade A im Kreissysteme, so entsprechen den Schnittpunkten x und y von A und K die Schnittpunkte der Geraden A' mit dem Kegelschnitt K'.

Auflösung b. Man verfahre in gleicher Weise wie in Auflösung a, ermittele den dem Punkte p' entsprechenden Punkt p im Kreissysteme, sowie die Tangenten von ihm aus an den Kreis, so entsprechen den letzteren im Kegelschnitt die gesuchten Tangenten.

Auflösung c. Der gegebenen Geraden B' entspricht im Kreissysteme eine Gerade B und dem unendlich fernen Punkte von B' ein Punkt von B auf der Gegenachse R, die Kreistangenten durch diesen Punkt entsprechen demnach den gesuchten Kegelschnitttangenten.

---

g) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 56. In der **Pr. Eb.** E_2 ist ein die **Pr. Eb.** E_1 berührender Kreis von beliebigem Halbmesser gegeben. Man soll denselben von einem zu bestimmenden Centrum aus so in die **Pr. Eb.** E_1 projizieren, dass die Projektion einen gegebenen Punkt als Mittelpunkt habe und

a) eine Hyperbel von gegebenem Asymptotenwinkel $w = 120^0$,

b) eine gleichseitige Hyperbel werde.

Aufgabe 57. In einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene $S_1 T_2$ sind drei Punkte a, b, c gegeben. Man soll den sie enthaltenden Kreis K von einem zu bestimmenden Punkte einer Geraden G aus, so in die **Pr. Eb.** E_1 oder E_2 projizieren, dass die Projektion:

a) eine gleichseitige Hyperbel,

b) eine Hyperbel werde, deren eine Asymptote mit einer gegebenen Geraden zusammenfalle oder zu ihr parallel sei.

Aufgabe 58. Es sind drei Punkte a, b, c eines Kegelschnittes gegeben, der die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 berührt. Man soll von einem zu bestimmenden Punkte aus den Kegelschnitt so in die **Pr. Eb.** E_1 projizieren, dass die Projektion ein Kreis werde, der den gegebenen Punkt d enthält.

Aufgabe 59. Es sind drei Punkte a, b, c und eine Gerade D durch ihre Projektionen gegeben. Man soll auf der Geraden D einen Punkt als Centrum so bestimmen, dass die Centralprojektion des Kreises durch a, b, c in die **Pr. Eb.** E_1 eine Parabel werde.

Aufgabe 60. Zwei Punkte a und b sind durch ihre Projektionen gegeben. Es soll durch sie ein Kreis gelegt werden, dessen Centralprojektion in die **Pr. Eb.** E_2 aus einem gegebenen Centrum eine Parabel mit vorgegebener Achsenrichtung werde.

Aufgabe 61. Eine Ebene ist durch ihre Spuren, ein Punkt durch seine Projektionen gegeben. In der Ebene soll ein Kreis so konstruiert werden, dass seine Centralprojektionen aus dem gegebenen Punkte als Centrum in die drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2, E_3 Parabeln werden.

Aufgabe 62. Ein Kreis K ist gegeben und ausserhalb seiner Ebene ein Punkt o. Man soll durch o eine den Kreis berührende und gegen dessen Ebene unter 45^0 geneigte Ebene legen und in dieselbe aus dem Centrum o den Kreis K als gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpunkt o projizieren.

Aufgabe 63. In der **Pr. Eb.** E_2 ist ein die **Pr. Eb.** E_1 berührender Kreis K_2 gegeben. Man soll denselben von einem zu bestimmenden Punkte o aus so in die **Pr. Eb.** E_1 projizieren, dass die Projektion eine Parabel und eine gegebene Gerade der **Pr. Eb.** E_1 die Achse derselben werde.

Aufgabe 64. In der **Pr. Eb.** E_2 ist eine Ellipse, sowie ein dieselbe in den Endpunkten der kleinen Achse berührender Kreis gegeben. Beide Linien sind central von einem zu bestimmenden Punkte in die **Pr. Eb.** E_1 so zu projizieren, dass die Projektionen ähnliche und ähnlich liegende Hyperbeln werden, die entweder:

a) einen gegebenen Punkt der Ebene als Mittelpunkt oder

b) ihren Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegend, und einen Asymptotenwinkel von gegebener Grösse haben.

Aufgabe 65. In der **Pr. Eb.** E_1 sind drei sich gegenseitig schneidende Kreise gegeben. Dieselben sind central so in die **Pr. Eb.** E_2 zu projizieren, dass die Projektionen gleichseitige Hyperbeln werden.

---

h) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 66. Von einem Centralkegelschnitt sind gegeben zwei conjugierte Durchmesser. Man soll:

a) beliebig viele Punkte,

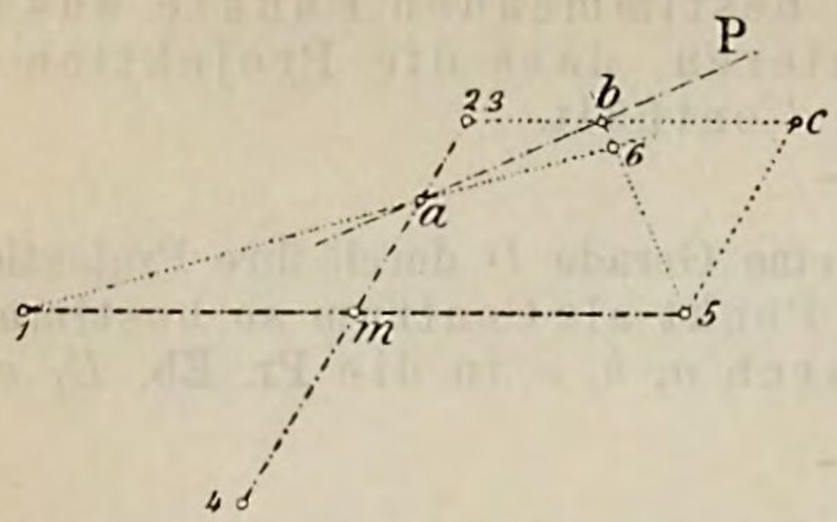
b) beliebig viele Tangenten

des Kegelschnittes konstruieren.

Der Kegelschnitt sei eine Ellipse.

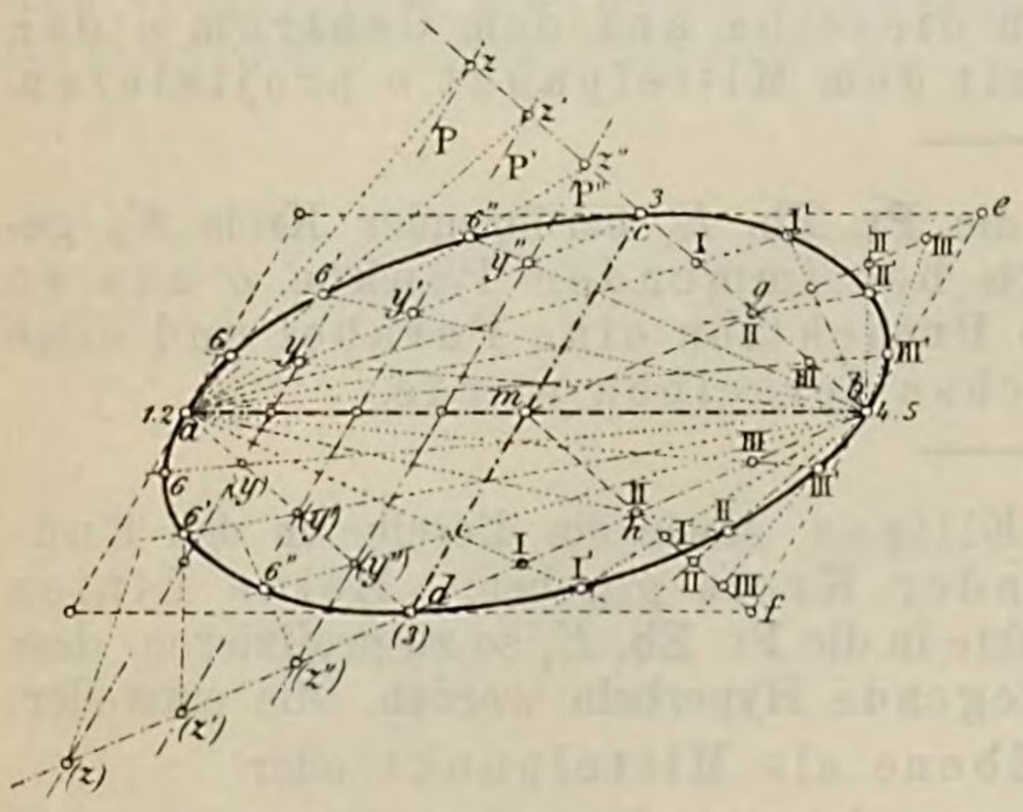
Auflösung a. Bezeichnet man, siehe Figur 90, die Endpunkte der conjugierten Durchmesser so wie angegeben, so laufen die Pascal'schen Linien sämtlich parallel zur Richtung $1 \cdot 2$ bezw. $4 \cdot 5$, für die Linie P

Figur 90.



Erkl. 80. Durch zweckmässige Benützung des Pascal'schen bezw. Brianchon'schen Satzes lassen sich eine Reihe von Konstruktionen, sowohl für Punkte als für Tangenten des Kegelschnittes ableiten. Im Nachfolgenden sollen nur einige der bemerkenswertesten und gebräuchlichsten Konstruktionen angegeben werden.

Figur 91.



Erkl. 81. Die nebenstehend angegebene erste Konstruktion lässt sich in etwas anderer Weise wie folgt ausführen. Man zeichne, siehe Figur 92, das Parallelogramm $efgh$ und damit auch die Asymptoten der Hyperbel. Desgleichen das Parallelogramm $adbc$.

Teilt man nun die Strecken $\overline{ie}$, $\overline{kg}$, $\overline{lh}$ und $\overline{nf}$ je in eine beliebige Anzahl gleiche Teile, desgleichen die Strecken $\overline{mk}$, $\overline{mc}$, $\overline{mn}$ und $\overline{mf}$, verbindet die Teilpunkte auf ie und lh mit b, jene auf mn und mk mit a. Die Teilpunkte auf kg und nf mit a, jene auf mn und ml mit b, so schneiden sich die durch gleichnamige Teilpunkte gehenden Geraden in Hyperbelpunkten.

ergibt sich somit, wie die Figur zeigt, der Punkt 6. Nun ist aber zu erkennen, dass:

$$\frac{\overline{ma}}{\overline{a \cdot 2}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{b \cdot 2}}$$

ist, woraus jene Konstruktion sich ergibt, die schon im ersten Teile dieses Lehrbuches, Seite 85 u. ff., auf andere Weise abgeleitet wurde.

Bezeichnet man so wie in Figur 91 geschehen, so werden die Pascal'schen Linien alle parallel zum Durchmesser 3 (3) und man erhält beliebig viele Punkte 6, wie die Figur zeigt.

Die linksseitig angegebene allgemeine Konstruktion lässt sich noch in etwas anderer Weise ausführen und zwar so, dass man sich die Tangenten in den Endpunkten der gegebenen Durchmesser gezogen denkt und ausserdem die Diagonalen sowie die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Seiten des so gebildeten Parallelogrammes zieht. Teilt man nun in dem Parallelogramm $m3e4$ die Diagonale $\overline{34}$, desgleichen die halbe Diagonale $\overline{ge}$ in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, verbindet die Teilpunkte auf der Diagonale 3 4 mit dem Punkte 1, jene auf $\overline{ge}$ mit 4, so schneiden sich die durch gleichnamige Teilpunkte gehenden Strahlen in Ellipsenpunkten. In entsprechender Weise erhält man auch die übrigen drei Viertel der Ellipse.

Der Kegelschnitt sei eine Hyperbel.

Auflösung a. Erste Konstruktion. Mittels der beiden conjugierten Durchmesser $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$, siehe Figur 92, sind zugleich auch die Asymptoten der Hyperbel bestimmt, die Numerierung wie in Figur 92 liefert mittels des Pascal'schen Satzes den Punkt 6 und in gleicher Weise beliebig viele sechste Punkte. Die Pascal'schen Linien gehen sämtlich durch den Punkt c.

Zweite Konstruktion. Numeriert man wie in Figur 93, so laufen die Pascal'schen Linien sämtlich parallel zum Durchmesser cd und die Punkte 6 liegen im Schnitt von $4 \cdot y$ mit $1 \cdot z$.

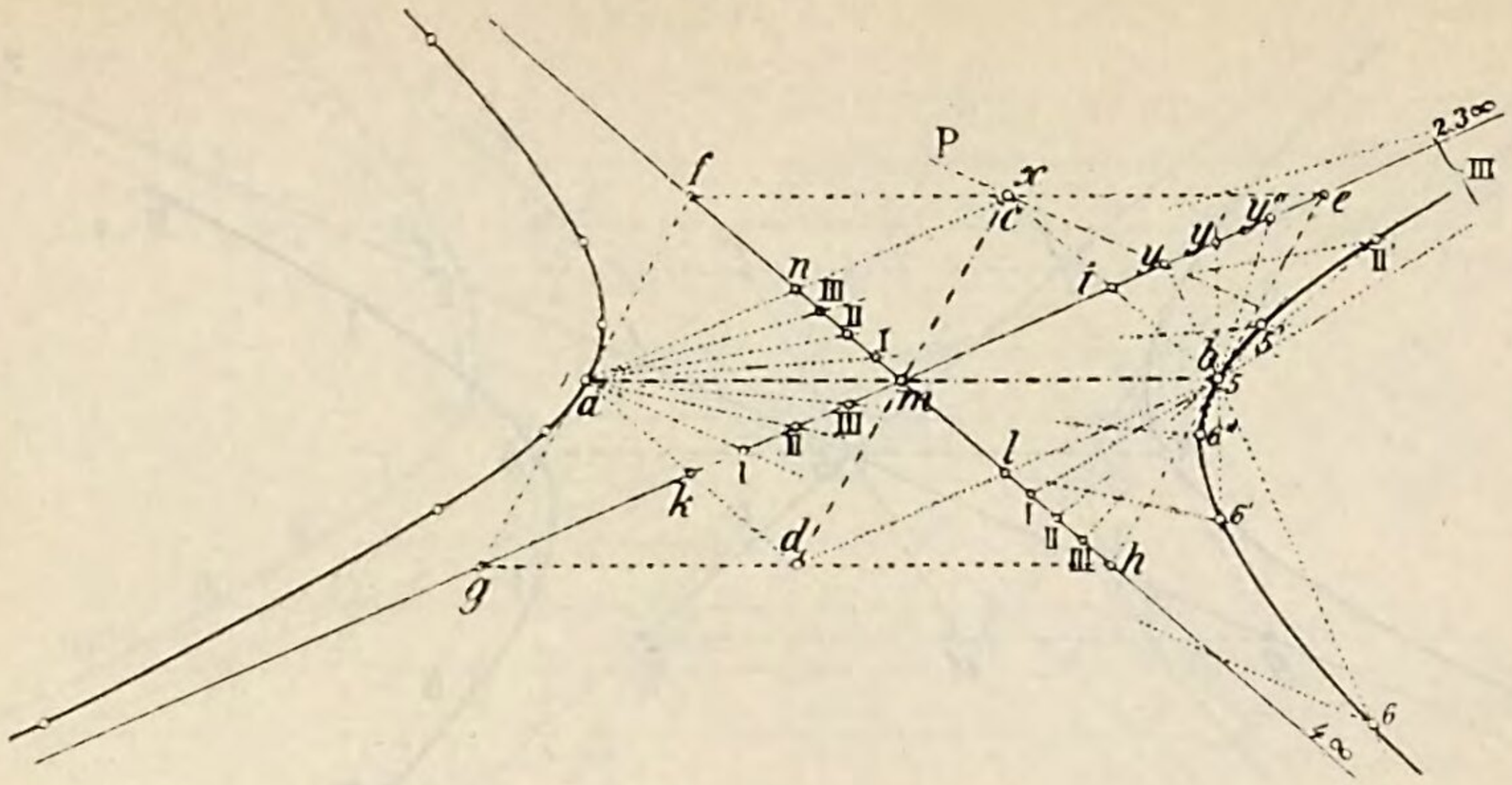
Nun ist aber aus der Figur leicht ersichtlich, dass:

$$\overline{ek} = \overline{kl} = \frac{1}{2}\overline{iz} = \frac{1}{2}\overline{by}$$

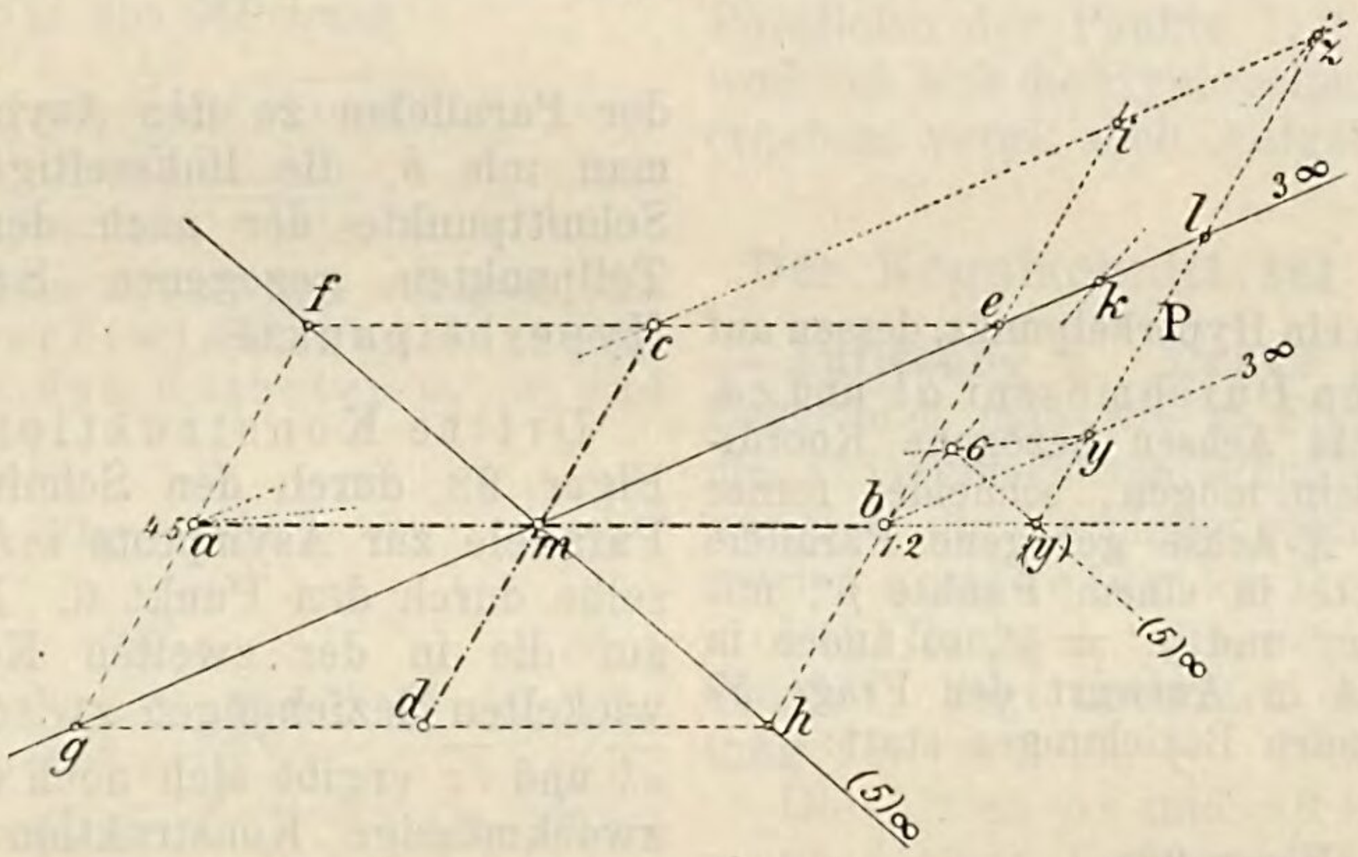
ist, daher folgende Konstruktion:

Man trage, siehe Figur 94, von den Ecken des Parallelogrammes $efgh$ auf den Asymp-

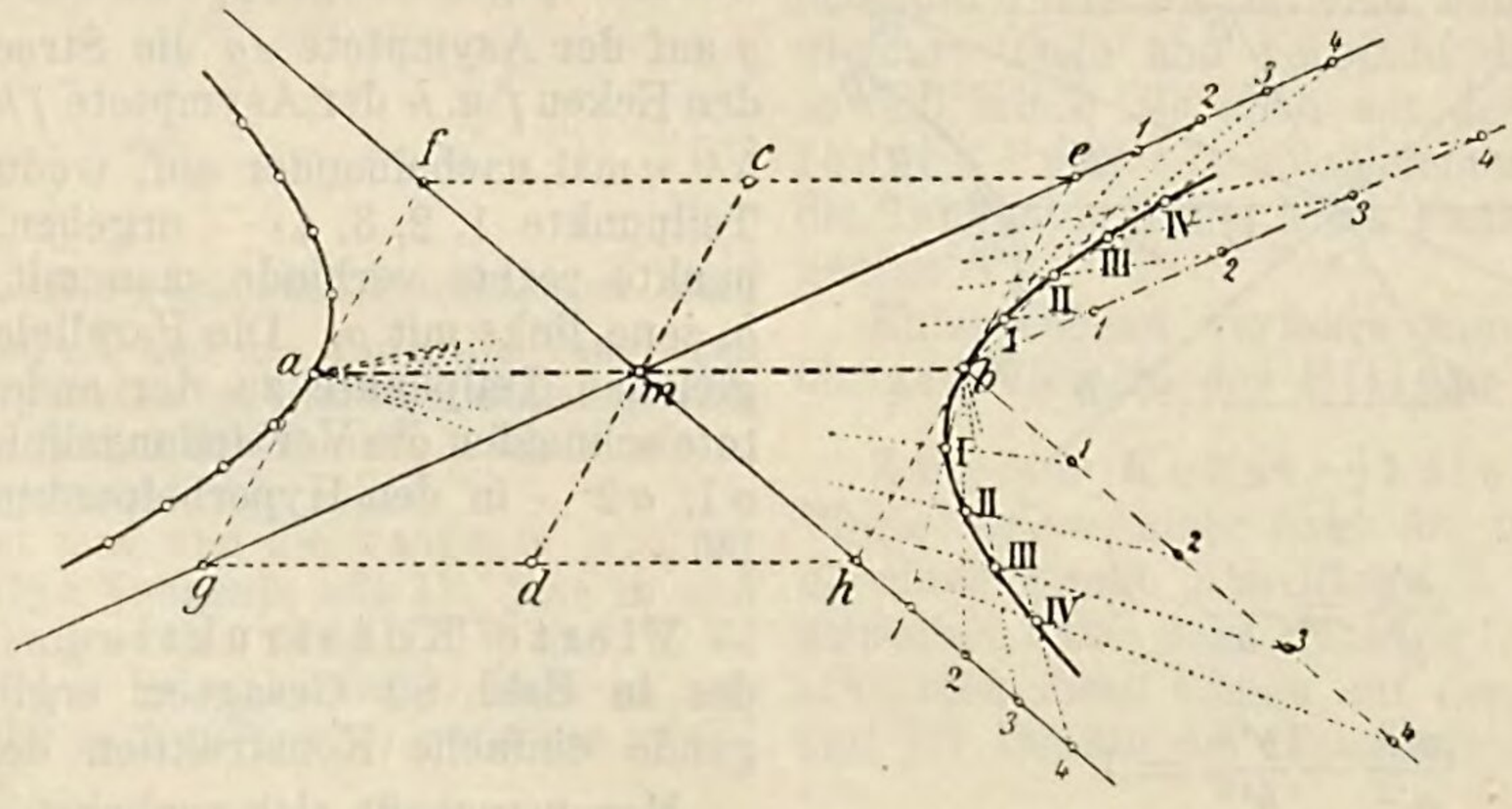
Figur 92.



Figur 93.

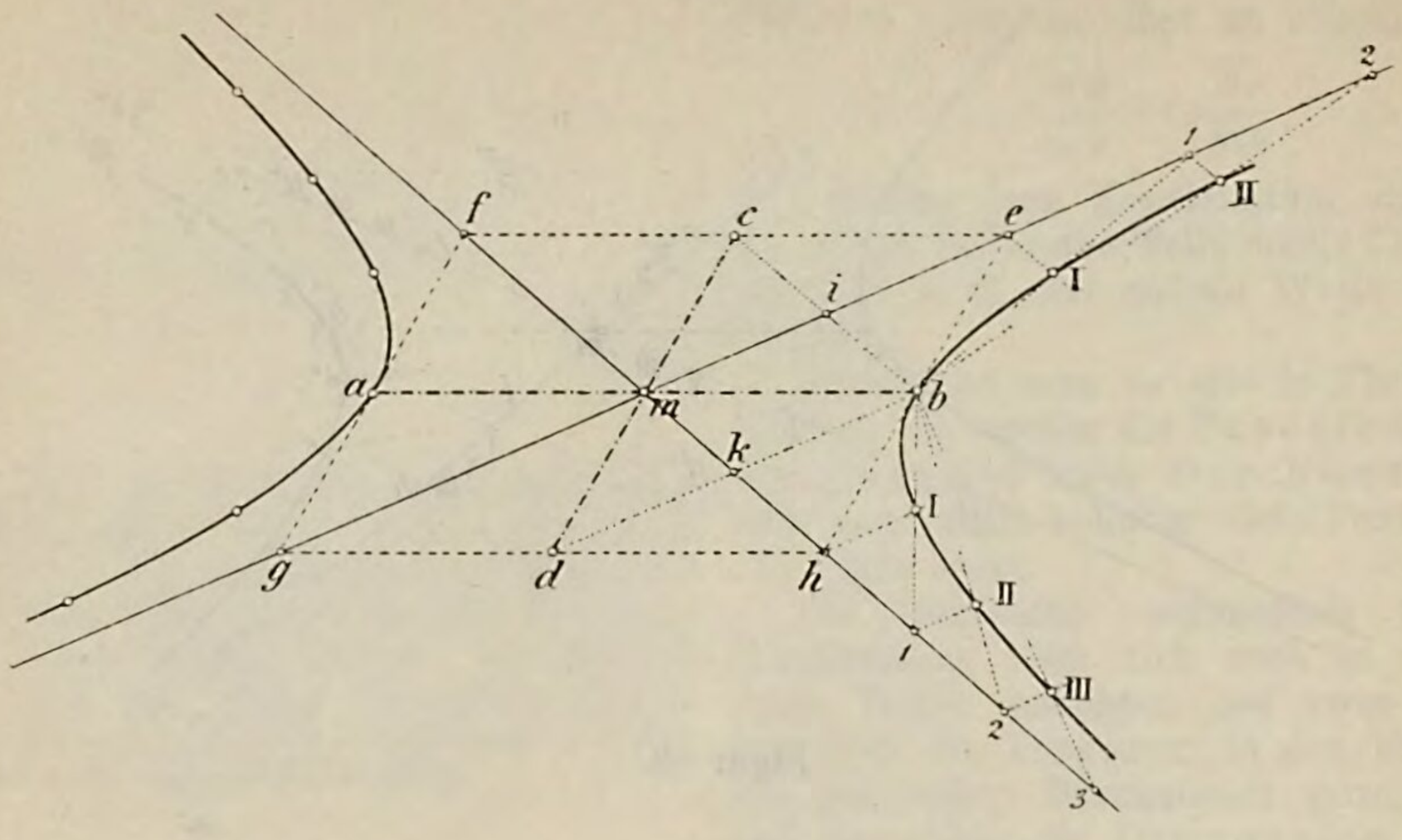


Figur 94.



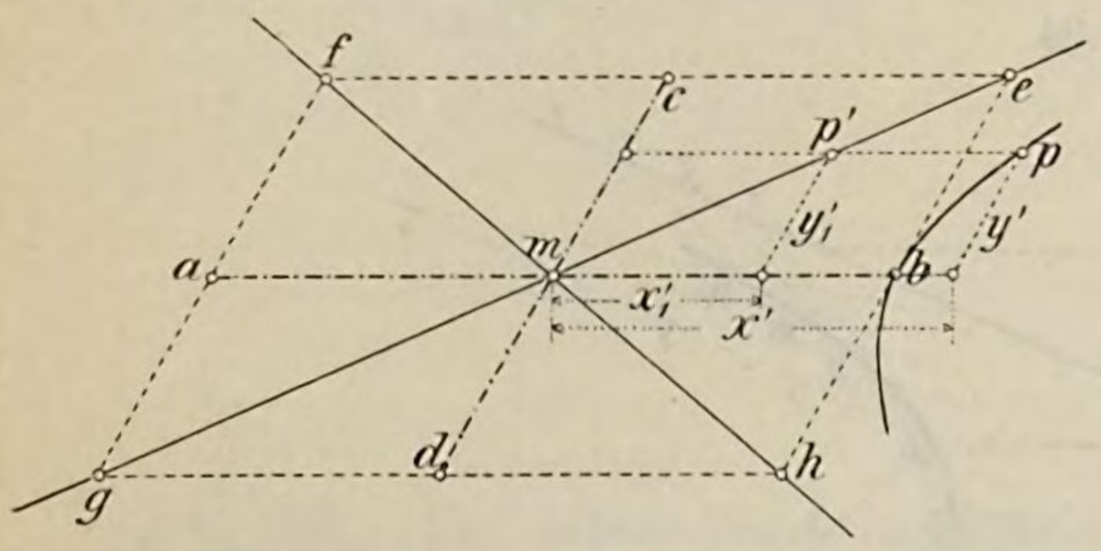
totten eine beliebige Strecke 1-, 2-, 3-, 4-, n-mal, desgleichen eine doppelt so grosse Strecke auf den durch a und b gezogenen Parallelen zu den Asymptoten ab. Die rechtsseitigen Teilpunkte auf den Asymptoten verbinde man mit b, die linksseitigen mit a, desgleichen die rechtsseitigen Teilpunkte auf

Figur 95.



Erkl. 82. Ist p ein Hyperbelpunkt, dessen auf die conjugierten Durchmesser $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$, siehe Figur 96, als Achsen bezogene Koordinaten x' und y' sein mögen, schneidet ferner die durch p zur X-Achse gezogene Parallele die eine Asymptote in einem Punkte p', mit den Koordinaten x_1' und $y_1' = y'$, so finden in Rücksicht auf das in Antwort der Frage 57 Gesagte die folgenden Beziehungen statt:

Figur 96.



Es ist:

$$86) \ldots \frac{x'_1}{y'} = \frac{a'}{b'}$$

und

$$87) \ldots \frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

Aus den beiden Gleichungen 86) und 87) berechnet sich:

$$y' = \frac{b'}{a'} x_1'$$

und

$$y' = \frac{b'}{a'} \sqrt{x' - a'^2}$$

der Parallelen zu den Asymptoten verbinde man mit b, die linksseitigen mit a. Die Schnittpunkte der nach den gleichnamigen Teilpunkten gezogenen Strahlen sind Hyperbelpunkte.

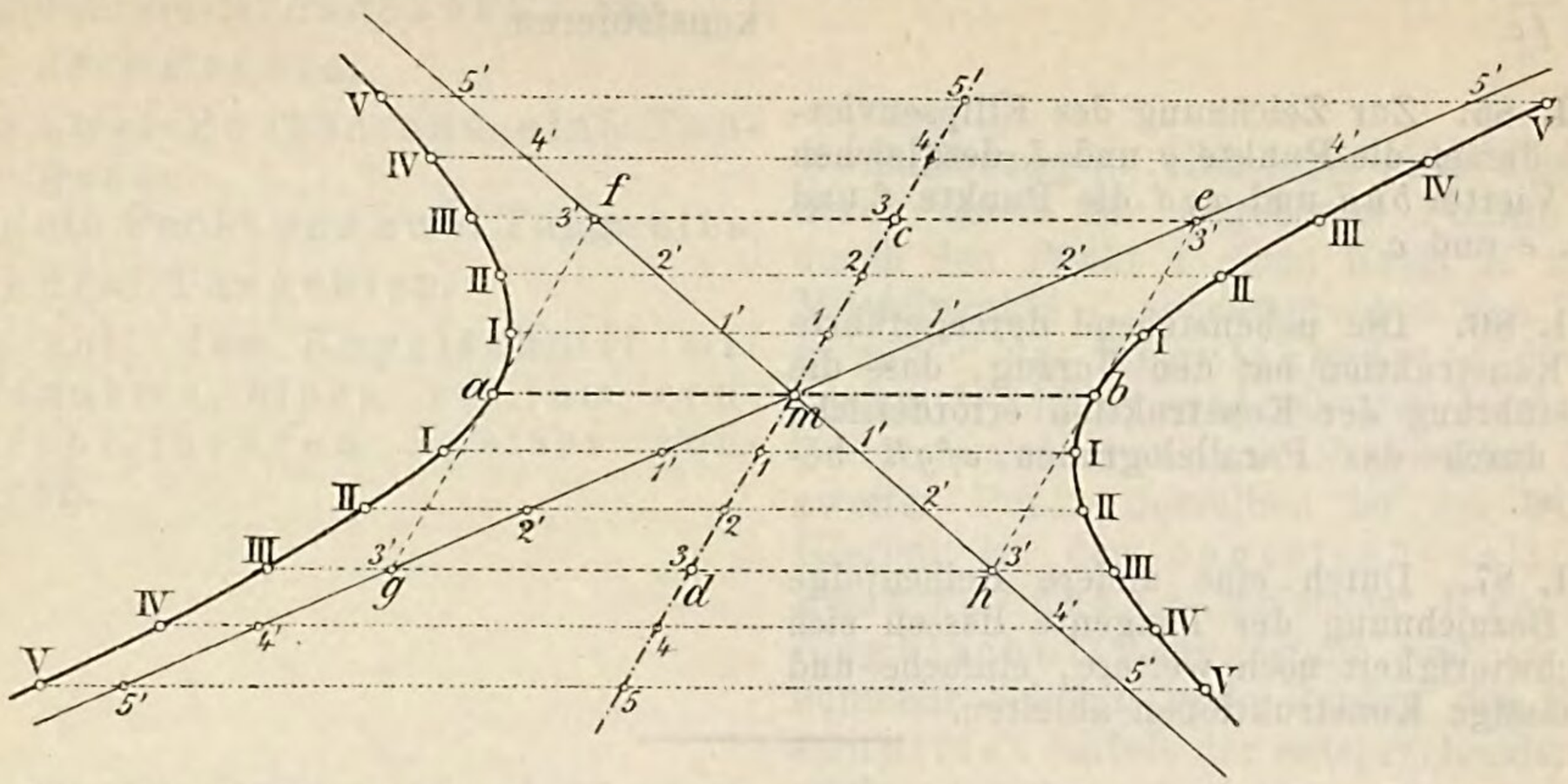
Dritte Konstruktion. Zieht man in Figur 93 durch den Schnittpunkt (y) eine Parallele zur Asymptote mh, so geht dieselbe durch den Punkt 6. Mit Bezugnahme auf die in der zweiten Konstruktion entwickelten Beziehungen zwischen den Längen $\overline{ek}$ und $\overline{iz}$ ergibt sich noch die folgende sehr zweckmässige Konstruktion der Hyperbelpunkte.

Man trage, s. Fig. 95, von den Ecken e und g auf der Asymptote eg die Strecke $\overline{mi}$, von den Ecken f u. h der Asymptote fh die Strecke $\overline{hk}$ $n$mal nacheinander auf, wodurch sich die Teilpunkte 1, 2, 3, 4 $\cdots$ ergeben. Die Teilpunkte rechts verbinde man mit dem Punkt b, jene links mit a. Die Parallelen durch die gleichen Teilpunkte zu der anderen Asymptote schneiden die Verbindungslinien $b1$, $b2 \cdot \cdot$, $a1$, $a2 \cdot \cdot$ in den Hyperbelpunkten I · II · III · IV $\cdots$

Vierte Konstruktion. Auf Grund des in Erkl. 82 Gesagten ergibt sich folgende einfache Konstruktion der Hyperbel:

Man verschafft sich zunächst, s. Figur 97, die beiden Asymptoten, zieht in gleichen Abständen von einander Parallele zum Durchmesser $\overline{ab}$ und konstruiert rechtwinklige Dreiecke, in welchen die eine Kathete gleich $\overline{mb}$ die zugehörige andere Kathete je durch die Strecken $\overline{11'}$, $\overline{22'}$ und $\overline{33'}$ gegeben ist.

Figur 97.



Man erhält demnach durch Gleichsetzung der beiden Werte für y' die Gleichung:

$$\frac{b'}{a'} x_1' = \frac{b'}{a'} \sqrt{x' - a'^2}$$

oder:

88) . . . $x_1' = \sqrt{x' - a'^2}$

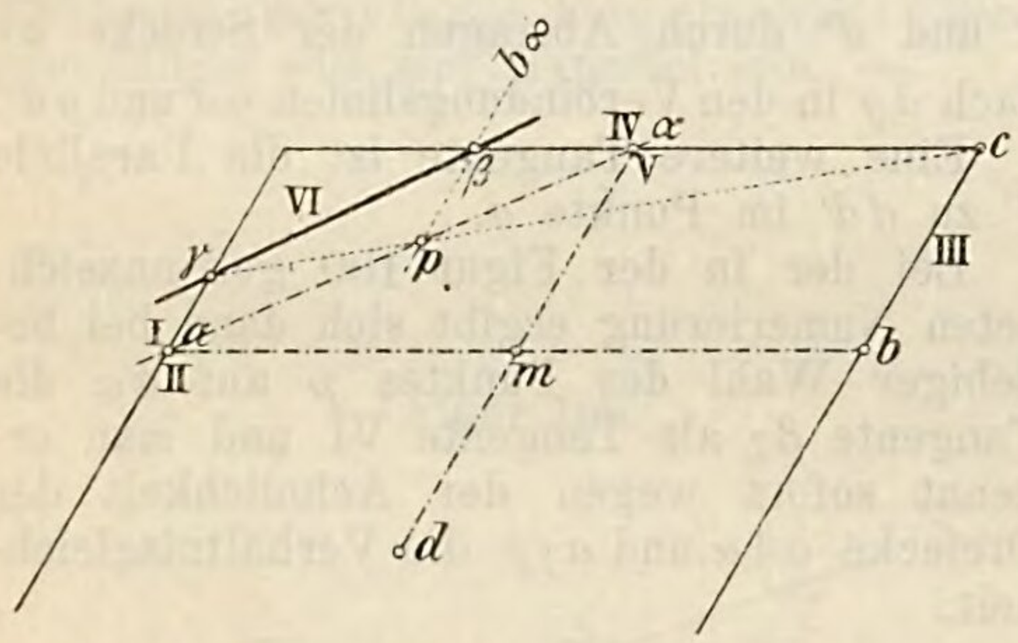
Die drei Grössen x_1', x' und a' lassen sich somit zu einem rechtwinkligen Dreiecke vereinigen mit den Katheten x_1', a' und der Hypotenuse x'.

Die Hypotenusen sind auf der bezüglichen Parallelen der Punkte 1, 2, 3 · · abzutragen, wodurch sich die Hyperbelpunkte I, II, III · · · ergeben, vergl. auch Aufgabe 23.

Der Kegelschnitt sei eine Ellipse.

Auflösung b. Erste Konstruktion. Bezeichnet man wie in Figur 98, so liegen die Brianchon'schen Punkte auf der Linie $a\alpha$, d. i. die Verbindungslinie der Endpunkte zweier conjugierten Durchmesser.

Figur 98.



Erkl. 83. Die gegebenen Durchmesser seien wieder $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ und das durch die Tangenten in ihren Endpunkten gebildete Parallelogramm heisse $efgh$, wobei die Punkte e bis h wie in Figur 93 angebracht sein sollen.

Bezeichnet man nun die Tangente in a mit I, die gesuchte Tangente mit II, jene in c, b und d beziehungsweise mit III, IV und V, VI und wendet den Brianchon'schen Satz an, so erhält man die in Auflösung b genannte zweite Konstruktion.

Der geehrte Leser entwerfe sich die Figur nach den Angaben des Textes.

Erkl. 84. Wählt man die in Aufgabe 66, Auflösung b, zweite Konstruktion genannten Punkte p innerhalb der Strecke $\overline{mp'}$ (p' = Schnittpunkt von ah und ge), so liegen die Schnittpunkte der Tangente II mit den Tangenten I und V in Punkten der Tangenten VI.

Der Punkt b, als Schnittpunkt von II und III, liegt unendlich fern in der Richtung bc.

Die Linien pc und $p\beta$ liefern die Punkte γ und β einer Tangente VI. Will man die Ellipse durch Tangenten einhüllen, so teile man die Linie $a\alpha$ in eine beliebige Anzahl gleicher Teile und verbinde die Teilpunkte sowohl mit c als auch mit dem unendlich fernen Punkt b, so schneiden diese Linien die Tangenten I und V in Punkten der Tangenten VI.

Entsprechend verfahre man in den drei übrigen Vierteln der Ellipse.

Zweite Konstruktion. Für das Viertel $afcm$, siehe Erkl. 83, wähle man auf ge einen Punkt p willkürlich und verbinde denselben mit den Punkten h und d, so schneiden diese Linien auf den Tangenten I und III Punkte der Tangente II aus.

Der Kegelschnitt sei eine Hyperbel.

Auflösung b. Die gegebenen Durchmesser sind die Mittellinien eines Parallelogrammes, dessen Diagonalen die Asymptoten der Hyperbel bilden. Kennt man aber diese, so kann man wie in Aufgabe 51, Auflösung b

genten I und II stets innerhalb der Strecken $\overline{af}$ und $\overline{fc}$.

Erkl. 85. Zur Zeichnung des Ellipsenviertels ceb dienen die Punkte g und d, desgleichen für die Viertel bhd und agd die Punkte f und c bezw. e und c.

Erkl. 86. Die nebenstehend durchgeführte zweite Konstruktion hat den Vorzug, dass die zur Ausführung der Konstruktion erforderliche Fläche durch das Parallelogramm $efgh$ begrenzt ist.

Erkl. 87. Durch eine andere Reihenfolge in der Bezeichnung der Tangente liessen sich ohne Schwierigkeit noch weitere, einfache und zweckmässige Konstruktionen ableiten.

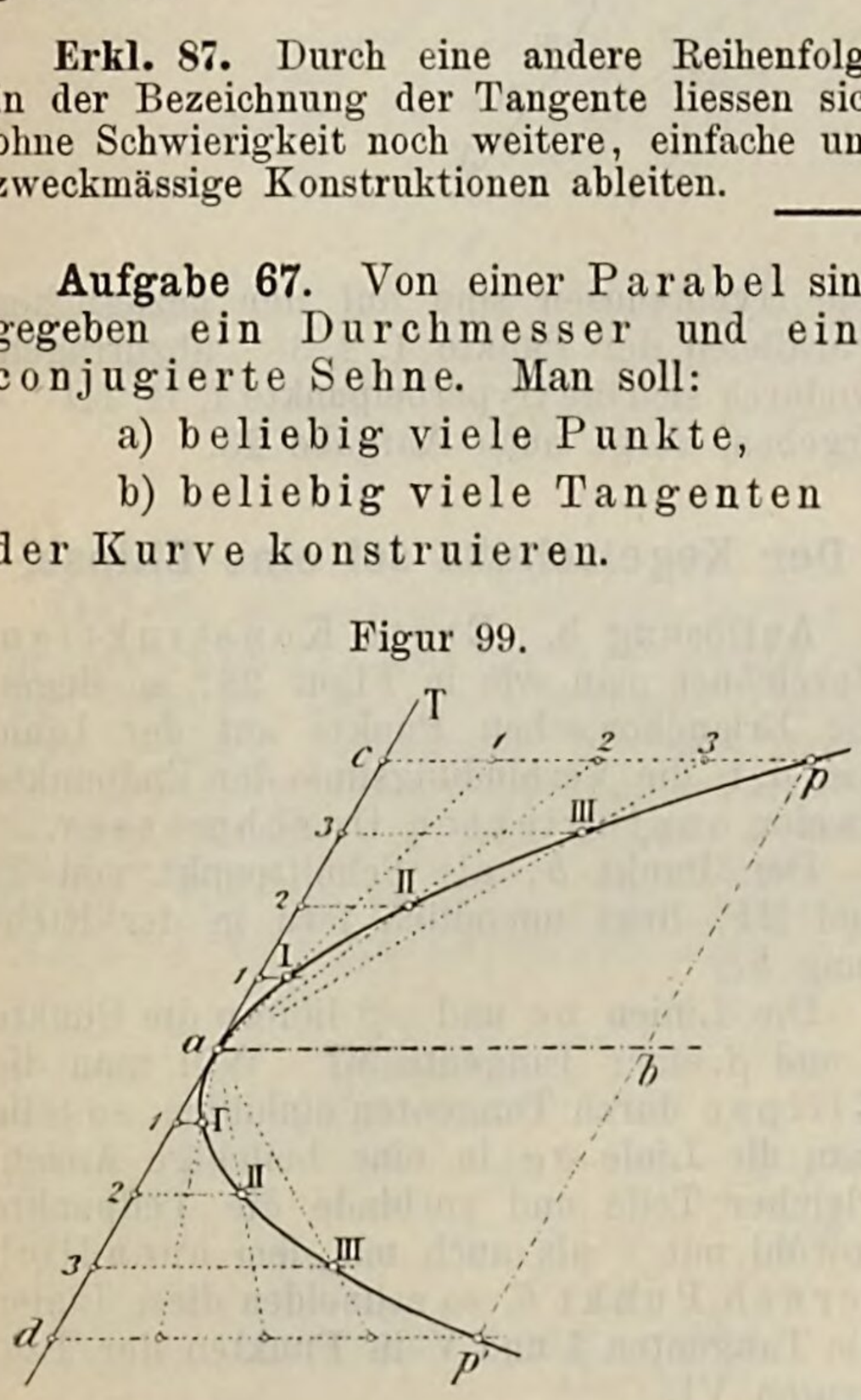
Aufgabe 67. Von einer Parabel sind gegeben ein Durchmesser und eine conjugierte Sehne. Man soll:

a) beliebig viele Punkte,

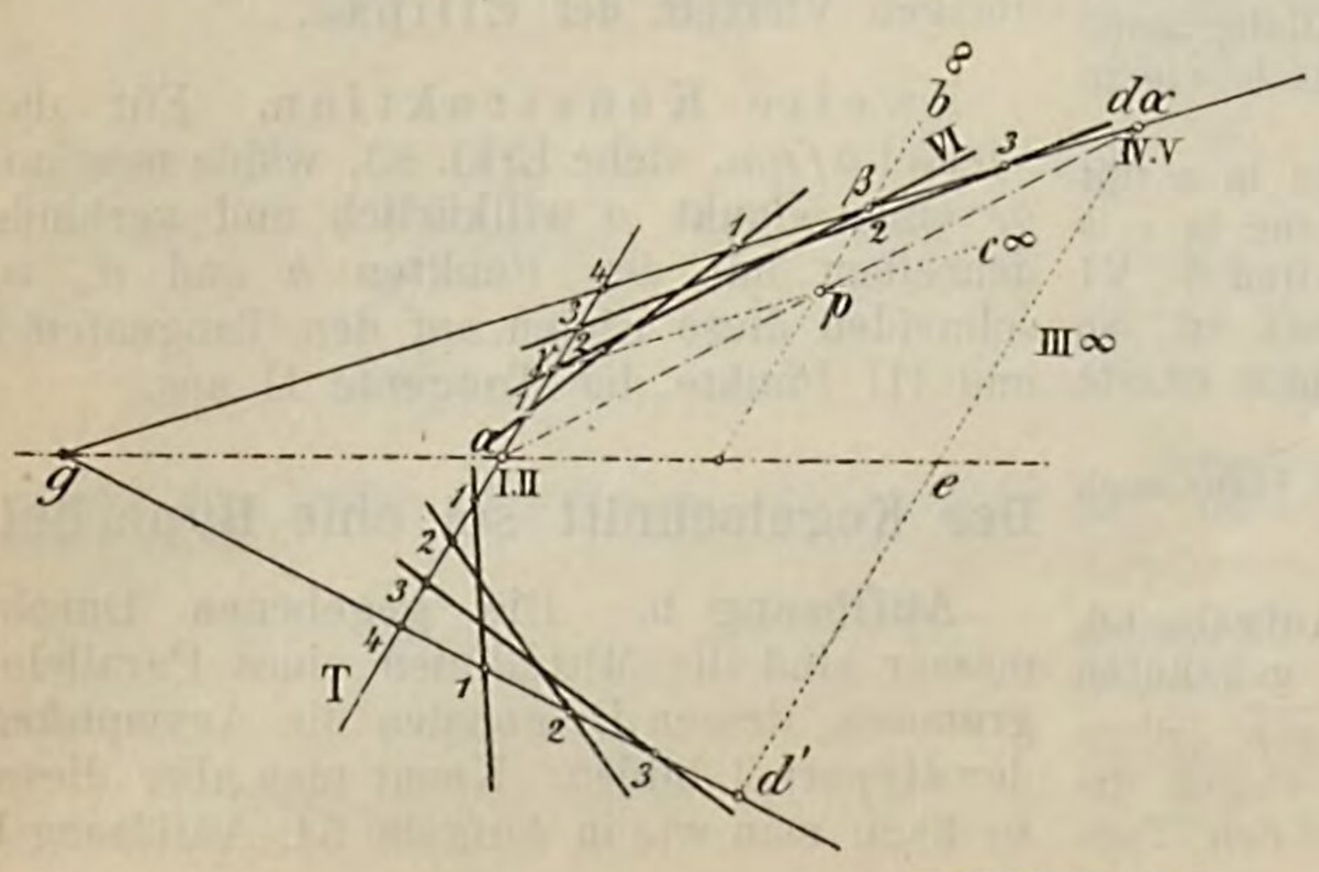
b) beliebig viele Tangenten

der Kurve konstruieren.

Figur 99.



Figur 100.



Auflösung a. Zeichnet man, s. Figur 99, das Parallelogramm $cdpp'$, so lässt sich für dasselbe die gleiche Konstruktion ausführen, wie jene in Aufgabe 54, denn durch affine Verwandlung der Figur 87 ergibt sich offenbar die Anordnung der Figur 99.

Auflösung b. Man erhält zunächst, siehe Figur 100, die Tangenten in den Punkten d und d' durch Abtragen der Strecke $\overline{ae}$ nach $\overline{ag}$ in den Verbindungslinien gd und gd'.

Eine weitere Tangente ist die Parallele T zu dd' im Punkte a.

Bei der in der Figur 100 gekennzeichneten Numerierung ergibt sich dann bei beliebiger Wahl des Punktes p auf $a\alpha$ die Tangente $\beta\gamma$ als Tangente VI und man erkennt sofort wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $a4\alpha$ und $a\gamma p$ die Verhältnisgleichheit:

$$\frac{\overline{a4}}{\overline{a\gamma}} = \frac{\overline{4\alpha}}{\overline{\gamma p}} \text{ oder } = \frac{\overline{4\alpha}}{\overline{4\beta}}$$

Teilt man daher die Strecke $\overline{a4}$, desgl. die Strecke $\overline{4\alpha}$ in die nämliche Anzahl gleicher Teile, bezeichnet dieselben wie in Figur 100, so geben die Verbindungslinien gleichbezeichneter Punkte Parabeltangenten.

---

beliebig viele weitere Hyperbeltangenten konstruieren.

Aufgabe 68. Von einem Kegelschnitt sind gegeben ein Brennpunkt f und

a) drei Punkte,

b) zwei Punkte und eine Tangente,

c) ein Punkt und zwei Tangenten,

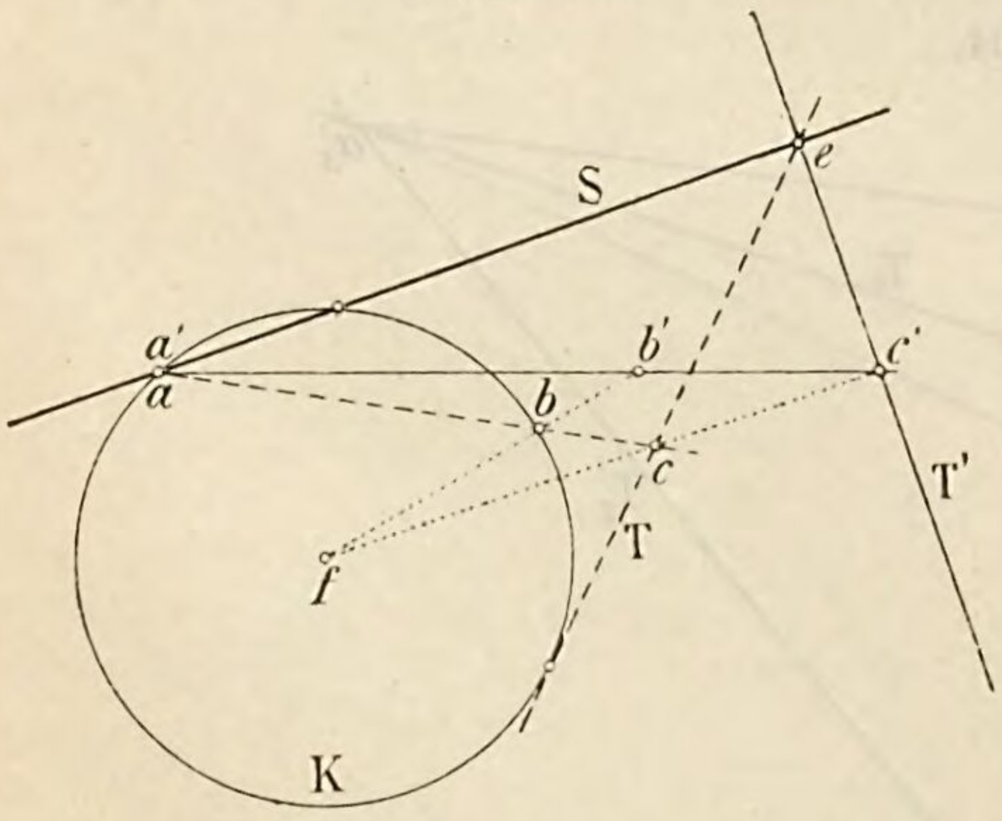
d) drei Tangenten.

Man soll den Kegelschnitt mit Zuhilfenahme eines zu ihm centrisch-collinearen Kreises konstruieren.

Erkl. 88. Die Strahlen $b'f$ und $c'f$ schneiden den Kreis K zum zweiten Male in b_0 und c_0 und man kann nun der Geraden $b'c'$ jede der Verbindungslinien bc, bc_0, b_0c und b_0c_0 entsprechen lassen, so dass es vier Punkte s auf $b'c'$ und demnach vier Collineationsachsen S gibt.

Erkl. 89. Es gibt vier Kegelschnitte, die den nämlichen Brennpunkt haben und durch dieselben drei Punkte hindurchgehen. Von diesen Kegelschnitten sind stets drei Hyperbeln, der vierte Kegelschnitt kann eine Ellipse oder eine Hyperbel sein.

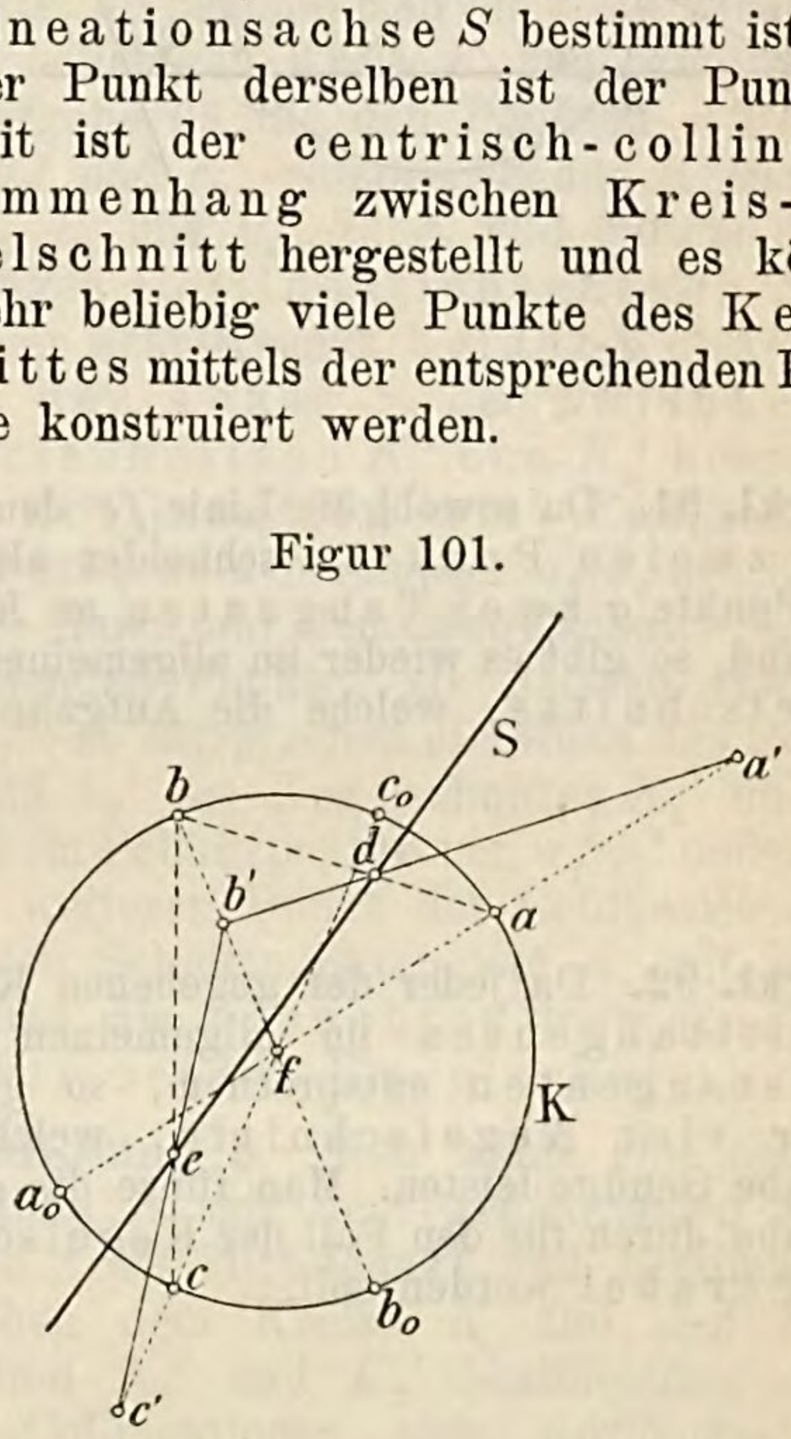
Figur 102.



Erkl. 90. Da im allgemeinen ausser dem Punkte b bezw. der Tangente T an den Kreis K noch ein zweiter Punkt b_0, bezw. eine zweite Tangente T_0 möglich ist, so gibt es wieder vier Kegelschnitte, welche die Aufgabe lösen.

Auflösung a. Man lege, siehe Figur 101, durch einen der gegebenen Punkte, etwa durch den Punkt a einen Kreis K mit dem Mittelpunkte f, so entsprechen den Punkten b' und c' des Kegelschnittes die Kreispunkte b und c, wodurch der Punkt s der Collineationsachse S bestimmt ist; ein zweiter Punkt derselben ist der Punkt a. Hiermit ist der centrisch-collineare Zusammenhang zwischen Kreis- und Kegelschnitt hergestellt und es können nunmehr beliebig viele Punkte des Kegelschnittes mittels der entsprechenden Kreispunkte konstruiert werden.

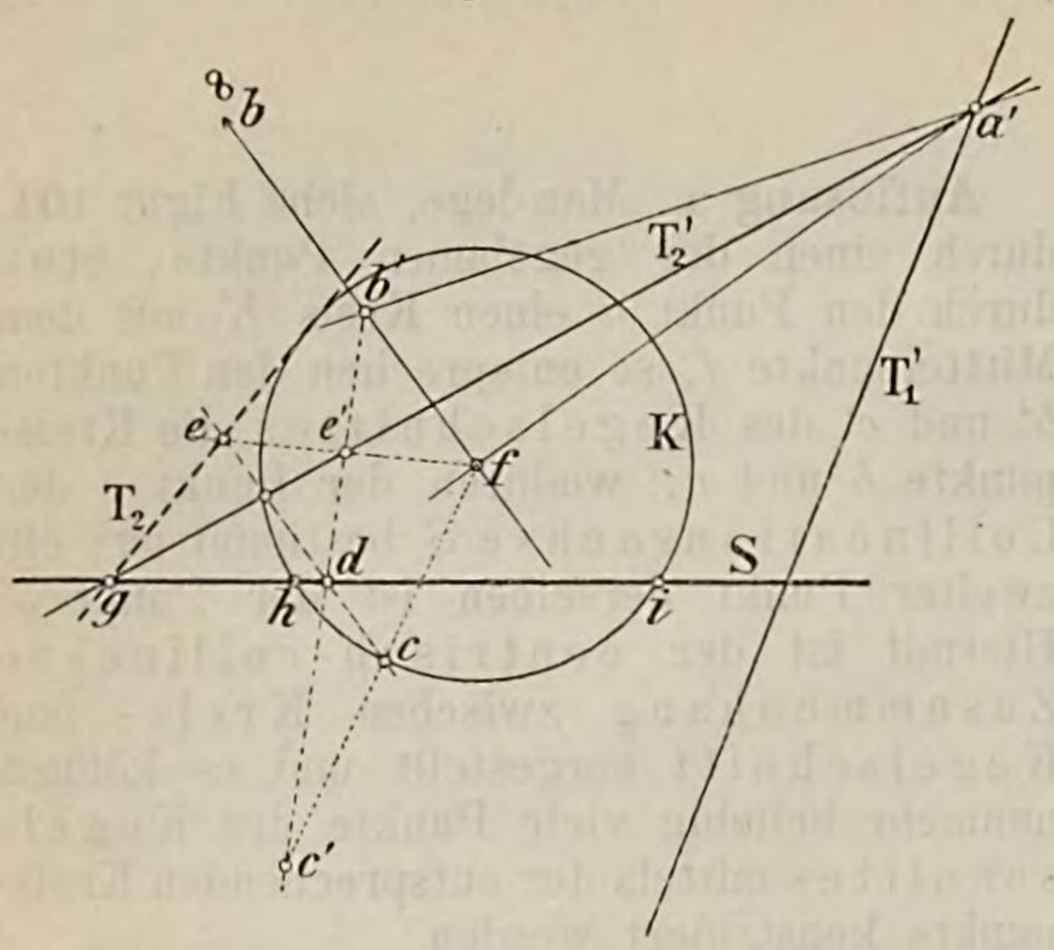
Figur 101.



Auflösung b. Man wähle, s. Figur 102, den Kreis K wieder wie in Auflösung a, so entspricht dem Punkte b' der Punkt b. Nun schneidet die Verbindungslinie $a'b'$ die Tangente T' in einem Punkte c', dem auf der Linie ab der Punkt c entspricht, durch welchen eine Tangente T an den Kreis K zu ziehen ist, deren Schnittpunkt mit T' einen Punkt e der Collineationsachse S enthält. Diese Achse geht ausserdem durch den Punkt a. Die weitere Konstruktion vollzieht sich wie in Auflösung a.

Auflösung c. Sind, siehe Figur 103, T_1' und T_2' die gegebenen Tangenten und ist a' ihr Schnittpunkt, so konstruiere man zu den drei Geraden T_1', $a'f$ und T_2' den vierten harmonischen Strahl, so trifft dieser die in f zur Linie $a'f$ errichtete Senkrechte in einem Punkte b' der Leitlinie des Kegelschnittes, d. h. der Polare des Brennpunktes f. Der Punkt b' gehört

Figur 103.



Erkl. 91. Da sowohl die Linie fc' den Kreis K in zweien Punkten schneidet als auch vom Punkte g zwei Tangenten an K möglich sind, so gibt es wieder im allgemeinen vier Kegelschnitte, welche die Aufgabe lösen.

Erkl. 92. Da jeder der gegebenen Kegelschnitttangenten im allgemeinen zwei Kreistangenten entsprechen, so gibt es wieder vier Kegelschnitte, welche der Aufgabe Genüge leisten. Man führe die gleiche Aufgabe durch für den Fall der Kegelschnitt eine Parabel werden soll.

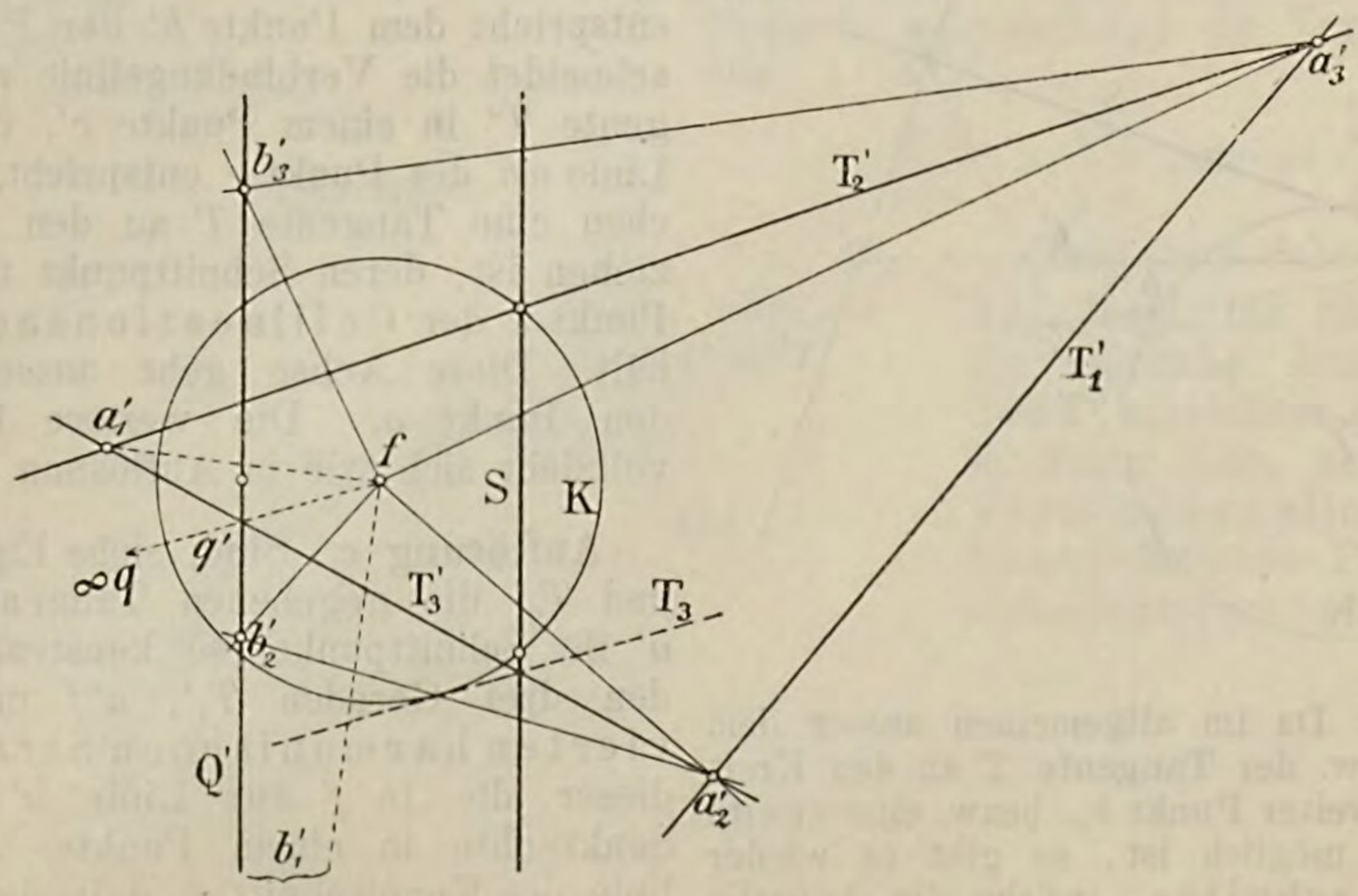
also der Gegenachse Q' an und ihm entspricht centrisch-collinear der unendlich ferne Punkt auf fb'.

Zieht man daher $b'c'$, so entspricht dieser Linie die Gerade bc, d. h. die durch c zu fb' gezogene Parallele, somit dem Schnittpunkt e' von T_2' und $b'c'$ der Schnittpunkt e von bc und $e'f$. Durch e geht nunmehr die der Geraden T_2' entsprechende Kreistangente T_2 und sie schneidet T_2' in einem Punkte g der Collineationsachse S'; ein weiterer Punkt derselben ist der Schnittpunkt d der Linien $c'e'$ und ce. Nachdem jetzt der centrisch-collineare Zusammenhang zwischen Kreis und Kegelschnitt festgestellt ist, können beliebige weitere Punkte oder Tangenten des Kegelschnittes entsprechend den Kreispunkten bezw. den Kreistangenten konstruiert werden.

Auflösung d. Man konstruiere, siehe Figur 104, zu den Tangenten T_1' und T_2' sowie der Verbindungslinie $a_3'f$ ihres Schnittpunktes mit dem Brennpunkt f den vierten harmonischen Strahl und erhält hierdurch auf der Senkrechten fb_3' zu fa_3' einen Punkt b_3' der Gegenachse Q'.

Desgleichen liefert der vierte harmonische Strahl zu den Linien $T_1'T_3'$ und $a_2'f$ auf der Senkrechten fb_2' zu fa_2' einen weiteren Punkt b_2' von Q'. Hierdurch ist aber der centrisch-collineare Zusammenhang zwischen Kreis und Kegelschnitt festgelegt und es können nunmehr beliebig viele Kegelschnitttangenten ermittelt werden.

Figur 104.



Aufgabe 69. Von zweien Kegelschnitten mit gemeinsamem Brennpunkte sind gegeben je:

a) drei Punkte,
b) drei Tangenten,
c) zwei Punkte und eine Tangente,
d) ein Punkt und zwei Tangenten.

Man soll die den beiden Kegelschnitten gemeinsamen Punkte konstruieren.

Erkl. 93. Da eine Gerade einen Kreis in höchstens zweien Punkten schneiden kann, so können zwei Kegelschnitte mit gemeinsamem Brennpunkte höchstens in zweien Punkten sich schneiden, woraus wieder hervorgeht, dass der Brennpunkt für zwei Bestimmungsstücke eines Kegelschnittes zu zählen hat.

Auflösung a. Sind K_1' und K_2' die beiden Kegelschnitte mit dem gemeinsamen Brennpunkte f, ferner a_1', b_1', c_1' bezw. a_2', b_2', c_2' die gegebenen Punkte beider Kegelschnitte, so zeichne man um f als Mittelpunkt einen beliebigen Kreis K und ermittele wie in Aufgabe 68 die den Punkten a_1', b_1', c_1', a_2', b_2' und c_2' entsprechenden Kreispunkte a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 und daraus die zugehörigen Collineationsachsen S_1 und S_2. Der Schnittpunkt beider Achsen gehört der Achse S_0 der zwischen den Kegelschnitten K_1' und K_2' bestehenden Collineation an. Ermittelt man ferner etwa zu den Punkten a_2, b_2 des Kreises K die ihnen auf dem Kegelschnitt K_1' entsprechenden Punkte, sie heissen etwa a_1'' und b_1'', so entsprechen dieselben den Punkten a_2' und b_2' des Kegelschnittes K_1' und man erhält im Schnittpunkte von $a_2'b_2'$ und $a_1''b_1''$ einen weiteren Punkt der Collineationsachse S_0; den Schnittpunkten von S_0 mit K entsprechen die gesuchten gemeinsamen Punkte beider Kegelschnitte.

Auflösung b. Man wähle eine beliebige Kreislinie K mit dem gemeinsamen Brennpunkte f als Mittelpunkt und bestimme die zwischen dem Kreise K und den Kegelschnitten K_1' und K_2' bestehenden centrischen Collineationen, siehe Auflösung d der Aufgabe 68. Hierauf konstruiere man die Collineationsachse der zwischen K_1' und K_2' bestehenden centrischen Collineation, indem man zu zweien Tangenten von K_1' etwa T_1' und T_1'', die entsprechenden Tangenten T' und T'' auf dem Kreise K und zu diesen wieder die entsprechenden Tangenten T_2' und T_2'' auf dem Kegelschnitt K_2' ermittelt.

T_1' und T_2', ebenso T_1'' und T_2'' entsprechen sich dann centrisch-collinear in den beiden Kegelschnitten K_1' und K_2' und liefern durch Verbindung ihrer Schnittpunkte die zugehörige Collineationsachse, auf welcher die, beiden Kegelschnitten gemeinsamen Punkte, liegen; sie entsprechen dem Schnittpunkte jener der Geraden S_0 im Kreise entsprechenden Geraden, mit dem Kreise K.

Auflösung c. Man verschaffe sich zu den zwischen einer beliebigen Kreislinie K mit dem Mittelpunkte f und den Kegelschnitten K_1' und K_2' bestehenden Central-

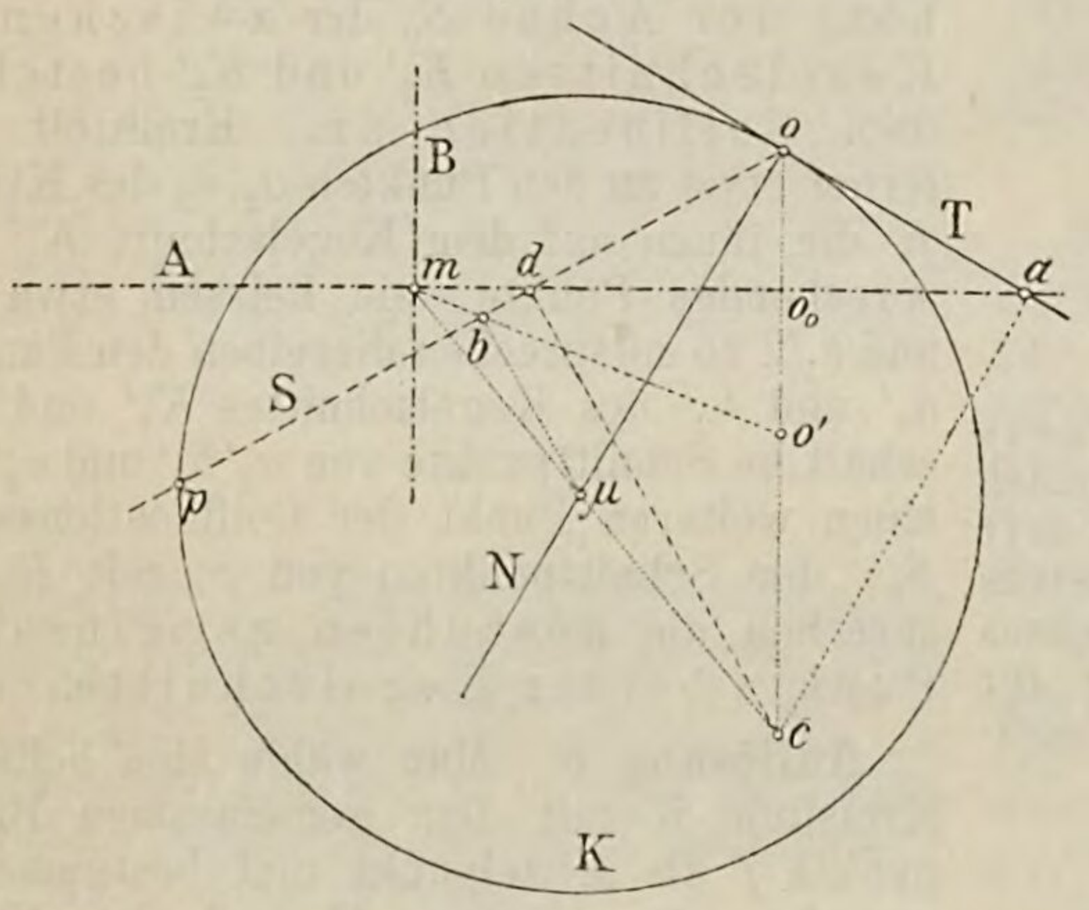
collineationen die zugehörigen Collineationsachsen und bestimme hierauf in gleicher Weise, wie in Auflösung a und b, die zwischen den Kegelschnitten K_1' und K_2' bestehende Centralcollineation und damit die gemeinsamen Punkte beider Kegelschnitte.

---

i) Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt der Kegelschnitte, welche durch fünf Bestimmungsstücke gegeben sind.

Anmerkung 25. In Antwort der Frage 51 wurde schon erwähnt, dass in jenem Fall der Centralcollineation zwischen Kreis- und Kegelschnitt, in welchem das Collineationscentrum o auf den Kegelschnitt selbst fällt und ausserdem die Collineationsachse S durch das Centrum hindurch geht, in dem Punkte o drei Kreispunkte mit dreien Kegelschnittpunkten sich decken, der Kreis also Krümmungskreis des Kegelschnittes im Punkte o sein muss.

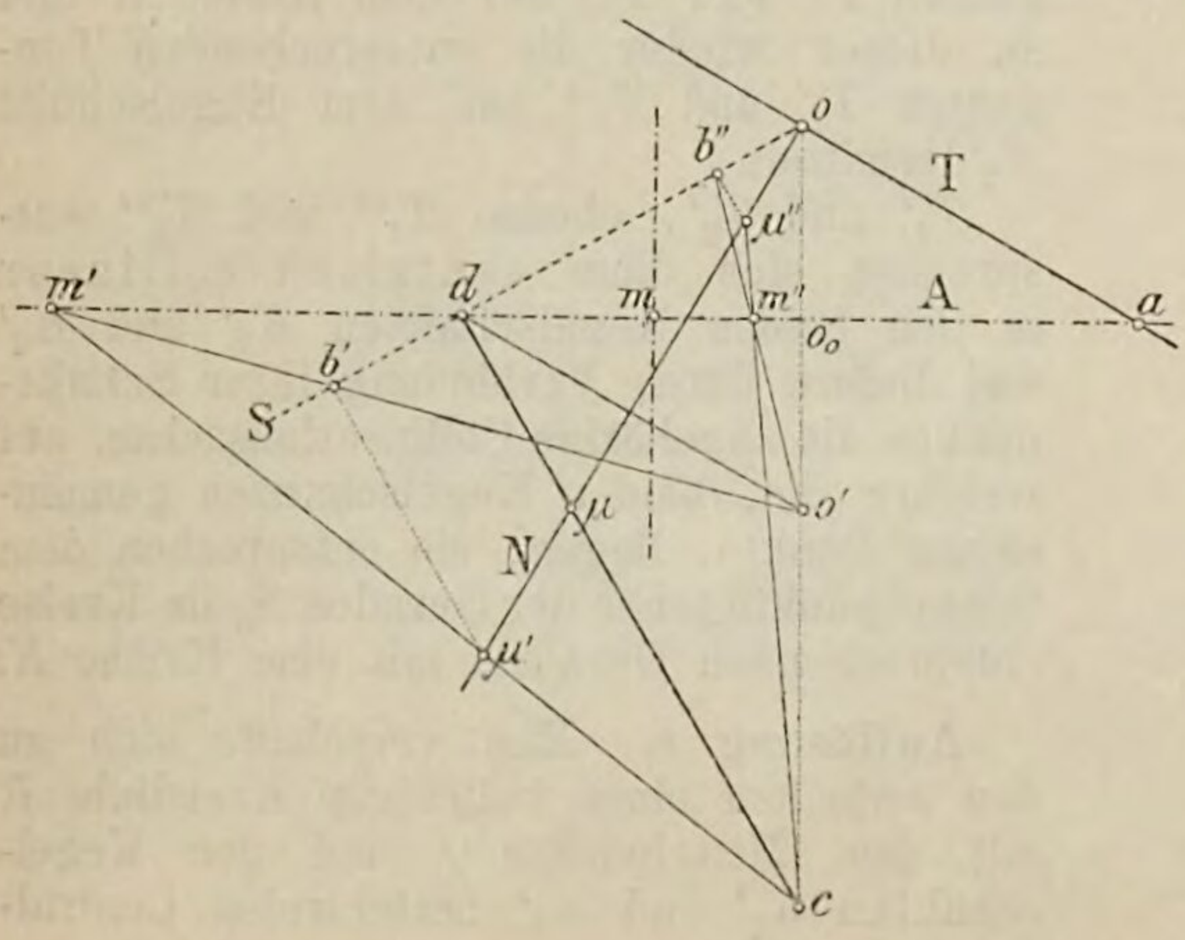
Figur 105.



Aus dieser Eigenschaft lassen sich nun eine Reihe von wichtigen und höchst einfachen Krümmungsmittelpunktskonstruktionen ableiten, von welchen im Folgenden die gebräuchlichsten hervorgehoben werden sollen.

Frage 61. Welche Krümmungsmittelpunktskonstruktion leitet sich aus der in Antwort der Frage 51 näher bezeichneten Centralcollineation zwischen Kreis- und Kegelschnitt zunächst ab?

Figur 106.



Antwort. Ist, siehe Figur 105, K der Krümmungskreis für den Punkt o des Kegelschnittes, so bildet, siehe Frage und Antwort 50, die Collineationsachse S mit den Kegelschnittachsen dieselben Winkel wie die Tangente T im Punkte o, d. h. sie ist eine conjugierte Sehne zum Halbmesser $\overline{mo'}$ des Gegenpunktes o' von o bezüglich der Kegelschnittachse A.

Die Verbindungslinie $o'm$ trifft daher die Kegelschnittsehne op im Halbierpunkte b und die Senkrechte zu op in b liefert auf der Normalen N den Mittelpunkt μ von K, d. h. den Krümmungsmittelpunkt für den Kegelschnittpunkt o.

Verlängert man die Verbindungslinie $m\mu$ bis zum Schnitt c mit oo' und zieht cd, so steht diese Linie senkrecht auf S, s. Erkl. 94. In Rücksicht auf die gegenseitige Lage der

Erkl. 94. Dass die Verbindungslinie cd senkrecht steht zur Linie S, lässt sich in mehrfacher Weise zeigen, am einfachsten wohl wie folgt:

Denkt man sich, siehe Figur 106, der Punkt m bewege sich auf A und konstruiert man in jeder Lage, z. B. m', m'', den zugehörigen Punkt μ, so bilden die Punkte m und μ zwei perspektivisch liegende Punktreihen, in welchen o und o_0 entsprechende Punkte sind; die Verbindungslinien $m\mu$ schneiden sich daher alle in einem Punkte c auf oo'. Kommt der Punkt m in den Schnittpunkt d von A und S zu liegen, so fällt der zugehörige Punkt b ebenfalls auf d. Der entsprechende Punkt μ liegt aber dann auf der Senkrechten durch d zu S und diese muss durch c hindurch gehen.

Frage 62. Welcher Satz leitet sich aus der in Antwort der Frage 61 durchgeführten Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes eines Kegelschnittpunktes ab?

Erkl. 95. Auf Grund des in Antwort der Frage 62 angeführten Satzes ergeben sich die bereits früher, siehe Aufgabe 19 und 37 durchgeführten Konstruktionen als Spezialfälle.

Erkl. 96. Der Berührpunkt der Hilfsparabel mit der Tangente T ist der Pol der Normalen N bezüglich des Kegelschnittes.

Antwort. Der Punkt a, siehe Figur 105, ist der Pol der Kegelschnittssehne oo', die Achse A die Senkrechte durch diesen Pol zur genannten Sehne; desgleichen ist die Achse B die Senkrechte durch den Pol der durch o senkrecht zur Achse B gezogenen Sehne. Alle diese Senkrechten bilden, s. Anmerkung 17, Tangenten an eine Parabel, deren Leitlinie die Mittelpunktssekante des Punktes o darstellt. Dieser Parabel gehören auch die Linien T und N an, denn T ist die Senkrechte zu N durch den Pol von N und N ist die Senkrechte zu T durch den Pol von T.

Konstruiert man nun zu den vier Tangenten A, B, N und T mittels des Brianchon'schen Satzes den Berührpunkt auf N, so erhält man hierfür den Punkt μ, d. h. den Krümmungsmittelpunkt für den Punkt o.

Man kann daher folgenden Satz aussprechen:

„Dreht sich um einen Punkt eines Kegelschnittes ein Strahl und konstruiert man zu ihm in jeder Lage den Pol, so umhüllen die durch die Pole der bezüglichen Strahlen zu diesen gefällten Senkrechten eine Parabel, welche die Normale des Punktes o im Krümmungsmitelpunkte berührt."

Linien od, oa, cd, ca, steht dann auch die Verbindungslinie ca senkrecht zur Tangente T. Zusammengefasst erhält man folgende einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes eines Kegelschnittes, für den Fall die Achsen der Lage nach bekannt sind:

„In dem Schnittpunkte der Tangente des Punktes o mit einer Kegelschnittachse errichte man eine Senkrechte zu dieser Tangente und bringe sie zum Schnitt mit der durch den Punkt o zur nämlichen Kegelschnittachse gefällten Senkrechten. Die Verbindungslinie dieses Schnittpunktes mit dem Kegelschnittmittelpunkt liefert auf der Normalen von o den gesuchten Krümmungsmittelpunkt."

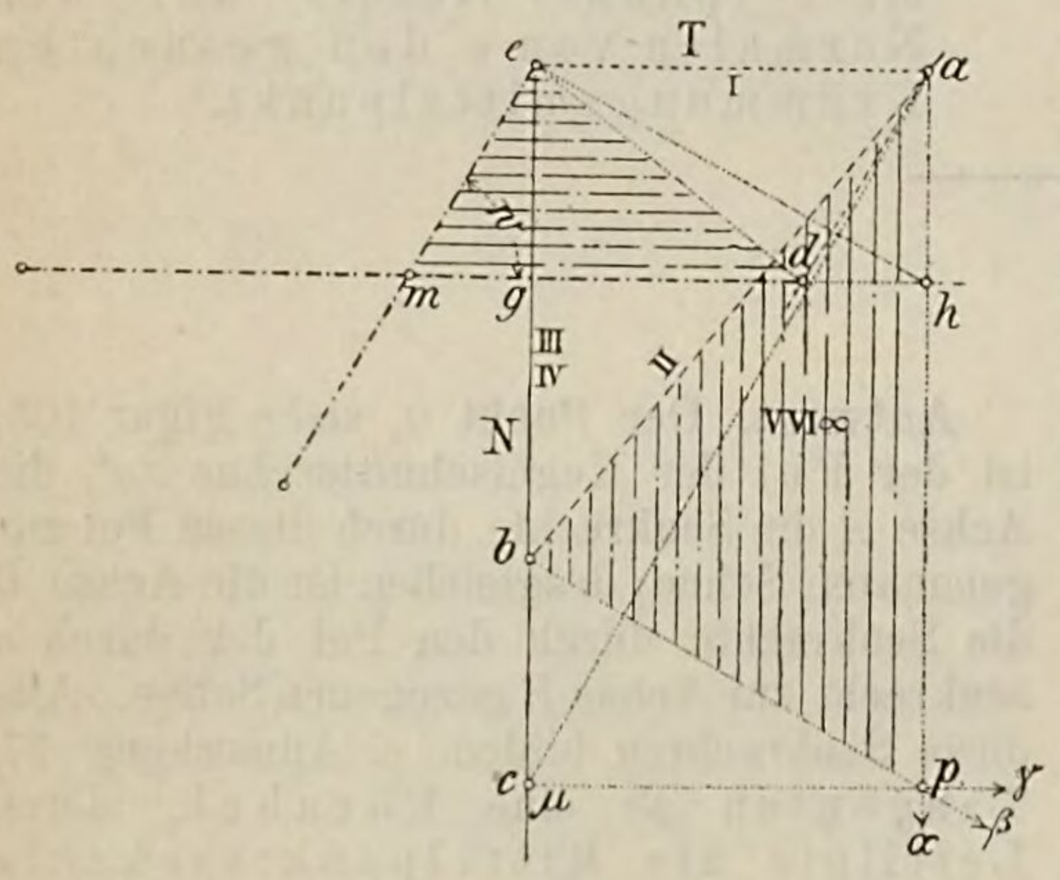
k) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 70. Von einem Kegelschnitt sind gegeben zwei conjugierte Durchmesser. Man soll für einen Endpunkt des einen Durchmessers den Krümmungsmittelpunkt konstruieren.

Der Kegelschnitt sei eine Ellipse.

Auflösung Sind, siehe Figur 107, $\overline{md}$ und $\overline{me}$ conjugierte Halbmesser, so kennt man unmittelbar von der Hilfsparabel, siehe Antwort der Frage 62, drei Tangenten, nämlich die Tangente und Normale des Punktes e, ausserdem die Senkrechte durch den Pol a von ed zu dieser Linie; da ferner die Linie me die Leitlinie der Parabel darstellt, so gibt die Senkrechte hierzu die Richtung der Achse und damit die Richtung an, in welcher der Berührpunkt der unendlich fernen Parabeltangente liegt. Bezeichnet man nun, wie in der Figur 107 geschehen und wendet den Brianchon'schen Satz an, so erhält man im Punkte μ den Krümmungsmittelpunkt für den Punkt e.

Figur 107.



Aus der Figur ergeben sich nun folgende Beziehungen:

Die Dreiecke mde und pab sind ähnlich, weil die entsprechenden Seiten aufeinander senkrecht stehen; es verhalten sich somit entsprechende Seiten wie die zugehörigen Höhen, d. h. man hat folgende Verhältnisgleichheit:

89) . . . $\overline{md} : \overline{pa} = \overline{eg} : \overline{p\mu}$, oder

wenn mit a, b und ϱ die Längen der conjugierten Halbmesser $\overline{md}$ und $\overline{me}$ sowie der Krümmungshalbmesser $\overline{c\mu}$ bezeichnet werden:

$$a : \varrho = b \cdot \sin w : a$$

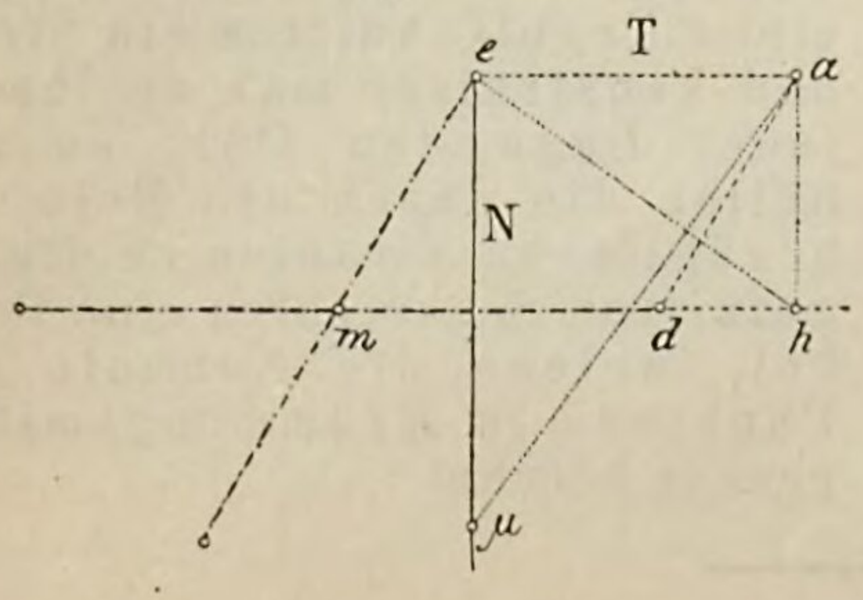
woraus folgt:

90) . . . $$\varrho = \frac{a^2}{b \sin w}$$

Bezeichnet man mit h den Schnittpunkt von ap und md, so folgt mit Bezug auf die Gleichung 89) noch die weitere Gleichung:

91) . . . $\overline{ea} : \overline{pa} = \overline{ah} : \overline{p\mu}$

Figur 108.



Es sind demnach die rechtwinkligen Dreiecke eah und $ap\mu$ ähnlich, daher stehen die Linien eh und $a\mu$ aufeinander senkrecht, womit die folgende weitere Konstruktion für den Krümmungsmittelpunkt eines Punktes e einer Ellipse begründet ist:

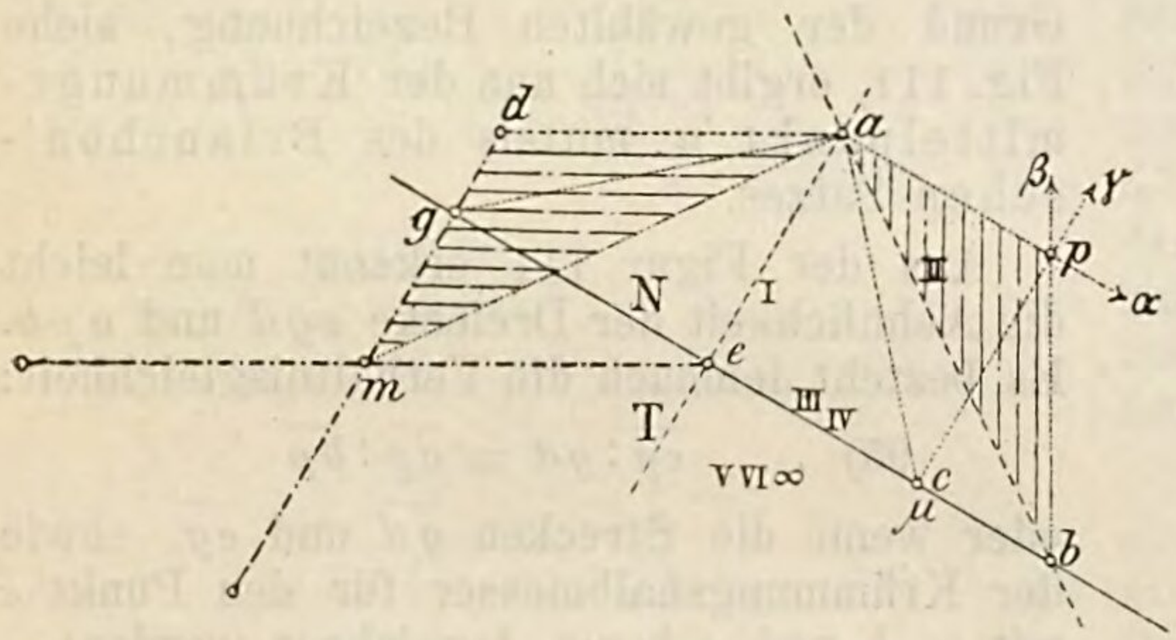
„Man fälle, siehe Figur 108, von der dem Mittelpunkte m gegenüberliegenden Ecke a des Parallelogrammes $mdae$ eine Senkrechte zur Seite md

und hierauf von demselben Punkte a eine Senkrechte zur Verbindungslinie eh, so trifft diese die Normale N des Punktes e im gesuchten Krümmungsmittelpunkte μ."

Der Kegelschnitt sei eine Hyperbel.

Auch für die Hyperbel lassen sich in gleicher Weise wie für die Ellipse ausserordentlich einfache Konstruktionen für den Krümmungsmittelpunkt ableiten. Sind nämlich, siehe Figur 109, me und md conjugierte Halbmesser und konstruiert man wieder das Parallelogramm $mead$, so stellt die Diagonale ma eine Asymptote der Hyperbel dar und die durch a zur Asymptote ma gezogene Senkrechte gibt eine Tangente der Hilfsparabel. Bezeichnet man die Tangente und Normale im Punkte e, wie in der Fig. 109 angegeben, so ergibt sich in bekannter Weise mittels des Brianchon'schen Satzes der Punkt μ als Krümmungsmittelpunkt für den Punkt e.

Figur 109.



Aus der Figur 109 erkennt man sofort die Aehnlichkeit der Dreiecke mad und abp, woraus, wenn mit a, b, ϱ wieder die Längen der Halbmesser $\overline{me}$, $\overline{md}$ und der Krümmungshalbmesser bezeichnet werden, die Verhältnisgleichheit sich ergibt:

$$92) \quad \ldots \quad \overline{md} : \overline{ge} = \overline{ap} : \overline{p\mu}$$

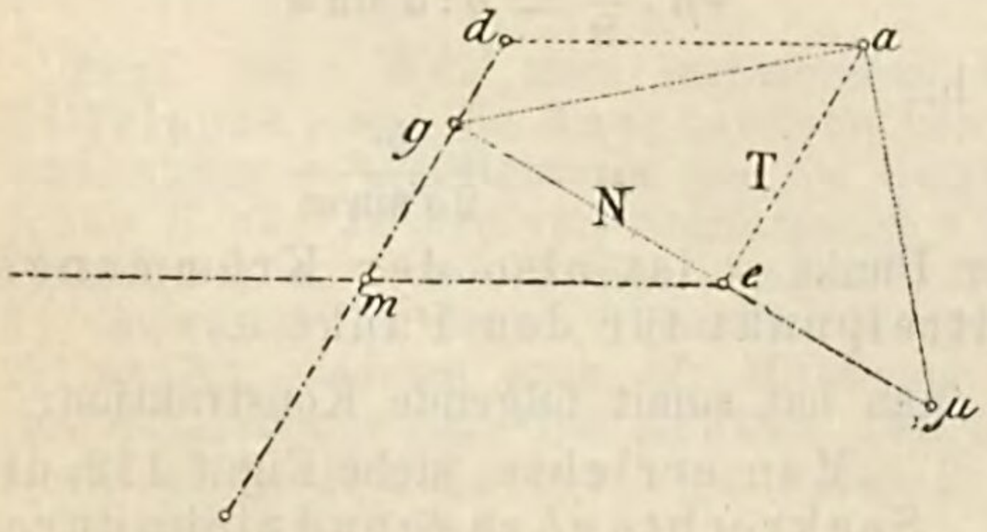
oder:

$$93) \quad \ldots \quad b : a \sin w = \varrho : b$$

folglich:

$$94) \quad \ldots \quad \varrho = \frac{b^2}{a \sin w}$$

Figur 110.

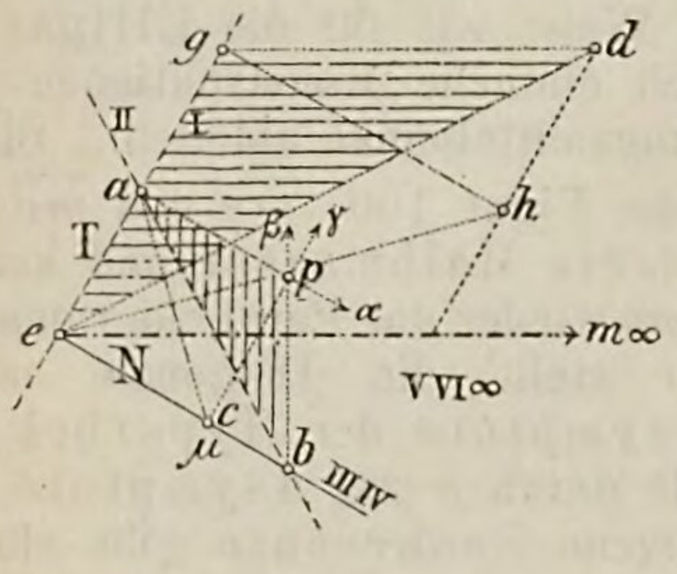


Aus der Verhältnisgleichheit 92) folgt aber weiter die Aehnlichkeit der Dreiecke gae und $a\mu e$ und hieraus wieder, dass die Linien ga und μa aufeinander senkrecht stehen.

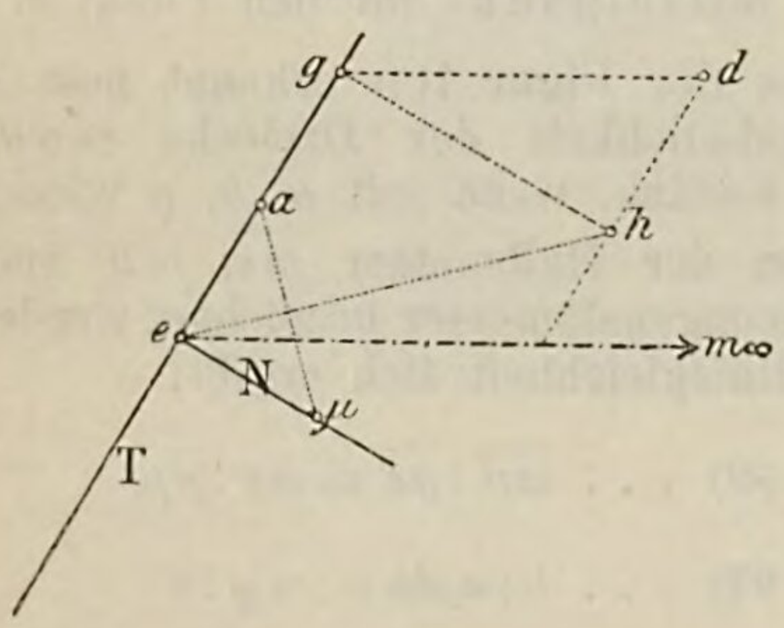
Aus vorstehender Entwickelung ergibt sich folgende einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes einer Hyperbel:

„Man ziehe, siehe Figur 110, zur Verbindungslinie eg des Schnittpunktes der Normalen N mit dem Halbmesser md eine Senkrechte durch a, so liefert diese auf N den gesuchten Krümmungsmittelpunkt μ."

Figur 111.



Figur 112.



Erkl. 97. Die in Aufgabe 70 für die Parabel zuletzt angeführte Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes ist insofern bemerkenswert, als sie für alle drei Kegelschnitte in gleicher Weise Gültigkeit besitzt, wenn man unter T die Tangente in dem Endpunkte eines Durchmessers $\overline{em}$, unter d einen beliebigen Punkt des Kegelschnittes und unter a den Pol der Berührsehne $\overline{ed}$ versteht.

Man kann diese Konstruktion mit Vorteil auch dann anwenden, wenn der Kegelschnitt durch fünf Punkte oder Tangenten, überhaupt durch fünf Bestimmungsstücke gegeben ist, weil es in allen diesen Fällen keiner Schwierigkeit unterliegt, sich einen Durchmesser der Lage nach und die Tangente in einem Endpunkte derselben zu verschaffen, siehe Aufgabe 71.

Der Kegelschnitt sei eine Parabel.

Von der Parabel soll gegeben sein ein Durchmesser me, die Tangente T in seinem Endpunkte e, ausserdem noch ein weiterer Punkt d. Man kennt zunächst, siehe Figur 111, wieder zwei Tangenten an die Hilfsparabel, nämlich T und N. Konstruiert man ferner den Pol von ed, so fällt derselbe in den Halbierpunkt a der Strecke $\overline{eg}$ und die durch a zu ed gezogene Senkrechte ist eine weitere Tangente an die Hilfsparabel, deren Leitlinie parallel zum Durchmesser em läuft. Auf Grund der gewählten Bezeichnung, siehe Fig. 111, ergibt sich nun der Krümmungsmittelpunkt μ mittels des Brianchon'schen Satzes.

Aus der Figur 111 erkennt man leicht die Aehnlichkeit der Dreiecke egd und apb. Es besteht demnach die Verhältnisgleichheit:

$$95) \quad \ldots \quad \overline{eg} : \overline{gd} = \overline{ap} : \overline{bp}$$

oder wenn die Strecken $\overline{gd}$ und $\overline{eg}$, sowie der Krümmungshalbmesser für den Punkt e mit a, b und ϱ bezw. bezeichnet werden:

$$96) \quad \ldots \quad b : a = \varrho : \frac{b}{2} \cdot \sin w$$

Es ist also:

$$97) \quad \ldots \quad \varrho = \frac{b^2}{2a \sin w}$$

Mit Bezug auf den eben gefundenen Wert ϱ erhält man noch eine weitere, sehr einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes. Zieht man nämlich gh senkrecht eg und durch a eine Senkrechte zu eh, so geht diese durch den Krümmungsmittelpunkt μ. Die Dreiecke $ea\mu$ und ghe sind ähnlich, somit besteht die Verhältnisgleichheit:

$$\overline{e\mu} : \overline{ea} = \overline{eg} : \overline{gh}$$

oder es ist:

$$\overline{e\mu} : \frac{b}{2} = b : a \sin w$$

d. h.:

$$\overline{e\mu} = \frac{b^2}{2a \sin w}$$

der Punkt μ ist also der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt e.

Man hat somit folgende Konstruktion:

„Man errichte, siehe Figur 112, die Senkrechte gh zu eg und ziehe durch den Halbierpunkt a der Strecke $\overline{eg}$ eine Senkrechte zu eh, so liefert diese auf der Normalen des Punktes e den gesuchten Krümmungsmittelpunkt μ."

Aufgabe 71. Von einem Kegelschnitt sind gegeben:

a) fünf Punkte,
b) vier Punkte und eine Tangente,
c) drei Punkte und zwei Tangenten,
d) zwei Punkte und drei Tangenten,
e) ein Punkt und vier Tangenten,
f) fünf Tangenten.

Man soll in einem Punkte des Kegelschnitts den Kegelschnitt der Krümmungsmittelpunkte konstruieren.

Auflösung a. Sind 1. 2. 3. 4. 5. die fünf gegebenen Punkte und will man etwa für den Punkt 1. den Krümmungsmittelpunkt konstruieren, so verschaffe man sich mittels des Pascal'schen Satzes die Tangente in 1, sowie die Lage des den Punkt 1 enthaltenden Durchmessers, indem man etwa durch einen der übrigen Punkte, etwa 5, eine zur Tangente im Punkte 1 parallele Sehne $5b$ konstruiert und diese halbiert. Durch den Halbierpunkt und durch 1 geht der genannte Durchmesser hindurch; nunmehr wende man die in Auflösung der Aufgabe 70 zuletzt genannte Konstruktion an.

Auflösung b bis e. Man zeichne mittels eines zum Kegelschnitt centrisch-collinearen Kreises den Durchmesser jenes Punktes, für welchen der Krümmungsmittelpunkt konstruiert werden soll, ausserdem die Tangente in jenem Punkte und verfahre im übrigen wie in Auflösung der Aufgabe 70.

Auflösung f. Man konstruiere für eine Tangente ihren Berührpunkt, so wie den Kegelschnittmittelpunkt und verfahre im übrigen wie in Auflösung der Aufgabe 70.

Aufgabe 72. Von einem Kegelschnitt sind gegeben drei Punkte, ausserdem kennt man in einem der Punkte den Krümmungskreis.

Man soll den Kegelschnitt konstruieren.

Erkl. 98. Will man insbesondere den Mittelpunkt und die Hauptachsen von K' konstruieren, so ermittele man sich die Gegenachse R und zeichne vom Schnittpunkt t der Tangente T an a' mit R eine Tangente T_1 an K_1; ihr entspricht die zu T parallele Tangente T_1' an K', wodurch auch der Mittelpunkt a' von K' bestimmt ist. Die Achsen sind nun parallel zu den Halbierlinien des Winkels von S und T.

Auflösung. Sind a', b', c' die gegebenen Punkte des Kegelschnittes K' und ist in a' der Krümmungskreis K verzeichnet, so verschaffe man sich in der Centralcollineation zwischen K und K' die den Punkten b' und c' entsprechenden Punkte b und c von K, so liefert der Schnittpunkt s von bc und $b'c'$ einen Punkt der Collineationsachse S, welche durch a' geht. Man kann nunmehr zu jedem Punkte von K den entsprechenden Punkt von K' ermitteln.

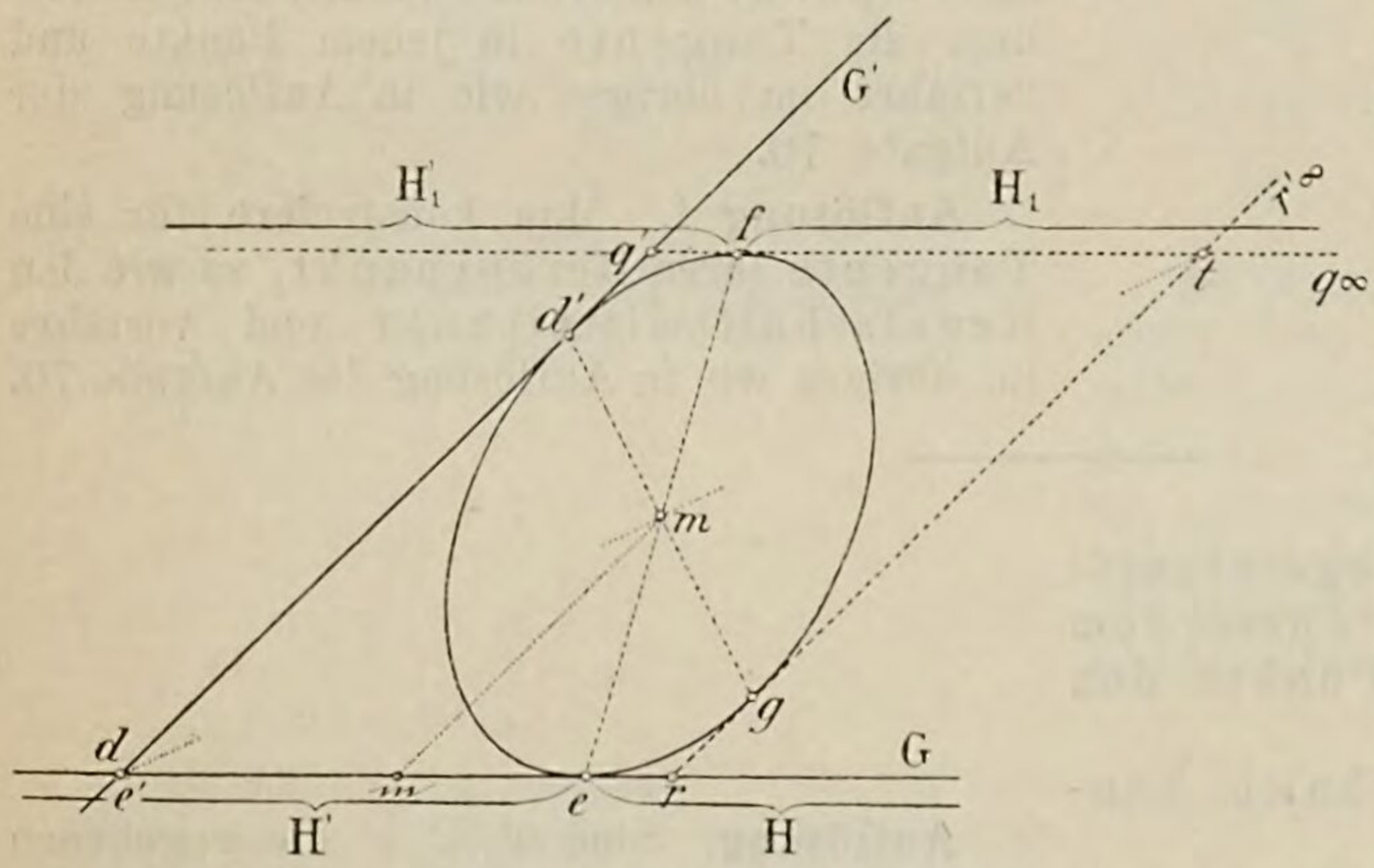
3. Die Kegelschnitte als Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen, bezw. Strahlbüschel in allgemeiner Lage.

A. Die Kegelschnitte als Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen.

Anmerkung 26. Im III. Teil, 1. Hälfte dieses Lehrbuches, Anmerkung 23, wurde gezeigt, dass das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen oder Strahlbüschel in allgemeiner Lage eine Linie zweiter Ordnung oder Klasse, d. h. ein Kegelschnitt ist; es erübrigt noch zu zeigen, von welchen Umständen die Art des Kegelschnittes abhängig ist, d. h. es sind noch die Bedingungen anzugeben, unter welchen zwei projektive Punktreihen oder Strahlbüschel die kennen gelernten Arten von Kegelschnitten hervorbringen.

Frage 63. Welche Bedingungen sind erforderlich, damit zwei projektive Punktreihen in allgemeiner Lage eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel hervorbringen?

Figur 113.



Erkl. 99. Hält man die Gerade G fest, dreht aber die Gerade G' um ihren Schnittpunkt e', so gehört zu jeder Lage von G' ein Kegelschnitt und zwar stets ein Kegelschnitt derselben Art, da ja durch die Bewegung von G' die gegenseitige Lage der Punkte e', d' und q', wie auch jene der Punkte e, d und r nicht geändert wird. „Die Mittelpunkte aller auf diese Weise erzeugten Kegelschnitte liegen auf einem Kreise K, dessen Mittelpunkt m auf G und zwar in der Parallelen durch m zu G' liegt und der einen Halbmesser $\overline{\mathrm{m}\,m} = \frac{1}{2}\overline{e'q'}$ besitzt."

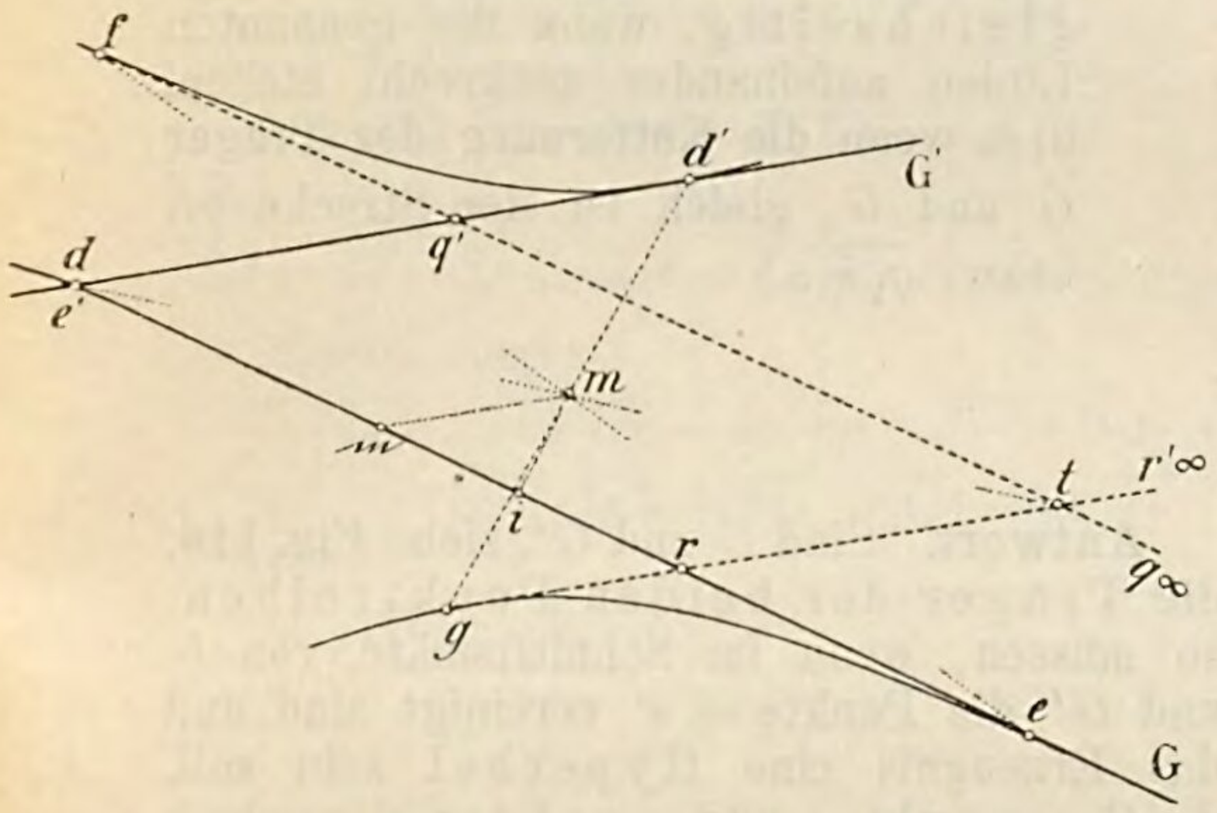
Antwort. Sind, siehe Figur 113, G und G' die Träger der beiden projektiven Punktreihen r und q' die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen (Gegenpunkte), so kann man sich im Schnittpunkte der beiden Träger die Punkte d und e' vereinigt denken, welchen bezw. die Punkte d' und e entsprechen; einer von diesen Punkten wie auch die Punkte r und q' können zur Festlegung der Projektivität der beiden Punktreihen willkürlich gewählt werden.

Schneiden sich nun die durch r und q' zu G' bezw. G gezogenen Parallelen in einem Punkte t, so bilden die Linien G, G', rt und $q't$ ein Parallelogramm, welches dem durch die Punktreihen auf G und G' hervorgerufenen Kegelschnitt K umbeschrieben ist. Der Mittelpunkt m dieses Parallelogrammes ist daher auch der Mittelpunkt des Kegelschnittes K. Die Punkte e und d' sind die Berührpunkte der Tangenten G und G' mit dem Kegelschnitt K und ihre Verbindungslinien mit m schneiden auf den zu G und G' parallelen Tangenten $q't$ und rt die Berührpunkte f und g so aus, dass die Punkte $ed'fg$ die Ecken eines dem Kegelschnitte K eingeschriebenen Parallelogrammes bilden.

Soll nun der Kegelschnitt K eine Ellipse sein, so müssen die Berührpunkte e, d', f und g

Erkl. 100. Hält man die beiden Geraden G und G' als Träger der Punktreihen fest, verschiebt aber die eine der letzteren, etwa die Punktreihe auf G', ohne jedoch die gegenseitige Lage der einzelnen Punkte zu einander zu ändern, so wird das Erzeugnis der beweglichen Punktreihe mit jener der festen teils Ellipse, teils Hyperbel sein, und zwar Ellipse, solange der Punkt d' innerhalb der Strecke $\overline{e'q'}$ sich befindet, dagegen Hyperbel, wenn dies nicht der Fall ist. Es kann nun noch der besondere Fall eintreten, dass bei der Verschiebung der Punktreihe auf G' der ursprüngliche Berührpunkt d' mit d zusammenfällt; in diesem Falle liegen aber dann die Punktreihen perspektivisch und ihr Erzeugnis besteht aus einem Punktpaar, nämlich dem Schnittpunkt, der Träger der Punktreihen und dem zugehörigen Projektionscentrum.

Figur 114.



Erkl. 101. Es lassen sich aber auch die beiden Punktreihen auf ihren Trägern beliebig verschieben und es wird ihr Erzeugnis bald Ellipse, bald Hyperbel sein; es interessiert noch der Fall, dass bei der Verschiebung die Gegenpunkte r und q' im Trägerschnittpunkt vereinigt sind; in diesem Falle ist das Erzeugnis eine Hyperbel mit den Trägern G und G' als Asymptoten. Stehen insbesondere die beiden Träger G und G' aufeinander senkrecht, so entsteht die gleichseitige Hyperbel.

stets auf den Strecken $\overline{dr}$, $\overline{e'q'}$, $\overline{tq'}$ und tr sich befinden, dürfen also nie ausserhalb derselben liegen. Man hat also folgenden Satz:

„Sollen zwei projektive Punktreihen auf den Trägern G und G' in allgemeiner Lage eine Ellipse hervorbringen, so müssen jene Punkte, welche den im Schnittpunkte der Träger der Punktreihenvereinigten Punkten entsprechen, stets auf den durch die Gegenpunkte und den Schnittpunkt der Träger gebildeten Strecken liegen."

Liegen dagegen die Punkte d' und e, d. h. die dem Schnittpunkt d, e' der Träger G und G' entsprechenden Punkten nicht auf den Strecken $\overline{e'q'}$ oder $\overline{dr}$, sondern ausserhalb derselben, so kann einer dieser Punkte oder es können auch beide unter Umständen in unendliche Ferne rücken, siehe Erkl. 101, und der erzeugte Kegelschnitt ist demnach eine Hyperbel. Man hat somit folgenden Satz:

„Sollen zwei projektive Punktreihen auf den Trägern G und G' in allgemeiner Lage eine Hyperbel hervorbringen, so müssen jene Punkte, welche den im Schnittpunkte der Träger der Punktreihen vereinigten Punkten entsprechen, im allgemeinen stets ausserhalb der durch die Gegenpunkte und den Schnittpunkt der Träger gebildeten Strecken liegen."

Soll schliesslich der Kegelschnitt eine Parabel sein, so müssen die zugehörigen projektiven Punktreihen so beschaffen sein, dass eine Verbindungslinie entsprechender Punkte in unendlicher Ferne sich befindet, was nur der Fall ist, wenn die unendlich fernen Punkte q und r' einander entsprechen, d. h. wenn die Punktreihen ähnlich sind; man hat also den Satz:

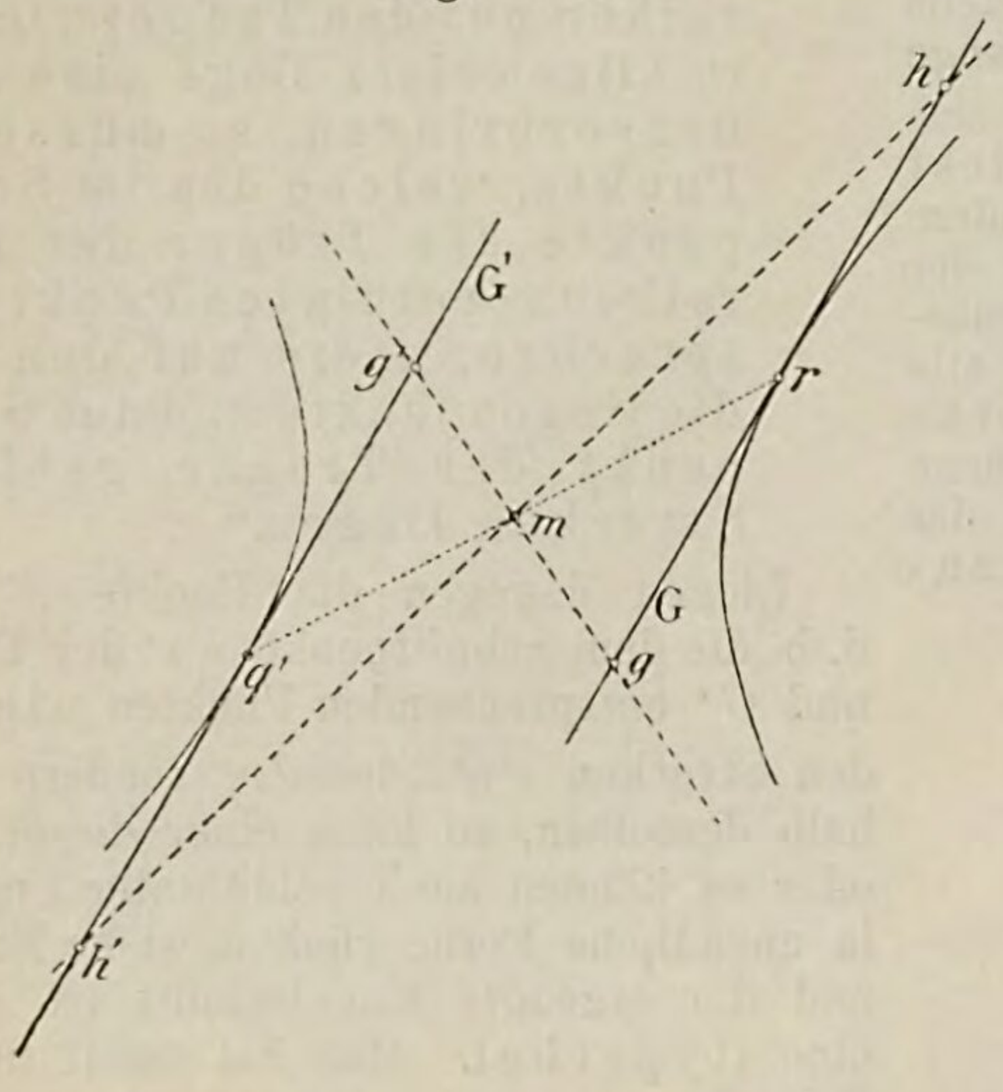
„Zwei projektivisch ähnliche Punktreihen in allgemeiner Lage bringen stets eine Parabel hervor."

Anmerkung 27. Sind die Träger der Punktreihen zu einander parallel, so lässt sich auch in diesem Falle leicht entscheiden, welcher Art der erzeugte Kegelschnitt angehört. Sind nämlich, siehe Figur 113, etwa die Geraden G und $q't$ die Träger der Punktreihen, so werden diese Linien durch die Berührpunkte e und f je in zwei Hälften H, H' und H_1, H_1' geteilt, von welchen

die Teile H und H_1, ebenso H' und H_1' als entsprechende Hälften aufgefasst werden können.

Haben nun in beiden Geraden die entsprechenden Hälften die **gleiche Richtung**, siehe Figur 113, so entsteht stets eine Ellipse, bei **ungleicher** Richtung der entsprechenden Hälften, siehe Figur 115, dagegen eine Hyperbel. Eine Parabel kann bei parallelen Trägern G und G' überhaupt nicht entstehen.

Figur 115.



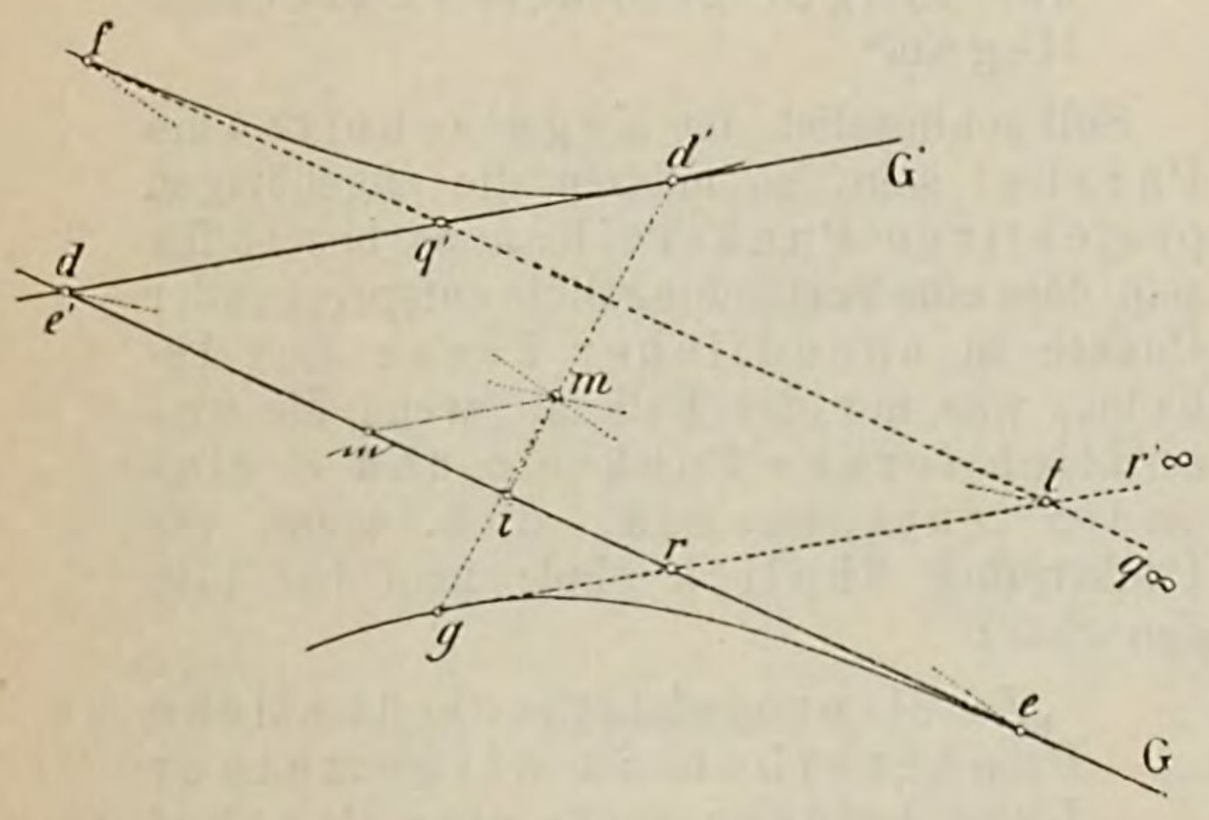
Um die Asymptoten der Hyperbel bei paralleler Lage der Träger zu erhalten, hat man nur nötig, in beiden Reihen die Punkte g und h bezw. $g_1' h_1'$ zu konstruieren, für welche die Beziehung stattfindet: $\overline{q'x'} \cdot \overline{qx} = \overline{q'g_1^2} = \overline{q'h_1^2} = \overline{rg^2} = \overline{rh^2}$, so geben die Verbindungslinien gg_1 und hh_1 die Asymptoten der Hyperbel; die letztere ist insbesondere gleichseitig, wenn die genannten Linien aufeinander senkrecht stehen, d. h. wenn die Entfernung der Träger G und G_1 gleich ist der Strecke $\overline{gh}$ bezw. $\overline{g_1 h_1}$.

Frage 64. Wie lässt sich in Rücksicht auf die Anmerkung 26 zeigen, dass zwei projektive Punktreihen auf unendlich viele Arten so gegeneinander gelegt werden können, dass sie eine gleichseitige Hyperbel hervorbringen?

Antwort. Sind G und G', siehe Fig. 116, die Träger der beiden Punktreihen, so müssen, wenn im Schnittpunkte von G und G' die Punkte d, e' vereinigt sind und das Erzeugnis eine Hyperbel sein soll, die Gegenpunkte r und q' auf den Strecken $\overline{de}$ und $\overline{d'e'}$ sich befinden. Ist dann wieder durch $drtq'$ ein dem Kegelschnitt umbeschriebenes Parallelogramm dargestellt, so liegt der Berührpunkt f der Tangente $q't$ auf der Verbindungslinie me und für die beiden auf den Trägern G und $q't$ befindlichen die nämliche Hyperbel hervorbringenden Punktreihen kann man die Punkte e und f als die Gegenpunkte auffassen, daher gilt für irgend eine andere Tangente, z. B. G', in Rücksicht auf die Anmerkung 27 die Beziehung:

$$\overline{fq'} \cdot \overline{de} = \text{konst.} = \overline{fg_1^2} = \overline{fh_1^2} = \text{konst.}$$

Figur 116.



In Figur 116 ist vom Punkte q' eine Senkrechte auf G zu fällen und ihr Fusspunkt mit k zu bezeichnen.

Soll nun die Hyperbel gleichseitig sein, so muss noch die Bedingung stattfinden:

$$\overline{fq'} \cdot \overline{de} = \overline{fg_1^2} = \overline{fh_1^2} = \overline{me^2}$$

und in Rücksicht auf die Beziehung $\overline{fq'} = \overline{re}$,

$$98) \ldots \overline{re} \cdot \overline{de} = \overline{me^2}$$

Aus der Figur 116 kann man nun folgende Gleichheiten entnehmen:

Erkl. 102. Die Gleichung:

$$\overline{md^2} + \overline{me^2} = \overline{2mr^2} + \overline{dr^2} + \overline{re^2} - (\overline{dr} - \overline{dk}) \cdot (\overline{dr} - \overline{re})$$

lässt sich in folgender Weise vereinfachen. Es ist zunächst:

$$\overline{md^2} + \overline{me^2} = \overline{2mr^2} + \overline{dr^2} + \overline{re^2} - \overline{dr^2} + \overline{dr} \cdot \overline{re} + \overline{dk} \cdot \overline{dr} - \overline{dk} \cdot \overline{re}$$

oder:

$$= \overline{2mr^2} + \overline{re}(\overline{re} + \overline{dr}) + \overline{dk}(\overline{dr} - \overline{re})$$

$$= \overline{2mr^2} + \overline{re} \cdot \overline{de} + \overline{dk}(\overline{dr} - \overline{re})$$

oder mit Bezug auf Gleichung 98):

$$\overline{md^2} = \overline{2mr^2} + \overline{dk} \cdot (\overline{dr} - \overline{re})$$

oder:

$$\overline{md^2} - \overline{mr^2} = \overline{mr^2} + \overline{dk}(\overline{dr} - \overline{re})$$

oder:

$$\overline{dr^2} - \overline{2dr} \cdot \overline{ir} = \overline{mr^2} + \overline{dk}(\overline{dr} - \overline{re})$$

Hieraus folgt:

$$-mr^2 = dk \cdot dr - dk \cdot re - dr^2 + 2dr \cdot ir$$

$$= \overline{dr}(\overline{dk} + \overline{2ir} - \overline{dr}) - \overline{dk} \cdot \overline{re}$$

folglich:

$$\overline{mr^2} = \overline{dk} \cdot \overline{er}$$

Es ist:

$$\overline{md^2} = \overline{mr^2} + \overline{dr^2} - \overline{2dr} \cdot \overline{ir}$$

und

$$\overline{me^2} = \overline{mr^2} + \overline{re^2} + \overline{2re} \cdot \overline{ir}$$

daher:

99) . . . $\overline{md^2} + \overline{me^2} = \overline{2mr^2} + \overline{dr^2} + \overline{re^2} - \overline{2ir}(\overline{dr} - \overline{re})$

oder:

$$= \overline{2mr^2} + \overline{dr^2} + \overline{re^2} - (\overline{dr} - \overline{dk})(\overline{dr} - \overline{re})$$

Die zuletzt angeführte Gleichung lässt sich, siehe Erkl. 102, schliesslich auf folgende zurückführen:

100) . . . $\overline{mr^2} = \overline{dk} \cdot \overline{er}$

Bezeichnet man nun mit φ den Neigungswinkel der beiden Träger G und G', so kann man für $\overline{dk}$ setzen:

$$\overline{dk} = \overline{dq'} \cdot \cos\varphi$$

Die Gleichung 100) geht also über in die folgende:

101) . . . $\overline{mr^2} = \overline{dq'} \cdot \cos\varphi \cdot \overline{er}$

Nun ist aber:

$$\overline{mr^2} = \overline{m\mathfrak{m}^2} + \overline{\mathfrak{m}r^2} - \overline{2m\mathfrak{m}} \cdot \overline{\mathfrak{m}r} \cdot \cos\varphi$$

daher ist:

$$\overline{m\mathfrak{m}^2} + \overline{\mathfrak{m}r^2} - \overline{2m\mathfrak{m}} \cdot \cos\varphi = \overline{dq'} \cdot \overline{re} \cdot \cos\varphi$$

oder in Rücksicht auf die Werte von $\overline{m\mathfrak{m}}$ und $\overline{\mathfrak{m}r}$:

$$\frac{1}{4}\overline{dq'^2} + \frac{1}{4}\overline{dr^2} = \cos\varphi\left(\overline{dq'} \cdot \overline{re} + \frac{1}{2}\overline{dq'} \cdot \overline{dr}\right)$$

folglich ist:

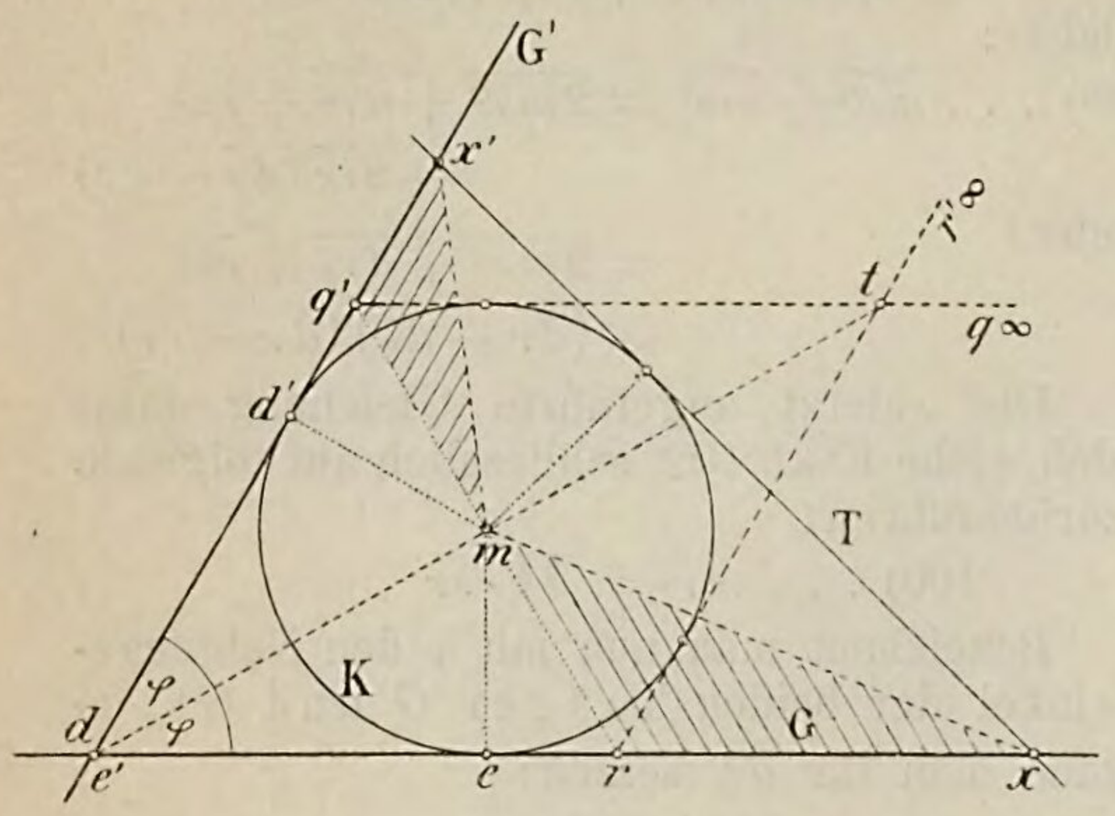
$$102) \ldots \cos\varphi = \frac{\overline{dq'^2} + \overline{dr^2}}{4\overline{dq'} \cdot \left(\overline{re} + \frac{1}{2}\overline{dr}\right)}$$

„Will man also mit zweien projektiven Punktreihen eine gleichseitige Hyperbel hervorbringen, so vereinige man im Schnittpunkte der beiden Träger die nicht entsprechenden Endpunkte zweier solcher entsprechenden Strecken, welche die Gegenpunkte r und q' unmittelbar auf sich enthalten, und gebe dem Träger eine Neigung, welche der in Gleichung 102) ausgedrückten Bedingung Genüge leistet.“

Frage 65. Unter welchen besonderen Bedingungen erzeugen zwei projektive Punktreihen eine Kreislinie?

Antwort. Unter den Kegelschnitten, welche durch projektive Punktreihen erzeugt werden können, befindet sich auch die Kreislinie und man kann sich fragen,

Figur 117.



Erkl. 103. Aus dem Inhalte der Antwort auf Frage 65 geht hervor, dass zwei projektive Punktreihen sich auf unendlich viele Arten so legen lassen, dass ihr Erzeugnis ein Kreis wird; man braucht ja nur die nicht entsprechenden Endpunkte zweier entsprechend gleicher Strecken im Schnittpunkte der Träger zu vereinigen und hierauf die Neigung der Geraden so zu wählen, dass die Gleichung 105), siehe Antwort der Frage 65, erfüllt wird. Der zugehörige Kreishalbmesser ergibt sich dann aus Gleichung 106).

Erkl. 104. Auch bei paralleler Lage der Träger kann in Rücksicht auf das in Erkl. 103 Gesagte das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen ein Kreis sein; in diesem Falle sind im unendlich fernen Schnittpunkte der Träger die Punkte q und r' vereinigt, d. h.:

„Zwei projektive Punktreihen auf parallelen Trägern erzeugen stets einen Kreis, wenn die Verbindungslinie der Gegenpunkte senkrecht zu beiden Trägern steht."

wie müssen die Träger zweier projektiven Punktreihen gegeneinander liegen, damit das Erzeugnis ein Kreis werde?

Ist nun K, siehe Figur 117, die Kreislinie und T eine beliebige Tangente, welche die Träger der Punktreihen in den Punkten x und x' schneidet, so erkennt man, wenn d, r, t, q' ein dem Kreise umbeschriebenes Parallelogramm (Rhombus) darstellt, unmittelbar die Aehnlichkeit der Dreiecke mrx und $mx'q'$; es besteht daher die Verhältnisgleichheit:

$$\frac{\overline{rx}}{\overline{mr}} = \frac{\overline{mq'}}{\overline{q'x}}$$

oder da:

$$\overline{mr} = \overline{mq'}$$

ist:

103) . . . $\overline{mr^2} = \overline{rx} \cdot \overline{q'x'}$

Mit Rücksicht auf die rechtwinkligen Dreiecke dmr und $e'mq'$ hat man aber auch die Beziehung:

$$\overline{mr^2} = \overline{er} \cdot \overline{e'r} = \overline{dq'} \cdot \overline{d'q'}$$

folglich ist:

104) . . . $\overline{rx} \cdot \overline{q'x} = \overline{er} \cdot \overline{e'r}$
$= \overline{dq'} \cdot \overline{d'q'} = \text{konst.}$

Bewegt sich also die Gerade T als Tangente längs des Kreises K, so beschreiben die Punkte x und x' auf den Geraden G und G' zwei projektive Punktreihem mit den Gegenpunkten r und q'.

Heisst 2φ der Winkel der beiden Geraden, so ist:

$$\overline{mr} = \overline{e'r} \cdot \sin\varphi$$

daher:

$$\overline{m^2r^2} = \overline{e'r^2} \cdot \sin^2\varphi = \overline{er} \cdot \overline{e'r}$$

105) . . . $\sin^2\varphi = \dfrac{\cdot\,\overline{er} \cdot \overline{e'r}}{\overline{e'r^2}} = \dfrac{\overline{er}}{\overline{e'r}}$

Vorstehende Entwickelungen lassen sich in folgendem Satze zusammenfassen:

„Zwei projektive Punktreihen in allgemeiner Lage erzeugen stets eine Kreislinie, wenn im Schnittpunkte der beiden Träger die nicht entsprechenden Endpunkte entsprechend gleicher Strecken vereinigt sind."

Das Verhältnis der Entfernung des auf dem einen Träger befindlichen Berührpunktes e vom zugehörigen Gegenpunkte zur Entfernung dieses Punktes vom Schnittpunkt der beiden Träger gibt den Sinus des halben Neigungswinkels der Träger der Punktreihen. Der Halb-

messer des erzeugten Kreises ist gleich dem Produkte aus der Entfernung des Berührpunktes eines Trägers vom Trägerschnittpunkt und der Tangente des halben Neigungswinkels beider Träger, d. h. es ist:

106) . . $r = \overline{ee'} \cdot \operatorname{tg}\varphi$

B. Die Kegelschnitte als Erzeugnis zweier projektiven Strahlbüschel in allgemeiner Lage.

Frage 66. Welche Bedingungen sind erforderlich, damit zwei projektive Strahlbüschel in allgemeiner Lage eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel hervorbringen?

Antwort. Um zu entscheiden, welcher Art der durch zwei projektive Strahlbüschel erzeugte Kegelschnitt sein wird, hat man nur zu untersuchen, ob in den Büscheln entsprechende parallele Strahlen vorhanden sind oder nicht.

Zu diesem Zwecke verschiebt man das eine Strahlbüschel parallel zu sich selbst, bis sein Mittelpunkt in jenen des zweiten Büschels fällt, und konstruiert die Doppelstrahlen der concentrischen Strahlbüschel. Sind zwei solcher Doppelstrahlen vorhanden, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel; besitzen die Büschel keine Doppelstrahlen, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse; kommt endlich den Büscheln nur ein Doppelstrahl zu, so erhält man als Erzeugnis eine Parabel.

Sind die beiden gegebenen Strahlbüschel ungleichlaufend, so ist der Kegelschnitt stets eine Hyperbel, weil zwei concentrische ungleichlaufende Strahlbüschel stets zwei Doppelstrahlen besitzen. Diese Hyperbel wird gleichseitig, wenn die Strahlbüschel projektivisch gleich- und ungleichlaufend sind.

Laufen die gegebenen Büschel dagegen gleich, so kann das Erzeugnis Ellipse, Hyperbel oder Parabel sein. Man erhält darüber Aufschluss, wenn man in den entsprechenden concentrischen Büscheln die Schenkel der entsprechenden Nullwinkel, siehe III. Teil, 1. Hälfte dieses Lehrbuches, Frage und Antwort 81 u. ff., aufsucht und nachsieht, ob deren Schenkel übereinandergreifen oder nicht; im ersten Falle erzeugen die ursprünglichen Strahlbüschel eine Ellipse, im letzten Falle eine Hyperbel.

Fallen endlich entsprechende Paare dieser Schenkel aufeinander, so entsteht die Parabel.

Erkl. 105. Liegen die Strahlbüschel perspektivisch, so besteht ihr Erzeugnis aus zweien Geraden, nämlich dem perspektivischen Durchschnitt einerseits und der Verbindungslinie der Büschelmittelpunkte andererseits.

Es bleibt noch der Fall übrig, dass zwei projektive gleichlaufende Strahlbüschel projektivisch gleich sind: in diesem Falle ist, wie schon früher erwähnt wurde, siehe III. Teil, 1. Hälfte dieses Lehrbuches, Erkl. 165. das Erzeugnis der Büschel eine Kreislinie.

Kurz zusammengefasst kann man folgende Sätze aussprechen:

„Zwei projektive ungleichlaufende Strahlbüschel erzeugen stets eine Hyperbel, welche überdies noch gleichseitig ist, wenn die Büschel projektivisch gleich sind."

„Zwei projektive gleichlaufende Strahlbüschel können eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel erzeugen, je nachdem nach der Verschiebung des einen Büschels in den Mittelpunkt des anderen die Schenkel der entsprechenden Nullwinkel übereinander greifen oder nicht oder endlich aufeinander fallen."

„Zwei projektive gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel erzeugen stets eine Kreislinie."

---

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 73. Von einem Kegelschnitt sind gegeben fünf Punkte. Man soll:

a) beliebig viele weitere Punkte,

b) in einem der gegebenen Punkte, die Tangente und

c) den Schnittpunkt einer Geraden A mit dem Kegelschnitt

konstruieren.

Erkl. 106. Sollte in irgend einem anderen Punkte des Kegelschnittes die Tangente konstruiert werden, so nimmt man denselben als Mittelpunkt eines Strahlbüschels projektiv zu einem der in Aufgabe 73, Auflösung a genannten Strahlbüschel und verfährt in gleicher Weise wie in Auflösung b der Aufgabe 73.

Auflösung a. Seien 1, 2, 3, 4, 5 die gegebenen Punkte, so nehme man etwa die Punkte 1 und 2 als die Mittelpunkte zweier projektiven Strahlbüschel 1 (2, 3, 4, 5 · · ·) und 2 (1, 3, 4, 5 · · ·) und konstruiere zu beliebig gewählten Strahlen im einen Büschel die entsprechenden Strahlen im anderen, siehe III. Teil, 1. Hälfte dieses Lehrbuches, Frage und Antwort 69, sowie Aufgabe 96. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen sind Punkte des Kegelschnittes.

Auflösung b. Soll etwa im Punkte 1 die Tangente konstruiert werden, so erhält man dieselbe als jenen Strahl im Büschel 1 (2, 3, 4, 5), der dem Strahl 21 im Büschel 2 (1, 3, 4, 5) entspricht. Siehe III. Teil, 1. Hälfte dieses Lehrbuches, Aufgabe 96, Erkl. 162.

Auflösung c. Die Strahlbüshel 1 (2, 3, 4, 5 · ·) und 2 (1, 3, 4, 5 · · ·) schneiden auf der Geraden A zwei projektive Punktreihen aus, deren Doppelpunkte die Aufgabe lösen.

Aufgabe 74. Von einem Kegelschnitt sind gegeben fünf Tangenten. Man soll:

a) beliebig viele weitere Tangenten,

b) für eine der Tangenten den Berührpunkt,

c) von einem beliebigen Punkte in der Ebene des Kegelschnittes die möglichen Tangenten an denselben

konstruieren.

Auflösung a. Nimmt man irgend zwei der fünf Tangenten I, II, III, IV, V, etwa I und II heraus, so treffen die übrigen Tangenten diese in zweien projektiven Punktreihen. Konstruiert man nun zu beliebig gewählten Punkten der einen Reihe die entsprechenden Punkte der anderen, so geben die Verbindungslinien entsprechender Punkte die gesuchten Tangenten. Siehe III. Teil, 1. Hälfte dieses Lehrbuches, Frage und Antwort 68.

Auflösung b. Die Ermittelung der Berührpunkte der einzelnen Tangenten geschieht in gleicher Weise, wie in Anmerkung 24, III. Teil, 1. Hälfte dieses Lehrbuches, gezeigt wurde.

Auflösung c. Verbindet man den gegebenen Punkt p mit den Punkten der Reihen auf den zwei Tangenten, etwa I und II, so erhält man hierdurch zwei concentrische projektive Strahlbüschel, deren Doppelstrahlen die Aufgabe lösen, siehe auch Anmerkung 23, III. Teil, 1. Hälfte dieses Lehrbuches.

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 75. Von einem Kegelschnitt sind gegeben:

a) vier Punkte und in einem derselben die Tangente,

b) drei Punkte und in zweien derselben die Tangenten,

c) vier Tangenten und auf einer derselben der Berührpunkt,

d) drei Tangenten und auf zweien derselben die Berührpunkte.

Man soll:

1) die Schnittpunkte einer Geraden A mit dem Kegelschnitt,

2) die Tangenten von einem Punkte aus an denselben

konstruieren.

Aufgabe 76. Von einem Kegelschnitt sind gegeben:

a) vier Punkte und ausserdem eine beliebige Tangente,

b) vier Tangenten und ausserdem ein beliebiger Punkt.

Man soll den Kegelschnitt konstruieren.

Aufgabe 77. Von einem Kegelschnitt sind gegeben:

a) drei Punkte und ausserdem zwei beliebige Tangenten,

b) drei Tangenten und ausserdem zwei beliebige Punkte.

Man soll den Kegelschnitt konstruieren.

4. Ueber die Polar-Reciprocität ebener Systeme.

A. Ueber reciproke ebene Systeme im allgemeinen.

Anmerkung 28. Zwischen zweien ebenen oder räumlichen Systemen kann statt der collinearen noch eine andere Verwandtschaft, nämlich jene der Reciprocität bestehen und dies ist stets der Fall, wenn die Raumgrössen: Punkt, Gerade und Ebene reciprok, siehe III. Teil, 1. Hälfte dieses Lehrbuches, Anmerkung 14, aufeinander bezogen werden. Mittels des Gesetzes der Reciprocität ist man im Stande, die Menge der geometrischen Wahrheiten ohne neue Beweisarbeit zu vermehren, indem man zu jedem geometrischen Satze den reciproken daraus ableitet, wie dies auch in den vorangegangenen Entwickelungen vielfach durchgeführt worden ist.

Frage 67. Wieviele Bestimmungsstücke können beliebig gegeben werden, damit zwei ebene Systeme reciprok aufeinander bezogen sind, und wie konstruiert man zu jedem Elemente des einen Systems das entsprechende reciproke Element im anderen System?

Antwort. Die reciproke Beziehung zweier ebenen Systeme ist vollkommen gegeben, sobald vier Elemente des einen Systems vier reciproken Elementen des anderen Systems zugeteilt sind, mit der Einschränkung jedoch, dass bei vier Punkten keine drei auf einer Geraden liegen, bei vier Geraden keine drei durch denselben Punkt hindurchgehen dürfen.

Sind a, b, c, d vier Punkte im einen System, denen im anderen die vier Geraden A, B, C und D beziehungsweise reciprok entsprechen, so kann man zu jedem Punkte x des ersten Systems die reciproke Gerade X des zweiten und umgekehrt konstruieren; denn nimmt man etwa die Punkte a und b als Mittelpunkte zweier projektiven Strahlbüschel $a\,(c, d, x \cdots)$ und $b\,(c, d, x \cdots)$, so ist die projektive Beziehung zwischen diesen Büscheln vollständig gegeben.

Betrachtet man nun die den Punkten a und b reciprok entsprechenden Geraden A und B als Träger von Punktreihen, hervorgerufen durch die übrigen Geraden $C, D, X \cdots$, so entspricht das Strahlbüschel $a\,(c, d, x \cdots)$ der Punktreihe auf A, das Strahlbüschel $b\,(c, d, x \cdots)$ der Punktreihe auf B collinear, d. h. es entspricht dem Strahle ax auf A ein Punkt x', dem Strahle bx auf B ein Punkt x'', und die Verbindungslinie $x'x''$ wird demnach die dem Punkte x im ersten System reciprok entsprechende Gerade im zweiten System darstellen.

Da sowohl dem Strahle ax als auch dem Strahle bx auf A bezw. B je nur ein einziger Punkt collinear entspricht, so entspricht auch dem Punkte x reciprok nur ein einziger Strahl X.

Erkl. 107. Es ist selbstverständlich gleichgültig, welches Punktpaar man unter den vier gegebenen Punkten a, b, c, d zu Büschelmittelpunkten auswählt; die reciprok entsprechenden Geraden im anderen System bilden dann die Träger der den Büscheln collinear entsprechenden Punktreihen.

B. Ueber die Polar-Reciprocität ebener Systeme bezüglich eines Kegelschnittes.

Anmerkung 29. In ähnlicher Weise, wie man verschiedene Arten der Collineation ebener Systeme kennt, so lassen sich auch verschiedene Arten der Reciprocität unterscheiden; es soll hier ausser dem ganz allgemeinen nur noch ein Fall, der in darstellend geometrischer Beziehung von Bedeutung ist, hervorgehoben werden, nämlich jener, in welchem sich die reciproken Elemente mit Vertauschbarkeit entsprechen; es ist dies die sogenannte involutorische oder auch Polar-Reciprocität.

Zieht man nämlich durch einen Punkt im Raume alle möglichen Strahlen, d. h. einen Strahlbündel und die hierzu senkrechten Ebenen, so bilden die Durchschnitte dieser Strahlen und Ebenen mit einer weiteren Ebene E zusammengehörige Elemente zweier in derselben Ebene befindlichen reciproken Systeme.

Dabei entspricht einer Punktreihe des einen Systems ein Strahlbüschel im anderen und umgekehrt projektiv, d. h. zwischen vier reciproken Elementen in beiden Systemen besteht Doppelverhältnisgleichheit.

Es ist hier nicht der Ort, näher auf den reciproken Zusammenhang zwischen den Raumgrössen einzugehen; es soll hier nur kurz von jenem reciproken Zusammenhange gesprochen werden, der bereits bei Erwähnung der Kegelschnitte in Bezug auf Pol und Polare kennen gelernt wurde, nämlich von der Polar-Reciprocität hinsichtlich eines Kegelschnittes.

Frage 68. Was versteht man unter der Polar-Reciprocität in Bezug auf einen Kegelschnitt?

Erkl. 108. Der Kegelschnitt K, hinsichtlich welchem die Kurven K^m und $\mathfrak{K}^m$ zu einander polarreciprok sind, heisst der Direktrix- oder Leit-Kegelschnitt der Polar-Reciprocität.

Erkl. 109. Wenn die Kurve K^m von der $m$ten Ordnung ist, so ist die Kurve $\mathfrak{K}^m$ von der $m$ten Klasse, denn schneidet eine Gerade G die K^m in m Punkten, so entspricht der Geraden G reciprok ein Pol g, durch welchen die Polaren der m Schnitpunkte von G und K als Tangenten an $\mathfrak{K}^m$ hindurchgehen; es sind also von einem Punkte der Ebene m Tangenten an die Kurve $\mathfrak{K}^m$ möglich, d. h. dieselbe ist von der $m$ten Klasse.

Erkl. 110. Ist K^m von der zweiten Ordnung, d. h. ein Kegelschnitt, so ist auch $\mathfrak{K}^m$ von der zweiten Klasse, also ebenfalls ein Kegelschnitt; man kann daher folgenden Satz aussprechen:

„Die reciproke Polarfigur eines Kegelschnittes in Bezug auf einen Leit-Kegelschnitt ist wieder ein Kegelschnitt.“

Antwort. Hat man in der Ebene E irgend eine Figur, z. B. eine Kurve K^m, d. h. eine Kurve von der $m$ten Ordnung, s. Erkl. 168, III. Teil, 1. Hälfte dieses Lehrbuches, und konstruiert man für jeden Punkt p dieser Kurve die Polare P hinsichtlich eines gleichfalls gegebenen Kegelschnittes K, so werden die sämtlichen Polaren P eine Kurve $\mathfrak{K}^m$ einhüllen und man nennt nun die Kurve $\mathfrak{K}^m$ die reciproke Polarfigur von K^m bezüglich des Kegelschnittes K. Liesse man in gleicher Weise auf der Kurve $\mathfrak{K}^m$ einen Punkt $\mathfrak{p}$ fortbewegen und konstruierte in jeder Lage desselben die zugehörige Polare, so erhielte man wieder die Kurve K^m als reciproke Polarfigur von K^m.

„Der Zusammenhang zwischen K^m und $\mathfrak{K}^m$ ist also gegenseitig, d. h. die eine Figur ist stets reciprok-polar zur anderen bezüglich eines gegebenen Kegelschnittes K und umgekehrt.“

Frage 69. Welche Bedingungen sind erforderlich, damit die reciproke Polarfigur eines Kegelschnittes bezüglich eines Leit-Kegelschnittes K eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel werde?

Antwort. Die Art des Kegelschnittes, der einem gegebenen Kegelschnitte hinsichtlich seines Leit-Kegelschnittes

reciprok-polar entspricht, ist lediglich abhängig von der Lage des Mittelpunktes des Leit-Kegelschnittes zur Peripherie des gegebenen Kegelschnittes, aber vollständig unabhängig sowohl von der Art des gegebenen wie des Leit-Kegelschnittes. Ist nämlich K' der Leit-Kegelschnitt, K der gegebene Kegelschnitt, dessen reciprok-polare Figur $\mathfrak{K}$ gesucht ist, so stehen K und $\mathfrak{K}$ in der Beziehung zu einander, dass den Tangenten von K als Polaren von K' die Punkte von $\mathfrak{K}$ als Pole von K' entsprechen. Soll also keiner dieser Pole, d. h. kein Punkt von $\mathfrak{K}$, in unendliche Ferne rücken, so darf keine Tangente von K als Polare von K' durch den Mittelpunkt m' von K' hindurchgehen; es muss also dieser Mittelpunkt innerhalb von K liegen.

Befindet sich dagegen der Mittelpunkt m' von K' ausserhalb des Kegelschnittes K, so gibt es stets zwei Tangenten an K, die den Mittelpunkt m' enthalten, und somit auch zwei unendlich ferne Punkte von $\mathfrak{K}'$; diese Linie ist demnach eine Hyperbel. Liegt endlich der Mittelpunkt von K' auf der Peripherie von K, so geht durch diesen Punkt nur eine Tangente an K; ihr entspricht also nur ein unendlich ferner Punkt von $\mathfrak{K}$, d. h. diese Linie ist eine Parabel.

Zusammengefasst kann man folgenden Satz aussprechen:

„Die reciproke Polarfigur eines Kegelschnittes bezüglich eines zweiten Kegelschnittes ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem der Mittelpunkt des Leit-Kegelschnittes innerhalb, ausserhalb oder endlich auf der Peripherie des gegebenen Kegelschnittes liegt.“

Erkl. 111. Sind die ursprünglich gegebenen Kegelschnitte K und K' Kreise, so wird auch der reciprok-polare Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ein Kreis sein, wenn K und K' gemeinsamen Mittelpunkt besitzen, d. h. concentrische Kreise sind.

Ist aber K als Kegelschnitt gegeben und verlangt, dass $\mathfrak{K}$ ein Kreis sein soll, so darf K' nicht mehr willkürlich gewählt werden. Wie ist K' zu wählen?

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 78. Man konstruiere die reciproke Polarfigur eines regelmässigen Sechseckes bezüglich eines Kreises als Leit-Kegelschnitt.

Aufgabe 79. Man konstruiere die reciproke Polarfigur eines Kreises bezüglich eines Kreises als Leit-Kegelschnitt, so dass erstere eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel werde.

Aufgabe 80. Von einem Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes sind für den letzteren die möglichen Normalen zu zeichnen.

5. Ueber die rechtwinklige Axonometrie.

A. Ueber die rechtwinklige Axonometrie im allgemeinen.

a) Begriff und Zweck der rechtwinkligen Axonometrie.

Frage 70. Was versteht man unter der rechtwinkligen Axonometrie im allgemeinen?

Antwort. Hat man eine Raumgrösse auf drei zu einander senkrechte **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 rechtwinklig projiziert, so kann man, die Raumgrösse in fester Verbindung mit den zugehörigen **Pr. Ebn.** und seinen Projektionen auf dieselben gedacht, die räumliche Lage des ganzen Projektionssystems durch eine Drehung in beliebiger Weise verändern, und hierauf das ganze System wieder rechtwinklig auf eine neue vierte **Pr. Eb.** projizieren. Man erhält dann sowohl von der ursprünglich gegebenen Raumgrösse als auch von deren Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 je eine neue Projektion auf die erwähnte vierte Projektionsebene und zwischen diesen Projektionen besteht ein gewisser geometrischer Zusammenhang. Diesen Zusammenhang zu ergründen und mittels desselben ein Verfahren anzugeben, um aus einer der genannten Projektionen die anderen abzuleiten bezw. zu konstruieren ist die Aufgabe der Axonometrie.

Erkl. 112. Die drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 sollen für die Folge kurzweg Koordinatenebenen heissen, ihre gegenseitigen Schnittlinien X, Y und Z sind die Koordinatenachsen und sie bilden zusammen das Achsenkreuz.

Erkl. 113. Die in Antwort der Frage 70 erwähnte vierte **Pr. Eb.** heisst die axonometrische **Pr. Eb.** oder kurzweg die „Bildebene“.

Erkl. 114. Die rechtwinklige Projektion einer Raumgrösse auf die Bildebene heisst ihre axonometrische Projektion oder ihr „axonometrisches Bild.“ Die rechtwinklige Projektion des Aufrisses, Grundrisses oder Seitenrisses, mit anderen Worten die rechtwinklige Projektion der Vertikal-, Horizontal- oder Seiten-Projektion einer Raumgrösse auf die Bildebene heisst der „axonometrische Grundriss“, der „axonometrische Aufriss“ oder endlich der „axonometrische Seitenriss“ der in Rede stehenden Raumgrösse.

Erkl. 114 a. Kürzer kann man die axonometrischen Bilder den in der Koordinatenebene befindlichen Raumgrössen auch als „Rissbilder“ bezeichnen, und zwar als erstes, zweites, drittes Rissbild, je nachdem dasselbe in der Koordinatenebene XY, XZ oder YZ liegen soll.

Erkl. 115. Der Schnittpunkt der drei **Pr. Ebn.**, d. h. der drei Koordinatenebenen bezw. Achsen heisst der „Koordinatenanfangspunkt“.

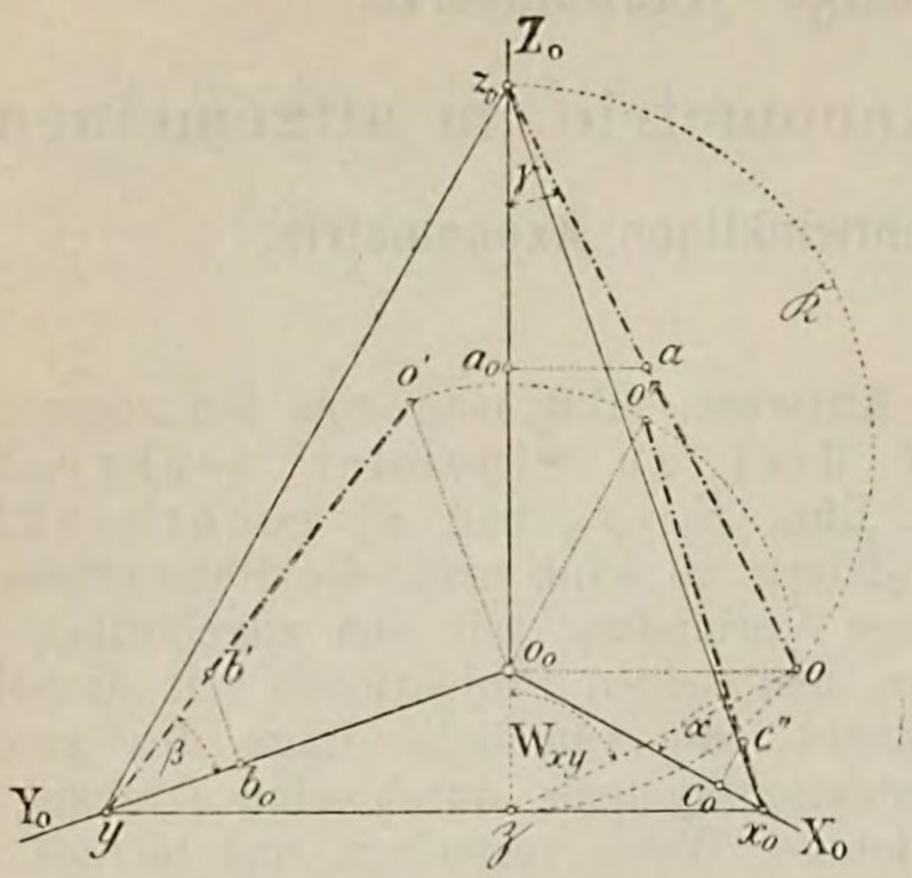
---

b) Axonometrisches Bild des Achsenkreuzes, Neigung der Koordinatenachsen zur Bildebene.

Frage 71. Wie bestimmt man das axonometrische Bild des Achsenkreuzes, d. h. von dreien durch einen Punkt hindurch gehenden aufeinander senkrecht stehenden Geraden im Raume?

Antwort. Die drei im Raume aufeinander senkrecht stehenden, von einem Punkte o ausgehenden Geraden X, Y und Z können als rechtwinklige Projektionen auf eine Ebene drei Gerade X_0, Y_0 und Z_0, siehe Figur 118, so haben, dass der Winkel von je zweien dieser Geraden durch die Verlängerung der dritten geteilt

Figur 118.



*) In der Figur ist nur y statt y_0 bezeichnet.

Erkl. 116. Das Dreieck $x_0 y_0 z_0$, dessen Seiten senkrecht stehen zu den Achsenbildern X_0, Y_0 und Z_0 heisst das „Spurendreieck der Bildebene."

Frage 72. Wie bestimmt man die Winkel der drei Achsen X, Y, Z, sowie jene der drei Koordinatenebenen XY, XZ, YZ gegen die Bildebene?

Erkl. 117. Nachdem der Abstand des Punktes o von der Bildebene konstruiert ist, siehe Antwort der Frage 72, ergeben sich die Winkel β und α einfach dadurch, dass man, s. Figur 118, $\overline{o_0 o'}$ bezw. $\overline{o_0 o''}$ senkrecht zu Y_0 und X_0 und gleich $\overline{o_0 o}$ macht und die Punkte o' und o'' mit y_0 und x_0 verbindet. Die Complementswinkel der Winkel β und α geben die Winkel W_{zx} und W_{zy}.

Erkl. 118. Das axonometrische Bild einer Raumgrösse sei für die Folge mit demselben Buchstaben bezeichnet wie die Raumgrösse selbst, aber mit dem Index Null rechts unten. Das axonometrische Bild eines Punktes a heisst demnach a_0, das einer Geraden A heisst A_0 u. s. w.

wird, d. h. dass die Verlängerung einer jeden der drei Geraden in den Winkelraum der beiden anderen fällt; denn zeichnet man ein spitzwinkliges Dreieck $x_0 y_0$*) z_0 und konstruiert in demselben die drei Höhen X_0, Y_0 und Z_0, so kann die Ebene des Dreieckes $x_0 y_0 z_0$ entweder als Bildebene oder parallel zur Bildebene genommen werden.

Antwort. Denkt man sich, s. Figur 118, durch die Achse Z_0 eine Ebene E senkrecht zur Bildebene gelegt, so bilden im Raume die Achse Z und die Schnittlinien der Ebene E mit der Ebene XY sowie der Bildebene ein rechtwinkliges Dreieck, dessen axonometrisches Bild durch die Gerade $z_0 \mathfrak{z}$ dargestellt ist und dessen wahre Gestalt mittels Umlegung in die Bildebene erhalten werden kann. Man braucht zu diesem Zwecke nur über $\overline{z_0 \mathfrak{z}}$ als Durchmesser den Kreis $\mathfrak{K}$ zu beschreiben, so liegt auf diesem und auf der Senkrechten durch o_0 zu $z_0 \mathfrak{z}$ die Umlegung o des Scheitels des rechten Winkels; das genannte Dreieck ist daher das Dreieck $z_0 o \mathfrak{z}$. In demselben sind bei z_0 der Winkel γ der Achse Z, bei $\mathfrak{z}$ der Winkel W_{xy} der Ebene XY mit der Bildebene enthalten. Die Höhe $\overline{o_0 o}$ des Dreieckes $z_0 o \mathfrak{z}$ gibt den Abstand des Punktes o, d. h. des Koordinatenanfangspunktes von der Bildebene an.

In gleicher Weise liessen sich auch die Winkel β und α der Achsen Y und X, desgleichen die Winkel W_{xz} und W_{yz} der Ebenen XZ und YZ mit der Bildebene konstruieren, siehe auch Erkl. 117.

Frage 73. Wie ermittelt man die axonometrischen Bilder dreier auf den drei Achsen befindlichen vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Strecken von beliebiger aber gleicher Länge l?

Antwort. Man zeichnet, s. Figur 118, die Umlegungen oz_0, $o'y_0$, $o''x_0$ der drei Achsen Z, Y und X, nach Anleitung der Antwort von Frage 72, trägt hierauf auf den erstgenannten Linien eine Strecke l von beliebiger Länge nach $\overline{oa}$, $\overline{o'b'}$ und $\overline{o''c''}$ ab und zieht durch die Punkte a, b', c'' Senkrechte zu den Achsenbildern Z_0, Y_0 und X_0, so geben deren Fusspunkte a_0, b_0, c_0 die axonometrischen Bilder der Endpunkte der vom Koordinatenanfangspunkte o auf den Achsen Z, Y und X abgetragenen Strecke l.

Frage 74. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Länge einer auf den Achsen X, Y und Z befindlichen Strecke l und den Längen ihrer axonometrischen Bilder?

Erkl. 119. Durch die in den Gl. 107) aufgeführten Verhältnisse ist angegeben, inwiefern sich das axonometrische Bild einer auf den Achsen befindlichen Strecke l im Vergleich zur wahren Länge verkürzt. Man nennt aus diesem Grund diese Verhältnisse auch die Verkürzungsverhältnisse.

Erkl. 120. Bezeichnet man mit k die Längeneinheit und trägt man diese vom Koordinatenanfangspunkte aus auf den drei Achsen ab, bestimmt je die Länge m, n, p ihres axonometrischen Bildes, so bestehen auf Grund der Gl. 107 die folgenden Beziehungen:

Es ist:

$$108) \ldots \begin{cases} m = k \cdot \cos\alpha \\ n = k \cdot \cos\beta \\ p = k \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

Die Grössen m, n, p, welche angeben, wie gross sich die auf den drei Achsen X, Y und Z abgetragene Längeneinheit auf die Bildebene projiziert, kann man durch Zahlenwerte ausdrücken; man bezeichnet diese Zahlenwerte als die zum Achsenkreuze gehörigen Verhältniszahlen.

Antwort. Da die Strecken $\overline{o_0a_0}$, $\overline{o_0b_0}$, $\overline{o_0c_0}$ die rechtwinkligen Projektionen einer Strecke von der Länge l auf die Bildebene darstellen, so bestehen zwischen den Projektionen l_x, l_y, l_z und der wahren Länge l die Beziehungen:

Es ist:

$$107) \ldots \begin{cases} l_x = \dfrac{\overline{o_0a_0}}{\overline{l}} = \cos\alpha \\ l_y = \dfrac{\overline{o_0b_0}}{\overline{l}} = \cos\beta \\ l_z = \dfrac{\overline{o_0c_0}}{\overline{l}} = \cos\gamma \end{cases}$$

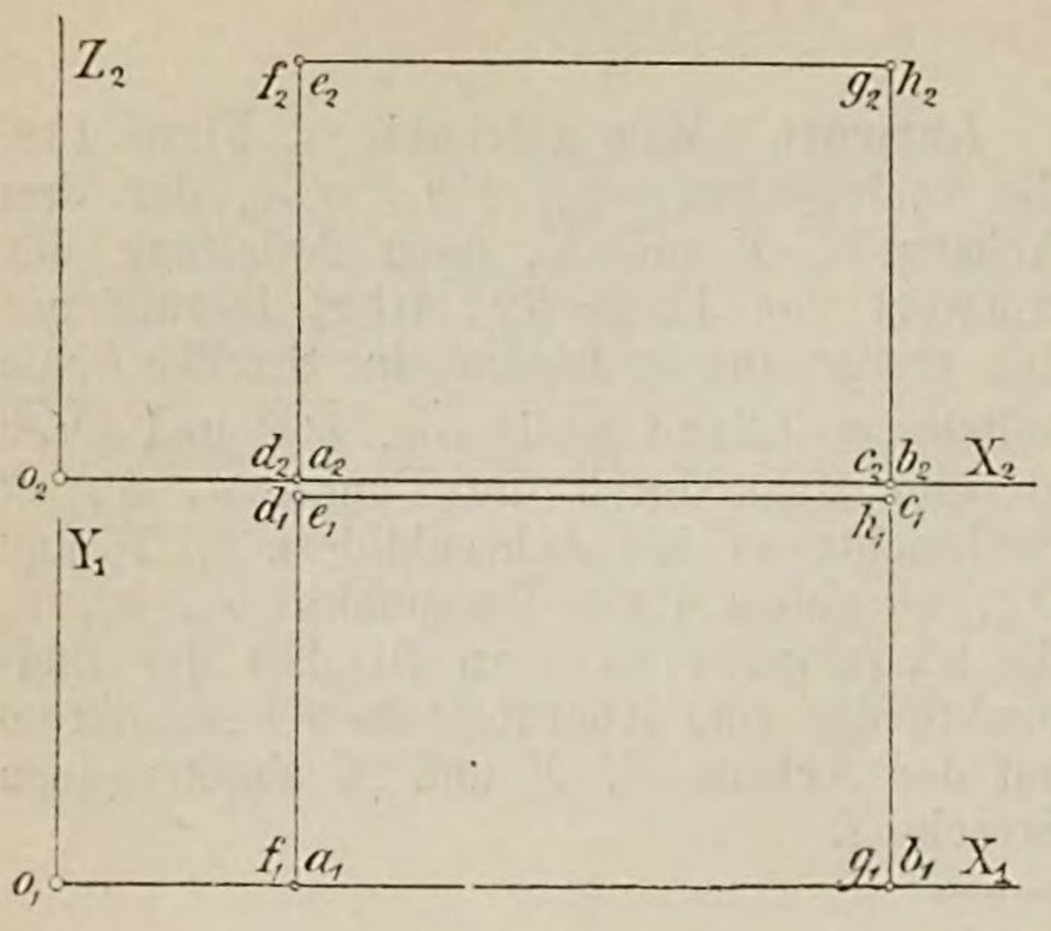
---

c) Axonometrisches Bild eines Körpers.

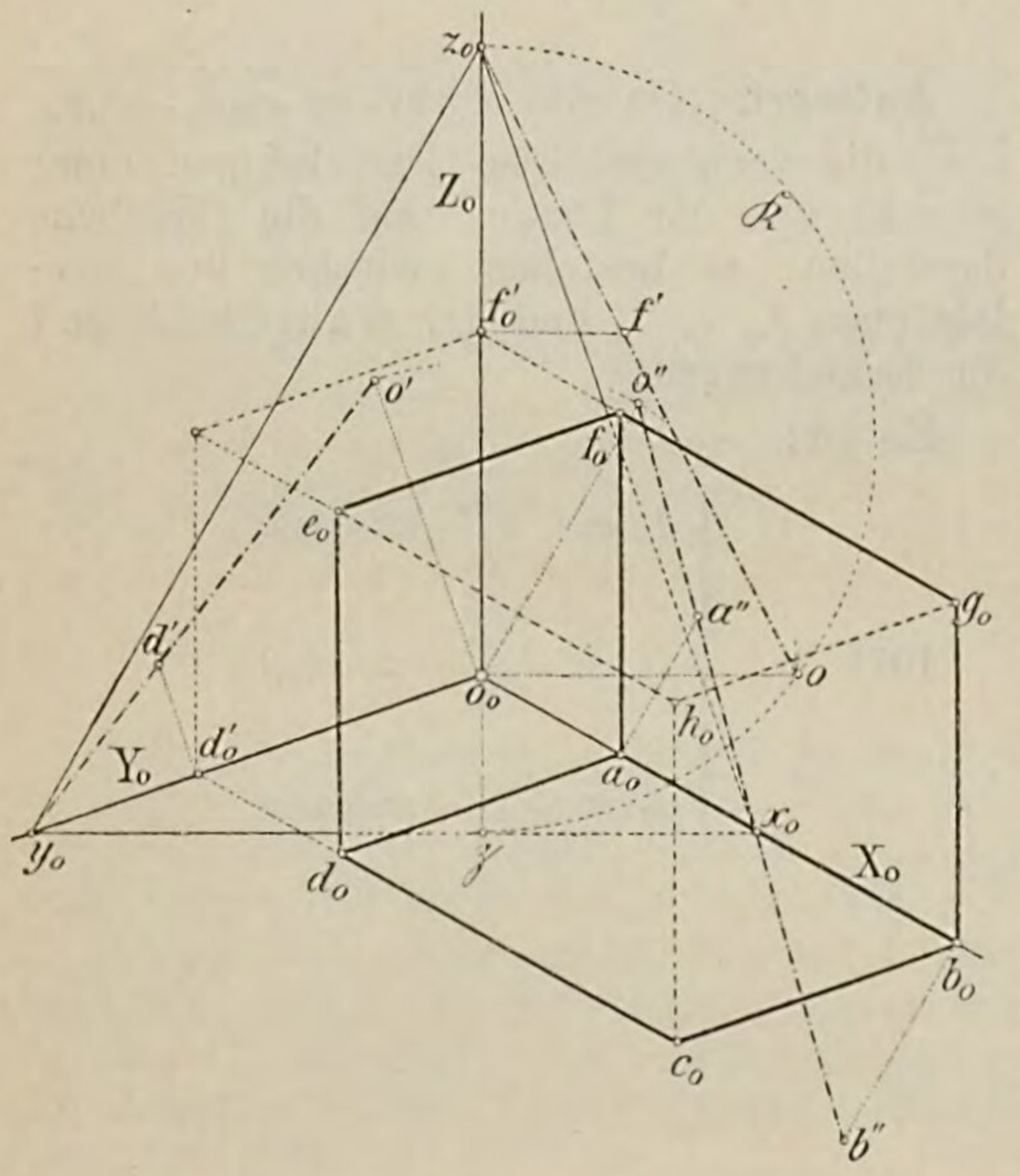
Frage 75. Wie kann man auf Grund des in den Antworten der Fragen 73 und 74 Gesagten ein axonometrisches Bild eines durch horizontale und vertikale Projektion gegebenen Körpers, siehe Figur 119, konstruieren.

Antwort. Ist etwa, siehe Figur 119, ein rechtwinkliges Parallelepiped durch Grund- und Aufriss gegeben, so kann

Figur 119.



Figur 120.



Erkl. 121. Auf die in Antwort der Frage 75 angegebene Art und Weise ist man imstande, zu jedem durch zwei rechtwinklige Projektionen gegebenen Körper, welche Gestalt er auch haben mag, ein axonometrisches Bild zu konstruieren. Man braucht zu diesem Zwecke ja nur den Körper auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz X, Y, Z zu beziehen und die axonometrische Projektion des letzteren beliebig zu wählen.

Bestimmt man dann für jeden einzelnen Punkt des Körpers seine drei Koordinaten und überträgt dieselben, so wie in Antwort der Fragen 72 und 75 gezeigt wurde, auf die Achsenbilder X_0, Y_0 und Z_0, so liefern die Parallelen zu den Achsenbildern durch die so erhaltenen man dasselbe in Verbindung bringen mit dreien von einem beliebigen Punkte o ausgehenden aufeinander senkrecht stehenden Koordinatenachsen X, Y, Z, die beziehungsweise parallel laufen zu den drei Kantenrichtungen des Parallelepipedes und nunmehr den Körper samt den drei Koordinatenachsen in eine beliebig gegen letztere geneigte Bildebene rechtwinklig projizieren, wodurch dann ein axonometrisches Bild entsteht, wie es in Figur 120 dargestellt ist.

Um die Figur 120 aus Figur 119 zu konstruieren, kann man wie folgt verfahren:

Man zeichnet, siehe Figur 120, zunächst ein Achsenkreuz X_0, Y_0, Z_0 ganz beliebig und hierauf das Dreieck $x_0 y_0 z_0$, so dass seine Seiten senkrecht zu den Achsen des Achsenkreuzes bezw. gerichtet sind.

Man nimmt nun die Achsen X_0, Y_0 und Z_0, siehe Figur 120, als die axonometrischen Bilder der Achsen X, Y, Z in Figur 119 und bestimmt deren Neigungen nach Anleitung der Antwort auf Frage 72. Trägt man dann auf der umgelegten X-Achse, s. Figur 120, die Strecken $\overline{o''a''}$ und $\overline{o''b''}$ gleich den wahren Längen der Strecken $\overline{oa}$ und $\overline{ob}$ in Figur 119 ab, so erhält man in a_0 und b_0 die axonometrischen Bilder von zweien Ecken des Parallelepipedes. In gleicher Weise lassen sich auf den umgelegten Achsen X und Y in Figur 120 die Strecken $\overline{o'd'}$ und $\overline{of'}$ gleich den wahren Längen der Strecken $\overline{ad}$ und $\overline{af}$ in Fig. 119 abtragen und die axonometrischen Bilder d_0' und f_0' auf Y_0 und Z_0 ermitteln. Zieht man durch die vier Punkte a_0, b_0, d_0', f_0' die noch möglichen Parallelen zu den Achsen des Achsenkreuzes, so ergeben sich hierdurch die Punkte c_0, d_0, f_0, g_0 und damit auch die noch übrigen Ecken e_0 und h_0 des Parallelepipedes.

Endpunkte auf den Achsen die axonometrischen Bilder der Punkte des Körpers, welche dann nur in derselben Aufeinanderfolge zu verbinden sind, wie dies in den gegebenen rechtwinkligen Projektionen der Fall ist.

Jeder Punkt des Raumes ist dabei vollständig festgelegt und bezogen auf die Koordinatenachsen X, Y, Z, sobald man seine Abstände von den drei Koordinatenebenen der Grösse und dem Vorzeichen nach, d. h. seine drei Koordinaten kennt. Diesen Koordinaten entsprechen im axonometrischen Bilde wieder drei Koordinaten, deren Längen zu den Längen der wirklichen Koordinaten in den durch die Beziehung 107) ausgedrückten Verhältnissen stehen.

Erkl. 122. Bei dem in Antwort der Frage 75 sowie in Erkl. 121 angegebenen Verfahren kann man das Achsenkreuz im axonometrischen Bilde ganz beliebig wählen und findet hieraus die Verkürzungsverhältnisse für alle auf den Achsenbildern oder parallel zu denselben aufzutragenden Strecken aus den Beziehungen 107). Sehr häufig ist es aber wünschenswert, die Verkürzungsverhältnisse von vornherein anzunehmen, bezw. als gegeben vorauszusetzen. In diesem Falle ist aber das Achsenkreuz im axonometrischen Bilde nicht mehr beliebig wählbar; es muss vielmehr in ganz bestimmter Weise angenommen, d. h. konstruiert werden.

---

d) Konstruktion des Achsenkreuzes aus den gegebenen Verhältniszahlen.

Frage 76. Wie konstruiert man bei gegebenen Verkürzungsverhältnissen oder was gleichbedeutend ist, bei gegebenen Verhältniszahlen, das zu diesen Zahlen gehörige axonometrische Bild des Achsenkreuzes?

Antwort. Ist k eine Strecke gleich der Längeneinheit und denkt man sich dieselbe auf den drei Achsen X, Y und Z vom Anfangspunkte o aus aufgetragen, so bestehen zwischen der Länge k und ihren axonomtrischen Bildern auf den drei Achsen mit Bezugnahme auf Gl. 108) die Beziehungen:

Es ist:

$$109) \ldots k \cdot \cos\alpha = m;\ k \cdot \cos\beta = n;\ k \cdot \cos\gamma = p$$

oder in Rücksicht auf die Beziehung 113), siehe Erkl. 123:

$$110) \ldots 2k^2 = m^2 + n^2 + p^2$$

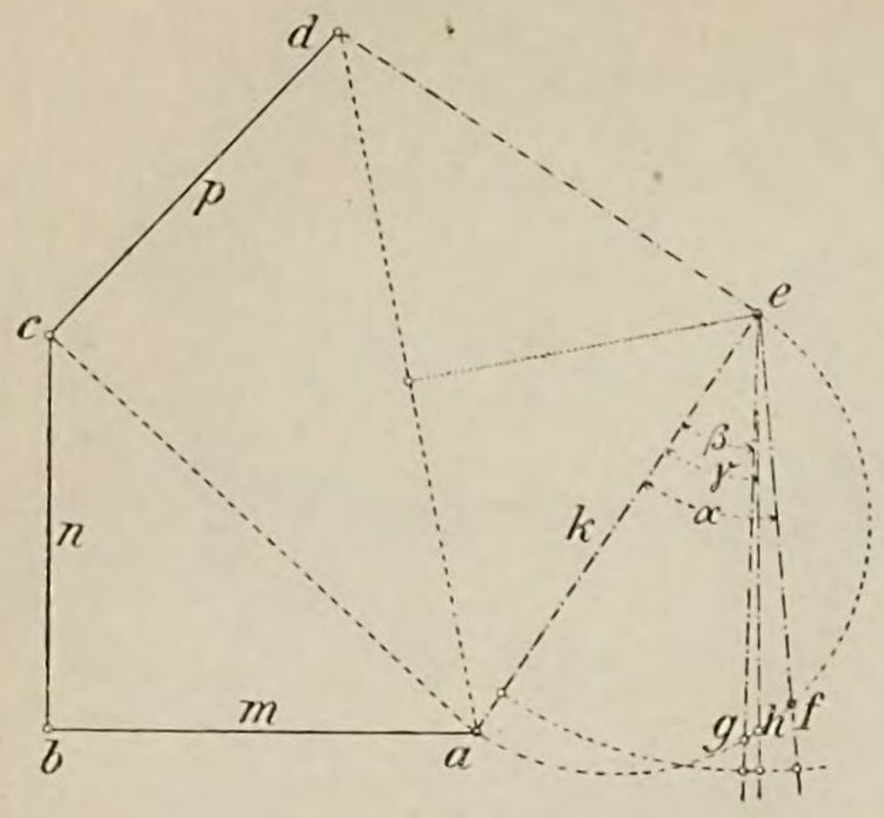
oder:

$$111) \ldots k^2 = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}$$

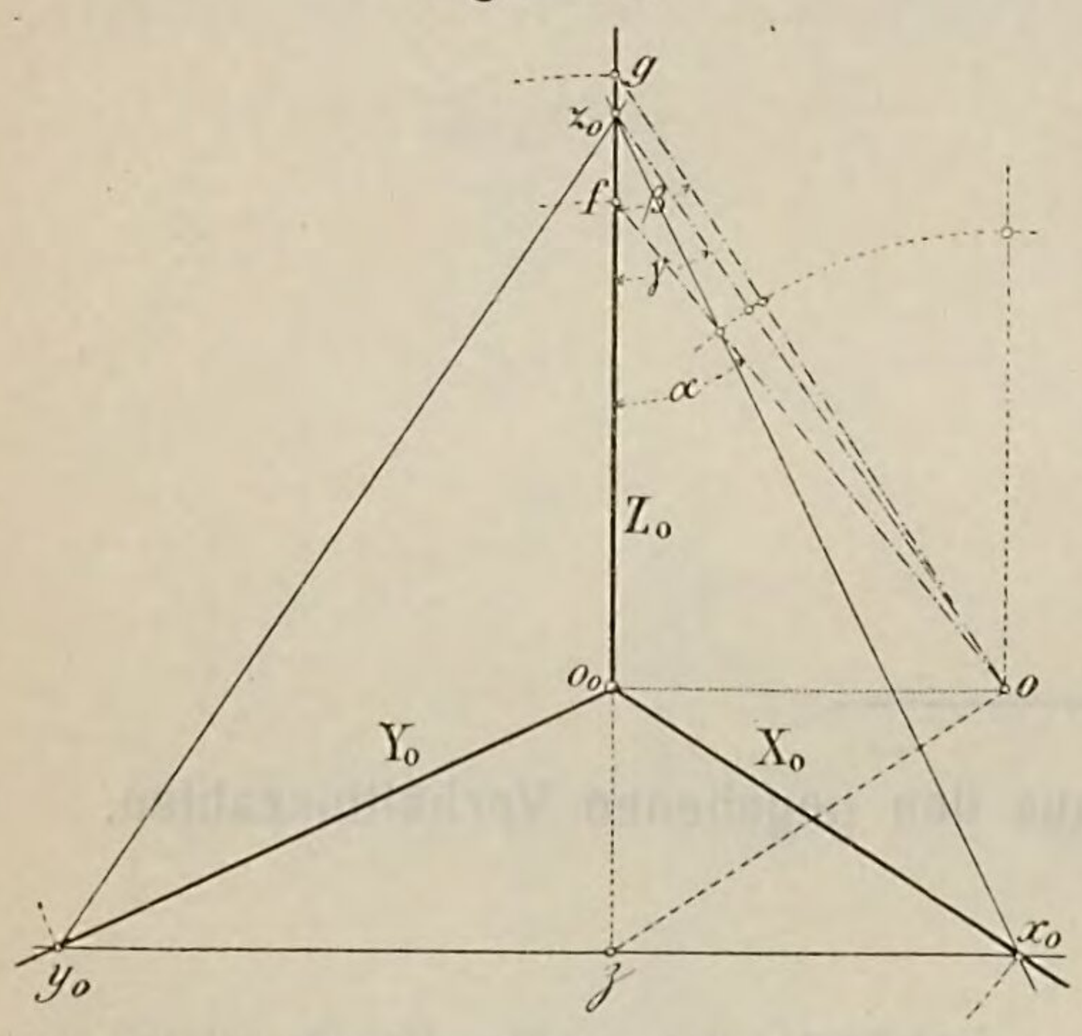
Durch Verbindung von Gleich. 111) mit Gl. 108) erhält man:

$$112) \ldots \begin{cases} \cos^2\alpha = \dfrac{2m^2}{m^2 + n^2 + p^2} \\ \cos^2\beta = \dfrac{2n^2}{m^2 + n^2 + p^2} \\ \cos^2\gamma = \dfrac{2p^2}{m^2 + n^2 + p^2} \end{cases}$$

Figur 121.



Figur 122.



Erkl. 123. Zwischen den Winkeln der drei Koordinatenebenen mit der Bildebene besteht eine Beziehung, welche schon im I. Teile dieses Lehrbuches, siehe Seite 128, Frage und Antwort 80, entwickelt wurde. Es ist nämlich:

113) . . . $\cos^2 W_{xy} + \cos^2 W_{xz} + \cos^2 W_{yz} = 1$

Da nun aber:

$$\cos W_{xy} = \sin\gamma$$
$$\cos W_{xz} = \sin\beta$$
$$\cos W_{yz} = \sin\alpha$$

ist, so folgt die weitere Gleichung:

114) . . . $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$

und wenn man statt der Sinus die Cosinus der genannten Winkel einführt:

115) . . . $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$

Erkl. 123 a. Aus den Beziehungen 112) folgt für die absoluten Werte der Verhältniszahlen m, n und p unmittelbar die Bedingung:

$$116) \ldots \begin{cases} m^2 + n^2 \overline{\overline{>}} p^2 \\ m + p^2 \overline{\overline{>}} n^2 \\ n^2 + p^2 \overline{\overline{>}} m^2 \end{cases}$$

Sind nun die Grössen m, n, p unter Berücksichtigung der in Erkl. 123 a genannten Bedingungen, gegeben, so erhält man zunächst auf Grund der Gl. 113) die Grösse k, wenn man, siehe Figur 121, die Grösse:

$$\overline{ad} = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

konstruiert und über $\overline{ad}$ als Hypotenuse ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ade zeichnet; jede Kathete desselben ist gleich der Strecke k.

Mittels der Beziehungen 108) ergeben sich nun die Winkel α, β, γ in wahrer Grösse in rechtwinkligen Dreiecken mit der Strecke $\overline{ae} = k$ als Hypotenuse und der Strecke, m, n und p je als anliegenden Kathete.

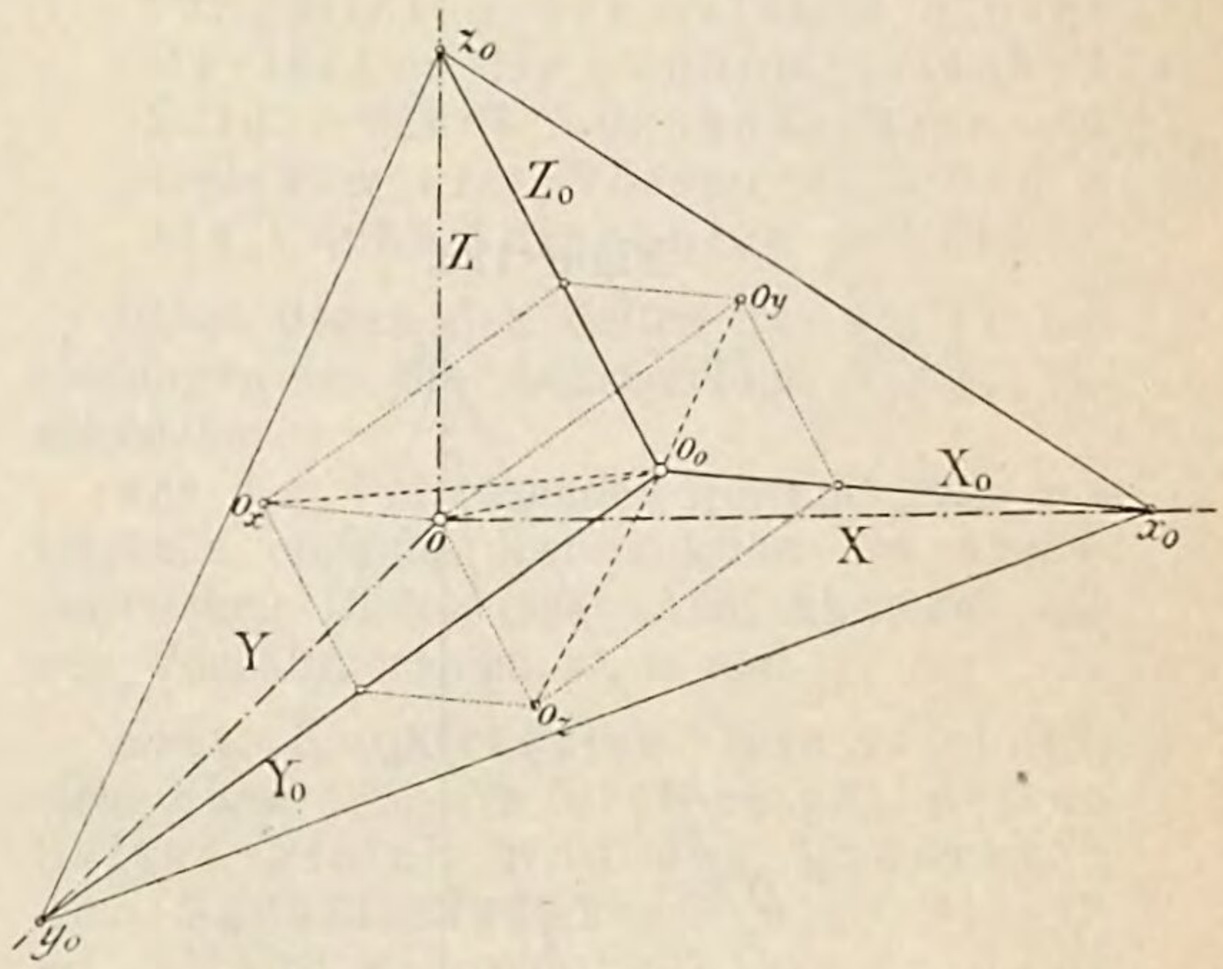
Trägt man jetzt, siehe Figur 122, an eine Strecke $\overline{oo_0}$ von beliebiger Länge im Punkte o die Geraden of, og und oz_0 bezw. unter den Winkeln $90^0 - \alpha$, $90^0 - \beta$, $90^0 - \gamma$ an, so stellen die Längen $\overline{o_0 f}$, $\overline{o_0 g}$, $\overline{o_0 z_0}$ die Längen der Projektionen von dreien durch einen, im Abstande gleich $\overline{o_0 o}$ von der Bildebene entfernten Punkt o hindurchgehenden Geraden dar. Sollen diese noch ausserdem aufeinander senkrecht stehen, so müssen je zwei der Geraden in einer zur dritten senkrechten Ebene liegen. Zieht man daher oz senkrecht zu oz_0, siehe Fig. 122, und durch z eine Senkrechte zu $\overline{zz_0}$, so ist diese Linie die Spur einer durch den Punkt o im Raume senkrecht zur Geraden oz_0 geführten Ebene und in ihr müssen die Spuren aller Geraden liegen, die senkrecht stehen zu oz_0. Die Kreisbögen um o_0 als Mittelpunkt und $\overline{of}$ bezw. $\overline{o_0 g}$ als Halbmesser schneiden auf der Linie $x_0 y_0$ die Punkte x_0 und y_0 so aus, dass die Verbindungslinien $x_0 o_0$ und $y_0 o_0$ die Achsenbilder X_0 und Y_0 eines Achsenkreuzes darstellen, dessen dritte Achse Z_0 mit $o_0 z_0$ zusammenfällt und für welche die von vornherein gegebenen Verhältniszahlen m, n, p Gültigkeit besitzen.

weil in den Beziehungen 112) der Wert des Nenners niemals kleiner sein darf als der Wert des Zählers.

Erkl. 124. Der in Erkl. 123 zwischen den Winkeln α, β und γ ausgedrückte Zusammenhang hätte sich auch direkt wie folgt nachweisen lassen:

Ist, siehe Figur 123, durch X, Y, Z das Achsenkreuz, durch X_0, Y_0, Z_0 dessen axonometrisches Bild dargestellt, und bedeutet demnach die Linie $\overline{oo_0}$ die vom Koordinatenanfangspunkt auf die Bildebene gefällte Senkrechte, so denke man sich diese Senkrechte, deren Länge durch l bezeichnet sein soll, auf die drei Koordinatenebenen projiziert und bezeichne deren Projektionen $\overline{o_0 o_x}$, $\overline{o_0 o_y}$, $\overline{o_0 o_z}$ bezw. mit l_x, l_y, l_z. Sind dann x, y, z die Koordinaten des Punktes o_0, so finden zwischen den Grössen l, l_x, l_y und l_z die folgenden Beziehungen statt:

Figur 123.



Es ist:

$$l^2 = l_x^2 + x^2$$

oder da:

$$l_x^2 = z^2 + y^2$$

ist, so hat man auch:

117) . . . $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Nun ist aber:

$$l_x^2 = y^2 + z^2 = l^2 \cos^2 \alpha$$
$$l_y^2 = x^2 + z^2 = l^2 \cos^2 \beta$$
$$l_z^2 = x^2 + y^2 = l^2 \cos^2 \beta$$

folglich ist:

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 2\,(x^2 + 2y^2 + 2z^2)$$
$$= 2l^2$$

oder:

118) . . . $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$

Aus dieser Gleichung folgt aber unmittelbar die weitere Gleichung:

119) . . . $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$

Frage 77. Gibt es ausser der in Antwort der Frage 76 durchgeführten Konstruktion des Achsenkreuzes noch einfachere Konstruktionen, und welche?

Antwort. Ist, siehe Figur 124, $x_0 y_0 z_0$ das Spurendreieck der Bildebene, o der Koordinatenanfangspunkt, o_0 dessen axonometrisches Bild, x_0, y_0, z_0 das Bild des Achsenkreuzes, so erkennt man zunächst, wenn man die Achsenbilder bis zu den Seiten des Spurendreieckes x_0, y_0 und z_0 verlängert und die Durchschnittspunkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ miteinander verbindet, dass die Achsenbilder die Winkel des Dreieckes $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ halbieren, woraus die Aehnlichkeit der Dreiecke $o_0 \mathfrak{x}\mathfrak{y}$ und $o_0 y_0 x_0$ folgt.

Es besteht demnach die Verhältnisgleichheit:

$$120) \ldots \frac{\overline{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}}}{\overline{x_0 y_0}} = \frac{\mathfrak{r}}{\overline{o_0 \mathfrak{z}}}$$

wobei $\mathfrak{r}$ den Halbmesser des dem Dreiecke $\mathfrak{x}\mathfrak{y}o_0$ eingeschriebenen Kreises bezeichnet.

Aus Gl. 120) folgt:

$$121) \ldots \overline{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{r} \cdot \overline{x_0 y_0}}{\overline{o_0 \mathfrak{z}}}$$

Aus der Figur 124 erkennt man weiter, wenn die Linie $o\mathfrak{z}$ noch gezogen wird, die Aehnlichkeit der Dreiecke $x_0 o y_0$ und $\mathfrak{z} o y_0$, somit ist:

$$\frac{\overline{x_0 y_0}}{\overline{o x_0}} = \frac{\overline{o y_0}}{\overline{o \mathfrak{z}}}$$

daher:

$$122) \ldots \overline{x_0 y_0} = \frac{\overline{o x_0} \cdot \overline{o y_0}}{\overline{o \mathfrak{z}}}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathfrak{z} o o_0$ und $z_0 o o_0$ folgt endlich die Beziehung:

$$123) \ldots \frac{\overline{o_0 \mathfrak{z}}}{\overline{o \mathfrak{z}}} = \frac{\overline{o\,o_0}}{\overline{o\,z_0}}$$

oder:

$$124) \ldots . \overline{o_0 \mathfrak{z}} = \frac{\overline{o\,o_0} \cdot \overline{o \mathfrak{z}}}{\overline{o\,z_0}}$$

und

$$125) \ldots \frac{\overline{o \mathfrak{z}}}{\overline{o\,o_0}} = \frac{\overline{o\,z_0}}{\overline{o_0 z_0}}$$

oder:

$$126) \ldots . \quad o\mathfrak{z} = \frac{\overline{o\,z_0} \cdot \overline{o\,o_0}}{\overline{o_0 z_0}}$$

Setzt man die Werte aus den Gl. 122) und 124) in Gl. 121) ein, so erhält man:

$$127) \ldots \mathfrak{x}\mathfrak{y} = \frac{\overline{o x_0} \cdot \overline{o y_0} \cdot \overline{o z_0}}{\overline{o \mathfrak{z}} \cdot \overline{o\,o_0} \cdot \overline{o \mathfrak{z}}} \cdot \mathfrak{r}$$

od. in Rücksicht auf Gl. 126)

$$= \frac{\overline{o x_0} \cdot \overline{o y_0} \cdot \overline{o z_0} \cdot \overline{o_0 z_0} \cdot \overline{o_0 z_0}}{\overline{o z_0} \cdot \overline{o\,o_0} \cdot \overline{o\,o_0} \cdot \overline{o z_0} \cdot \overline{o\,o_0}} \cdot \mathfrak{r}$$

$$= \frac{\overline{o x_0} \cdot \overline{o y_0} \cdot \overline{o z_0}}{\overline{o\,o_0}^3 \cdot \frac{\overline{o z_0^2}}{\overline{o_0 z_0^2}}} \cdot \mathfrak{r}$$

Nun ist aber:

$$\frac{\overline{o z_0}}{\overline{o_0 z_0}} = \frac{1}{\cos \gamma}$$

man kann somit Gl. 127) auch so schreiben:

$$128) \ldots \mathfrak{x}\mathfrak{y} = \frac{\overline{o x_0} \cdot \overline{o y_0} \cdot \overline{o z_0}}{\overline{o\,o_0}^3} \cdot \mathfrak{r} \cdot \cos^2 \gamma$$

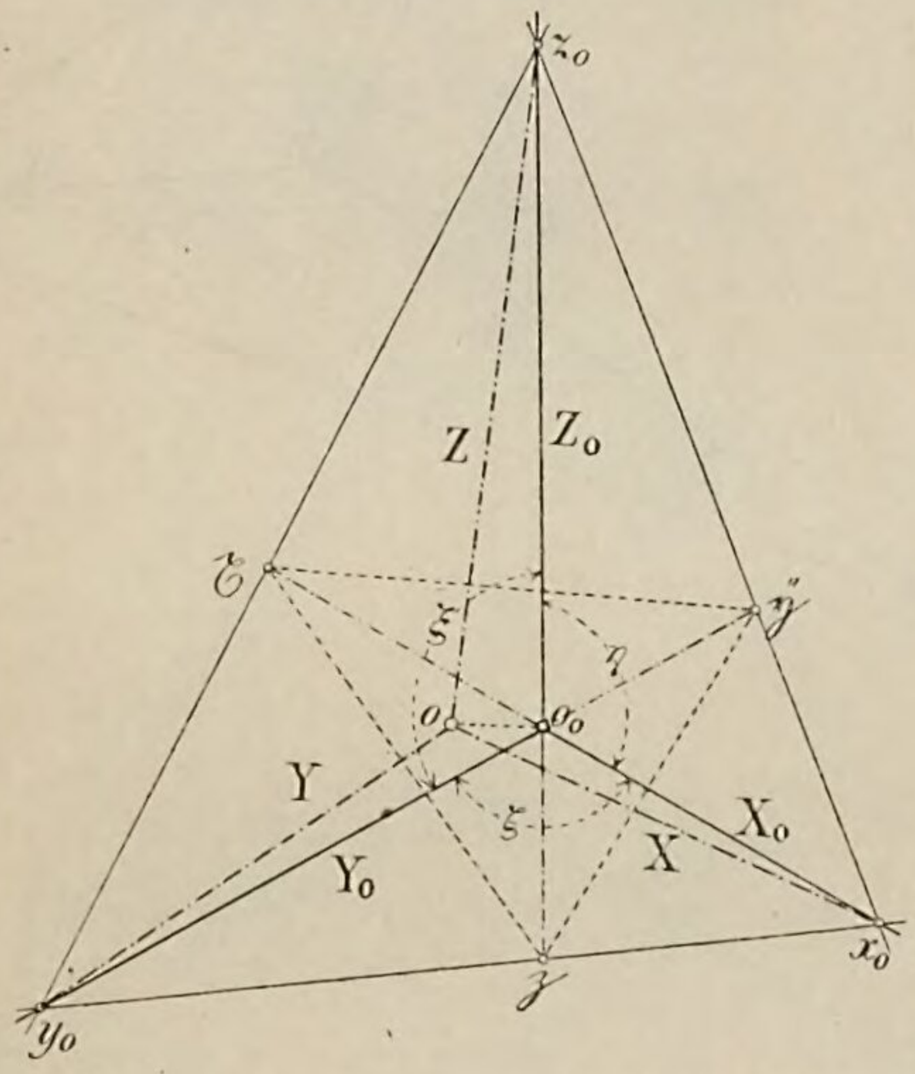
In gleicher Weise erhielte man auch:

$$129) \ldots \overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} = \frac{\overline{o x_0} \cdot \overline{o y_0} \cdot \overline{o z_0}}{\overline{o\,o_0}^3} \cdot \mathfrak{r} \cdot \cos^2 \alpha$$

und

$$130) \ldots \overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}} = \frac{\overline{o x_0} \cdot \overline{o y_0} \cdot \overline{o z_0}}{\overline{o\,o_0}^3} \cdot \mathfrak{r} \cdot \cos^2 \beta$$

Figur 124.



Es besteht somit die Beziehung:

131) . . . $\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} : \overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}} : \overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \cos^2\alpha : \cos^2\beta : \cos^2\gamma = m^2 : n^2 : p^2$

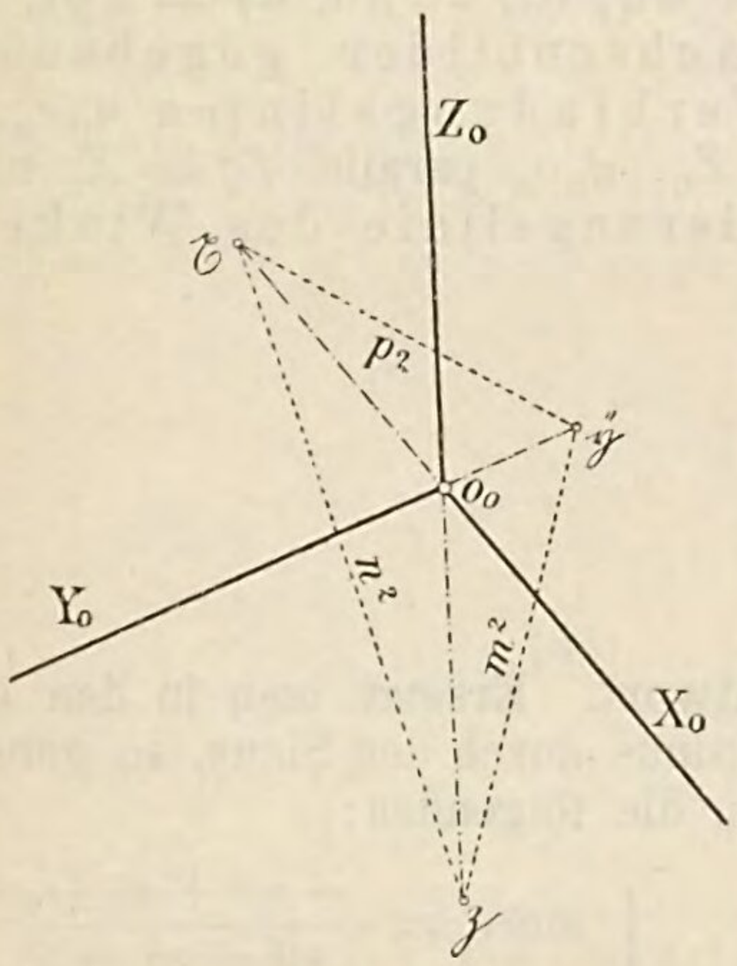
In Gl. 131) ist folgender Satz enthalten:

„Zeichnet man ein Dreieck $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, dessen Seiten $\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}$, $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}$, $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$ sich verhalten wie die Quadrate der Verhältniszahlen m, n und p, so bilden die inneren Halbierungslinien der Winkel dieses Dreieckes die axonometrischen Bilder eines Achsenkreuzes, zu welchem die Grössen m, n und p als Verhältniszahlen gehören."

Dabei liegen den Seiten $\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}$, $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}$, $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$ beziehungsweise die Achsenbilder X_0, Y_0, Z_0 gegenüber.

Aus dem Vorstehenden gewinnt man nun folgende einfache Konstruktion des axonometrischen Bildes eines Achsenkreuzes mit den Verhältniszahlen m, n und p.

Figur 125.

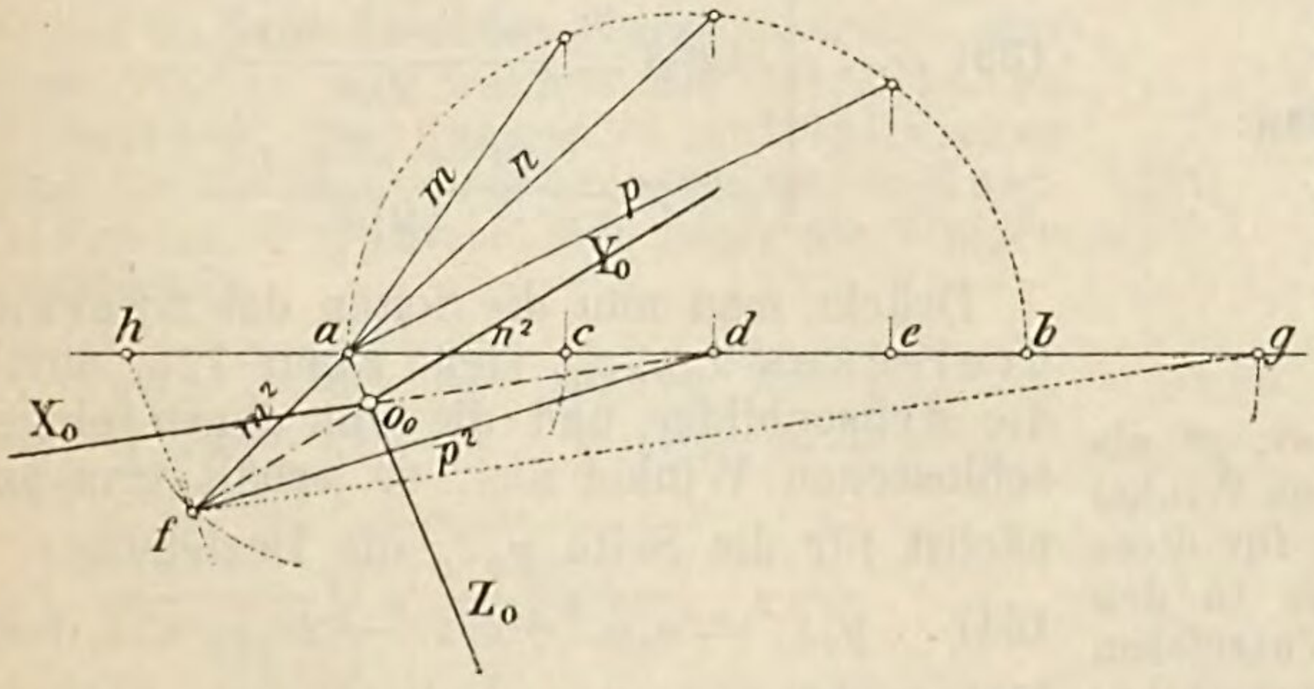


Erkl. 125. Das in Figur 125 mit $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ bezeichnete Dreieck, dessen Seiten sich verhalten wie die Quadrate der Verhältniszahlen, soll ein Verkürzungsdreieck genannt werden.

Erste Konstruktion. Man zeichnet, siehe Figur 125, ein Dreieck $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, dessen Seiten gleich sind den Quadraten der Verhältniszahlen, also gleich m^2, n^2 und p^2 und halbiert in demselben die Winkel. Die Verlängerungen der Halbierungslinien über ihren gemeinsamen Schnittpunkt hinaus geben das axonometrische Bild des Achsenkreuzes X_0, Y_0, Z_0. Dabei geht die Linie X_0 durch den Punkt $\mathfrak{x}$, die Y_0 durch $\mathfrak{y}$, die Z_0 durch $\mathfrak{z}$ beziehungsweise.

Zweite Konstruktion. Sind die Grössen m, n, p nicht durch Zahlenwerte, sondern durch Strecken gegeben, so erhält man das Verkürzungsdreieck, s. Erkl. 125, gleichfalls in einfacher Weise:

Figur 126.



Man beschreibt, siehe Figur 126, über einer Strecke $\overline{ab}$, welche grösser ist als jede der Strecken m, n oder p, einen Halbkreis, trägt darin von dem Punkte a aus die drei Strecken m, n und p als Sehnen ab, so bilden ihre Projektionen auf den Durchmesser ab die Seiten eines Verkürzungsdreieckes, denn es ist ja:

$$m^2 = \overline{ab} \cdot \overline{ac}$$
$$n^2 = \overline{ab} \cdot \overline{ad}$$
$$p^2 = \overline{ab} \cdot \overline{ae}$$

daher auch:

$$m^2 : n^2 : p^2 = \overline{ab} \cdot \overline{ac} : \overline{ab} \cdot \overline{ad} : \overline{ab} \cdot \overline{ae}$$
$$= \overline{ac} : \overline{ad} : \overline{ae}$$

Konstruiert man also mit den drei Seiten $\overline{ac}$, $\overline{ad}$ und $\overline{ae}$ ein Dreieck, so bilden dessen Halbierungslinien die Achsenbilder des Achsenkreuzes.

Dritte Konstruktion. Sind wieder die Grössen m, n und p durch Strecken gegeben, so verschafft man sich in gleicher Weise wie vorhin die drei Strecken $\overline{ac}$, $\overline{ad}$ und $\overline{ae}$, siehe Figur 126, welche sich zu einander verhalten wie $m^2 : n^2 : p^2$, trägt diese Strecken nacheinander nach $\overline{ha}$, $\overline{ad}$ und $\overline{dg}$ auf einer Geraden ab, siehe Figur 126, und zeichnet über der Seite $\overline{ad}$ das Verkürzungsdreieck adf ($\overline{af} = \overline{ha}$, $\overline{df} = \overline{dg}$), so sind die Achsenbilder gegeben durch die Verbindungslinien a_0o_0 parallel $hf = Z_0$, d_0o_0 parallel $fg = X_0$ und die Halbierungslinie des Winkels $afd = Y_0$.

Frage 78. Bestehen zwischen den Verhältniszahlen m, n und p und zwischen den Winkeln α, β und γ sowie den Winkeln ξ, η und ζ der Achsenbilder Beziehungen und wenn ja, welche?

Erkl. 126. In Rücksicht auf die Figur 124 besteht die Beziehung:

$$\overline{oy_0} \cdot \sin\beta = \overline{oz_0} \cdot \sin\gamma = \overline{oo_0}$$

daher ist:

$$\overline{oy_0}^2 \cdot \sin^2\beta + \overline{oz_0}^2 \cdot \sin^2\gamma = \overline{2oy_0}^2 \cdot \sin^2\beta$$
$$= \overline{2oz_0}^2 \cdot \sin^2\gamma = \overline{2oy_0} \cdot \overline{oz_0} \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

Erkl. 127. Berücksichtigt man die Beziehung:

$$\cos^2\xi = 2\cos^2\xi - 1$$

und setzt statt $\cos\xi$ den durch Gl. 138) ausgedrückten Wert, so erhält man:

139)
$$\begin{cases} \cos 2\xi = \dfrac{-2(m^2 - n^2 + p^2)(m^2 + n^2 - p^2)}{2n^2p^2} \\ \qquad = \dfrac{-m^4 + n^4 + p^4}{2n^2p^2} \\ \text{In gleicher Weise erhält man:} \\ \cos 2\eta = \dfrac{-m^4 - n^4 + p^4}{2m^2p^2} \\ \cos 2\zeta = \dfrac{-m^4 + n^4 - p^4}{2m^2n^2} \end{cases}$$

Betrachtet man die Grössen m^2, n^2, p^2 als Seiten eines Dreieckes und drückt dessen Winkel durch die Seiten aus, so erhält man für diese Winkel Ausdrücke, welche mit jenen in den Gleichungen angeführten bis auf das Vorzeichen übereinstimmen, diese Winkel sind demnach beziehungsweise $2\xi - 180^0$, $2\eta - 180^0$, $2\zeta - 180^0$. Die nämlichen Winkel treten aber auch in dem Verkürzungsdreieck $\xi\eta\zeta$

Antwort. Ersetzt man in den Gl. 112) den Cosinus durch den Sinus, so gehen diese über in die folgenden:

132) . . .
$$\begin{cases} \sin^2\alpha = \dfrac{-m^2 + n^2 + p^2}{m^2 + n^2 + p^2} \\ \sin^2\beta = \dfrac{m^2 - n^2 + p^2}{m^2 + n^2 + p^2} \\ \sin^2\gamma = \dfrac{m^2 + n^2 - p^2}{m^2 + n^2 + p^2} \end{cases}$$

Durch Verbindung der Gl. 112) und 126) folgen dann:

133) . . .
$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{-m^2 + n^2 + p^2}{2m^2} \\ \operatorname{tg}^2\beta = \dfrac{m^2 - n^2 + p^2}{2n^2} \\ \operatorname{tg}^2\gamma = \dfrac{m^2 + n^2 - p^2}{2p^2} \end{cases}$$

Drückt man nun die Seiten des Spurendreieckes $x_0y_0z_0$, siehe Figur 124, durch die Achsenbilder und die von ihnen eingeschlossenen Winkel aus, so erhält man zunächst für die Seite $\overline{y_0z_0}$ die Beziehung:

134) . . $\overline{y_0z_0}^2 = \overline{o_0y_0}^2 + \overline{o_0z_0}^2 - \overline{2o_0y_0} \cdot \overline{o_0z_0} \cdot \cos\xi$

hieraus folgt:

135) . . . $\cos\xi = \dfrac{\overline{o_0y_0}^2 + \overline{o_0z_0}^2 - \overline{y_0z_0}^2}{\overline{2o_0y_0} \cdot \overline{o_0z_0}}$

auf. Der in Antwort der Frage 77 bewiesene Satz ist also hiermit nochmals bewiesen.

Diese Gleichung lässt sich durch Einführung der Grössen $\overline{oy_0}$, $\overline{oz_0}$ auch so schreiben:

$$136) \ldots \cos\xi = \frac{\overline{oy_0}^2 \cdot \cos^2\beta + \overline{oz_0} \cdot \cos^2\gamma - \overline{oy_0}^2 - \overline{oz_0}^2}{2\overline{oy_0} \cdot \cos\beta \cdot \overline{oz_0} \cdot \cos\gamma}$$

$$= \frac{\overline{oy_0}^2 (1 - \cos^2\beta) - \overline{oz_0}^2 \cdot (1 - \cos^2\gamma)}{2\overline{oy_0} \cdot \cos\beta \cdot \overline{oz_0} \cdot \cos\gamma}$$

$$= \frac{-\overline{oy_0}^2 \cdot \sin^2\beta + \overline{oz_0}^2 \cdot \sin^2\gamma}{2\overline{oy_0} \cdot \cos\beta \cdot oz_0 \cdot \cos\gamma}$$

oder in Rücksicht auf Erkl. 126:

$$137) \ldots \begin{cases} \cos\xi = \dfrac{-2\overline{oy_0} \cdot \overline{oz_0} \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\overline{oy_0} \cdot \overline{oz_0} \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma} \\ \qquad = -\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \\ \text{Entsprechend ergibt sich auch:} \\ \cos\eta = -\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma \\ \text{und} \\ \cos\zeta = -\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \end{cases}$$

Durch Einführung der Werte für $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ und $\operatorname{tg}\gamma$ aus den Gl. 133) gehen obige Gleichungen über in:

$$138) \ldots \begin{cases} \cos\xi = -\dfrac{1}{2np} \cdot \sqrt{(m^2 - n^2 + p^2)(m^2 + n^2 - p^2)} \\ \cos\eta = -\dfrac{1}{2mp} \cdot \sqrt{(-m^2 + n^2 + p^2)(m^2 + n^2 - p^2)} \\ \cos\zeta = -\dfrac{1}{2mn} \cdot \sqrt{(-m^2 + n^2 + p^2)(m^2 - n^2 + p^2)} \end{cases}$$

Frage 79. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Verhältniszahlen m, n und p, den Koordinaten x, y, z eines Punktes und deren axonometrischen Bildern x_0, y_0, z_0?

Antwort. Man hat zunächst:

$$x_0 = x \cdot \cos\alpha$$
$$y_0 = y \cdot \cos\beta$$
$$z_0 = z \cdot \cos\gamma$$

daher in Rücksicht auf die Gl. 112):

$$140) \ldots \begin{cases} x_0 = x \cdot \sqrt{\dfrac{2m^2}{m^2 + n^2 + p^2}} \\ y_0 = y \cdot \sqrt{\dfrac{2n^2}{m^2 + n^2 + p^2}} \\ z_0 = z \cdot \sqrt{\dfrac{2p^2}{m^2 + n^2 + p^2}} \end{cases}$$

Erkl. 128. Die in Antwort der Frage 79 in den Gl. 140) stehenden Wurzelausdrücke, sind jene Werte, mit welchen die wirklichen Koordinaten eines Punktes zu multiplizieren sind, um die Längen der axonometrischen Koordinaten zu erhalten. Man nennt die Wurzelausdrücke:

$$\sqrt{\frac{2m^2}{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad \sqrt{\frac{2n^2}{m^2 + n^2 + p^2}}$$

und

$$\sqrt{\frac{2p^2}{m_2 + n^2 + p^2}}$$

deshalb auch die Reduktionskoeffizienten der in Rede stehenden axonometrischen Projektion.

Frage 80. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Verhältniszahlen m, n und p und den Längen $\overline{x_0y_0}$, $\overline{y_0z_0}$ und $\overline{z_0x_0}$ der Seiten des Spurendreieckes und welche Konstruktion des Achsenkreuzes folgt hieraus?

Antwort. Es ist nach dem Vorangegangenen:

$$141) \ldots \overline{y_0z_0}^2 = \overline{o_0y_0}^2 + \overline{o_0z_0}^2 - \overline{2o_0y_0} \cdot \overline{o_0z_0} \cdot \cos\xi$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\gamma} + 2$$

$$142) \ldots \overline{y_0z_0}^2 = \frac{\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma + 2\operatorname{tg}^2\beta \cdot \operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}^2 \cdot \operatorname{tg}^2\gamma}$$

Setzt man nun in Gl. 142) für $\operatorname{tg}^2\beta$ und $\operatorname{tg}^2\gamma$ die aus den Gl. 133) zu entnehmenden Werte ein und bringt die so sich ergebende Gleichung auf die einfachste Form, siehe Erkl. 129, so erhält man schliesslich:

$$143) \ldots \begin{cases} \overline{y_0z_0} = \sqrt{\dfrac{2m^2(m^2+n^2+p^2)}{m^4-n^4-p^4+2p^2n^2}} \\ \text{In ähnlicher Weise findet man:} \\ \overline{x_0z_0} = \sqrt{\dfrac{2n^2(m^2+n^2+p^2)}{n^4-m^4-p^4+2p^2m^2}} \\ \text{und} \\ \overline{x_0y_0} = \sqrt{\dfrac{2p^2(m^2+n^2+p^2)}{p^4-m^4-n^4+2m^2n^2}} \end{cases}$$

Mittels der durch die Gl. 143) zwischen den Seiten des Spurendreieckes und den Verhältniszahlen bestehenden Beziehungen ergibt sich eine weitere Konstruktion des Achsenkreuzes der bezüglichen axonometrischen Projektion:

„Man berechnet sich nämlich aus den Gl. 143) die Seiten des Spurendreieckes konstruiert aus ihnen das Spurendreieck selbst, so sind dessen Höhen die Achsenbilder X_0, Y_0 und Z_0“

Erkl. 129. Nach Einsetzung der Werte aus den Gleichungen 133) für $\operatorname{tg}^2\beta$ und $\operatorname{tg}^2\gamma$ nimmt die Gl. 142) die Form an:

$$\overline{y_0z_0}^2 = \frac{\dfrac{m^2-n^2+p^2}{2n^2} + \dfrac{m^2+n^2-p^2}{2p^2} + \dfrac{2(m^2-n^2+p^2)(m^2+n^2-p^2)}{2n^2p^2}}{\dfrac{(m^2+n^2+p^2)(m^2+n^2-p^2)}{4n^2p^2}}$$

welche zunächst in folgende übergeführt werden kann:

$$\overline{y_0z_0}^2 = \frac{\cancel{m^2p^2} - \cancel{n^2p^2} + \cancel{p^4} + m^2n^2 - \cancel{m^2p^2} + \cancel{m^4} + \cancel{m^4} + \cancel{m^2n^2} - \cancel{m^2p^2} - \cancel{n^2m^2} - \cancel{n^4} + \cancel{n^2p^2} + m^2p^2 + \cancel{n^2p^2} - \cancel{p^4}}{\cancel{m^4} + \cancel{m^2n^2} - \cancel{m^2p^2} + \cancel{n^2m^2} + n^4 - n^2p^2 + \cancel{m^2p^2} + n^2p^2 - p^4} \cdot 2$$

$$= \frac{2m^2(m^2+n^2+p^2)}{m^4+n^4-p^4-2np^2}$$

oder:

$$\overline{y_0z_0} = \sqrt{\frac{2m^2(m^2+n^2+p^2)}{m^4+n^4-p^4-2n^2p^2}}$$

B. Ueber die besonderen axonometrischen Projektionsarten.

a) Die besonderen axonometrischen Projektionsarten im allgemeinen.

Anmerkung 30. Die im Vorstehenden entwickelten Beziehungen zwischen den Grössen m, n, p, α, β, γ, ξ, η, ζ haben mit Berücksichtigung der in den Gleichungen 115) und 116) festgestellte Beschränkungen für jedes axonometrische Achsenkreuz Gültigkeit. Es können nun aber die einzelnen Grössen besondere Werte annehmen, insbesondere können zwei oder drei zusammengehörige Grössen einander gleich sein. Unter den Winkeln α, β, γ, ξ, η und ζ sind überdies die Werte 0^0 und 90^0 enthalten, in allen diesen Fällen vereinfachen sich die bisherigen kennen gelernten Beziehungen und man erhält die besonderen axonometrischen Projektionsarten.

Frage 81. Welche besonderen axonometrischen Projektionsarten erhält man, wenn die Grössen m, n, p, α, β, γ, ξ, η, ζ spezielle Werte annehmen?

Antwort. Man kann zwischen den Verhältniszahlen m, n und p folgende Vereinbarungen treffen:

1. die drei Grössen m, n und p sind von einander verschieden;
2. zwei derselben, z. B. m und p sind einander gleich;
3. alle drei sind von gleicher Grösse.

Im ersten Falle sind unter den in Gleichung 116) ausgedrückten Beschränkungen für m, n und p beliebige Werte denkbar. Die hiedurch bedingte axonometrische Projektion heisst dann eine trimetrische Projektion, siehe Erkl. 130.

Im zweiten Falle, in welchem zwei der Grössen, in der Regel m und p gleich sind, ist die dritte Grösse n bestimmt, sobald man m oder p gewählt hat; die so entstehende axonometrische Projektion heisst eine dimetrische — oder auch monodimetrische — Projektion, s. Erkl. 131.

Sind endlich die drei Verhältniszahlen von gleicher Grösse, so entsteht die isometrische Projektion, s. Erkl. 132. Es sind aber auch unter den Winkelgrössen α, β und γ spezielle Werte denkbar, insbesondere kann einer dieser Winkel gleich Null oder ein Rechter sein. Im ersten Falle läuft die bezügliche Achse parallel zur Bildebene, die Ebene der beiden anderen Achsen steht demnach senkrecht zur Bildebene.

Ist etwa $\gamma = 0$, so ist $p = 1$. Für die Winkel des Achsenkreuzes erhält man:

$$\xi = 90^0; \quad \eta = 90^0; \quad \zeta = 180^0$$

Die so entstehende axonometrische Projektion heisst eine Ueber-Eck-Projektion.

Erkl. 130. Die Bezeichnung „trimetrisch“ stammt aus dem Griechischen, tris, dreimal, und metron das Mass.

Erkl. 131. Die Bezeichnung „dimetrisch“ stammt gleichfalls aus dem Griechischen, dis, zweimal, und metron das Mass.

Erkl. 132. Die Bezeichnung „isometrisch“ stammt ebenfalls aus dem Griechischen, isos, gleich, metron das Mass.

Ist endlich einer der Winkel α, β oder γ ein Rechter, so steht die bezügliche Achse senkrecht zur Bildebene, die Ebene der übrigen beiden Achsen fällt in die Bildebene. Man erhält die gewöhnliche rechtwinklige Parallelprojektion und zwar einen Aufriss, für $\beta = 90^0$, die Bildebene ist die vertikale **Pr. Eb.** E_2, einen Grundriss, für $\gamma = 90^0$, die Bildebene ist die horizontale **Pr. Eb.** E_2, endlich einen Seitenriss, für $\alpha = 90^0$, die Bildebene ist die dritte zur horizontalen und vertikalen **Pr. Eb.** senkrecht stehende **Pr. Eb.** E_3.

Als eigentliche axonometrische Projektionen kann man daher unterscheiden:

1. die trimetrische Projektion, m, n und p verschieden,
2. die dimetrische Projektion, $m = p$, oder $n = p$, oder $m = n$,
3. die isometrische Projektion, $m = n = p$,
4. die Ueber-Eck-Projektion, $m = 1$, oder $n = 1$, oder $p = 1$.

---

b) Die trimetrische Projektion.

Frage 82. Welche Werte besitzen die Verhältniszahlen m, n, p bei den gebräuchlichsten trimetrischen Projektionen?

Erkl. 133. Die in Antwort der Frage 82 angeführte Tabelle macht keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern es sind in derselben nur einige der gebräuchlichsten Werte von m, n und p enthalten. Es lassen sich natürlich noch eine ganze Reihe von anderen ebenfalls brauchbaren Werten aufstellen, wenn man nur die in Gl. 116) enthaltene Beschränkung hinsichtlich der Grössen m, n und p beachtet.

Antwort. Da die drei Grössen m, n und p von einander verschieden sind, so hat man bei ihrer Wahl nur darauf zu achten, dass $m^2 + n^2 > p^2$, $m^2 + p^2 > n^2$ und $n^2 + p^2 > m^2$ ist. Am häufigsten benützt werden die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten Werte, siehe Erkl. 133:

m	5	8	**9**	9	17	31	49
n	4	5	**5**	6	6	8	10
p	6	9	**10**	10	18	32	50

Am allergebräuchlichsten ist jedoch die Projektion, für welche:

$$m : n : p = 9 : 5 : 10$$

angenommen ist.

Frage 83. Welche besonderen Werte für die Winkel α, β γ, ξ, η, ζ, sowie für die Seiten des Spurendreieckes erhält man für die in Antwort der Frage 82) zuletzt genannte axonome-

Antwort. Setzt man in den Gleich. 112) für m, n und p die gegebenen Zahlenwerte 9, 5 und 10 ein, so erhält man:

trische Projektion, für welche $m:n:p = 9:5:10$ ist?

Erkl. 134. Ersetzt man die Winkel ξ und η durch die Winkel δ und ε, welche eine Senkrechte zur Z-Achse mit den Achsen Y_0 und X_0 einschliesst, so ist:

$$\delta = \xi - 90^0 = 17^0\,48'\,53'$$

und

$$\varepsilon = \eta - 90^0 = 5^0\,10'\,45''$$

Für die trigonometrischen Tangenten dieser Winkel ergeben sich die Werte:

$$\operatorname{tg}\delta = 0{,}3213 \text{ oder angenähert } = \frac{1}{3}$$

und

$$\operatorname{tg}\varepsilon = 0{,}0906 \text{ oder angenähert } = \frac{1}{11}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{162}{206};\ \cos\alpha = 0{,}8868;\ \alpha = 27^0\,31'\,36''$$

$$\cos^2\beta = \frac{50}{206};\ \cos\beta = 0{,}4927;\ \beta = 60^0\,29'\,3''$$

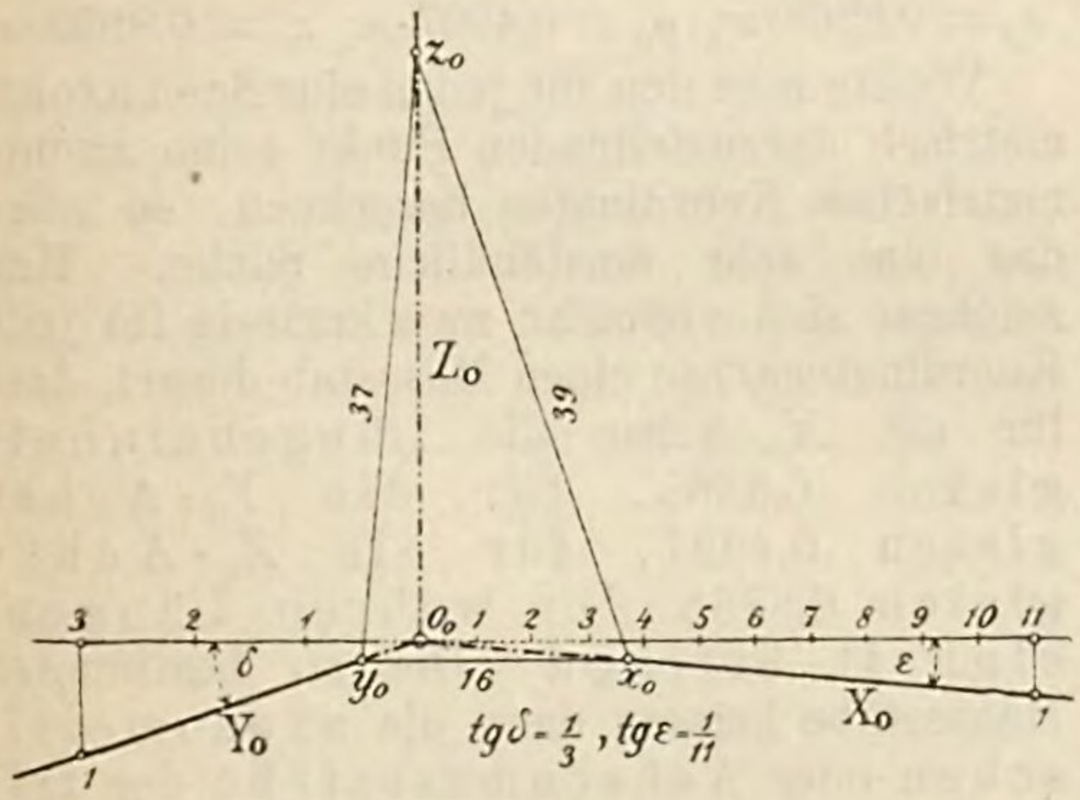
$$\cos^2\gamma = \frac{200}{206};\ \cos\gamma = 0{,}9853;\ \gamma = 9^0\,49'\,35''$$

$$\cos\xi = 0{,}306;\quad \xi = 107^0\,48'\,53''$$
$$\cos\eta = 0{,}09;\quad \eta = 95^0\,10'\,45''$$
$$\cos\zeta = 0{,}92;\quad \zeta = 157^0\,0'\,22''$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{x_0y_0} &= 256\\ \overline{x_0z_0} &= 624\\ \overline{y_0z_0} &= 604\end{aligned}\right\} \text{ Längeneinheiten.}$$

Frage 84. Welche Konstruktionen folgen für das Achsenkreuz der trimetrischen Projektion 9:5:10 in Rücksicht auf die in Antwort der Frage 82 aufgestellten Werte für die Seitenlängen des Spurendreieckes und in Rücksicht auf die in Erkl. 134) berechneten Werte für die Tangenten der Winkel $\delta = \varepsilon$?

Figur 127.



Antwort. Erste Konstruktion. Man zeichne, siehe Figur 127, ein Dreieck $x_o y_o z_o$, in welchem bezüglich seiner Seitenlängen die folgende Beziehung besteht:

$$\overline{x_0y_0} : \overline{y_0z_0} : \overline{z_0x_0} = 256 : 604 : 624$$
$$= 16 : 37 : 39$$

so bilden dessen Höhen die Achsenbilder der trimetrischen Projektion.

Zweite Konstruktion. Man trage auf einer Horizontalen G, siehe Figur 127, von einem Punkte o_0 aus nach der einen Seite 11, nach der anderen Seite 3 Teile von unter sich gleicher, sonst aber beliebiger Grösse ab, errichte je im Endpunkte der letzten Teilstrecke eine Senkrechte zu G gleich einem Teil, so geben die Verbindungslinien der zweiten Endpunkte dieser Senkrechten mit o_0 die Achsenbilder der trimetrischen Projektion, und zwar gibt jene Gerade, für welche $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{11}$ ist, das Bild X_0 der X-Achse, die andere Gerade, für welche $\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{3}$ ist, das Bild Y_0 der Y-Achse. Das Bild Z_0 der Z-Achse steht senkrecht zu G.

Anmerkung 31. Bei allen Aufgaben, in welchen es sich darum handelt, Körper, wie z. B. Bauwerke oder Teile von solchen, durch Zeichnung axonometrisch darzustellen, sind die in Antwort der Frage 84 gegebenen Konstruktionen des Achsenkreuzes, der allgemeinen in Antwort der Frage 77 behandelten Konstruktion vorzuziehen; denn bei derartigen Körpern treten drei Hauptrichtungen, nämlich Längen-, Breiten- und die Höhenrichtung am vorwiegendsten in die

Erscheinung. Die ersteren beiden Richtungen sind in der Regel horizontal, letztere Richtung ist vertikal. Für den Zeichner ist es aber bequem, die vertikale Richtung parallel zu einer Seite des Reissbrettes zu nehmen und zwar parallel zu jener Seite, längs welcher die Reissschiene geführt wird; die Vertikallinien sind dann leicht mittels der rechtwinkligen Dreiecke zu zeichnen.

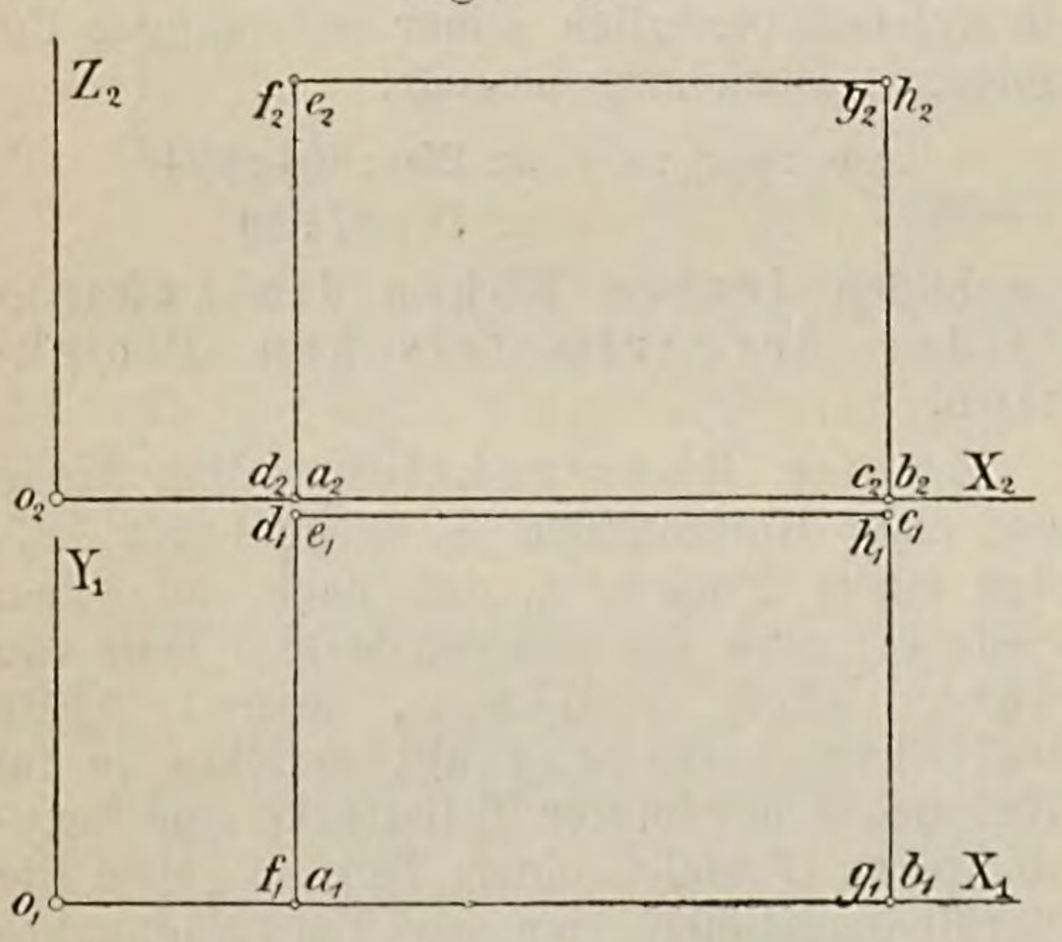
Will man von Bauwerken und dergl. solche axonometrischen Darstellungen entwerfen, die auf den Beschauer einen günstigen Eindruck hervorbringen, so ist es zweckmässig, die Verkürzungen auf den Vertikallinien, d. h. jenen zur Z-Achse parallelen Körperkanten möglichst gering zu wählen. Für eine der horizontalen Richtungen wird dagegen eine, in der Regel die Y-Richtung des Körpers, möglichst grosse Verkürzung angenommen. Man erhält dadurch für alle zur Ebene ZX parallelen Begrenzungsflächen möglichst geringe Abweichungen von der wahren Gestalt, dagegen für alle zur YZ-Ebene parallelen Flächen, möglichst grosse Verzerrungen. Die besten Bilder liefert nun erfahrungsgemäss die trimetrische Projektion mit den Verhältniszahlen 9:5:10.

---

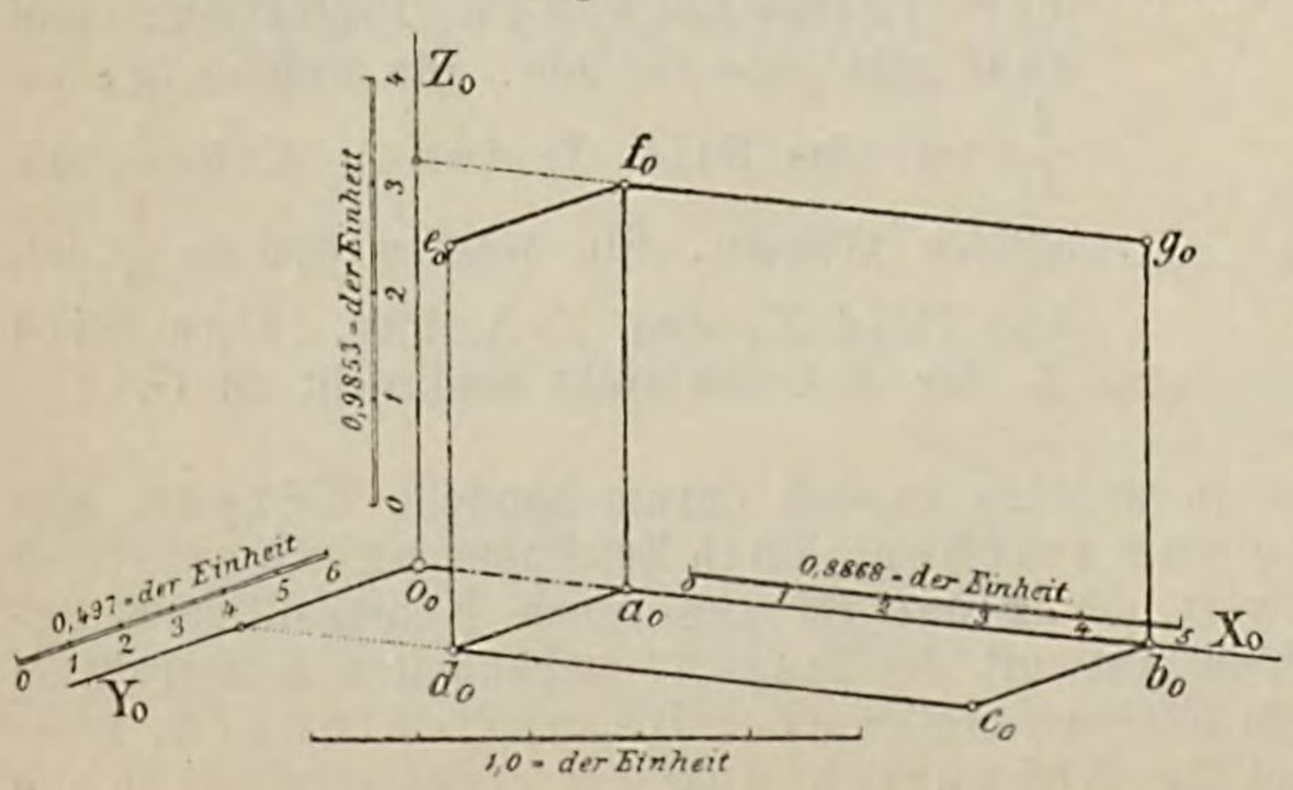
c) Die axonometrischen Massstäbe.

Frage 85. Wie bestimmt man von einem durch Grundriss und Aufriss gegebenen Körper die trimetrische Projektion mit den Verhältniszahlen 9:5:10?

Figur 128.



Figur 129.



Antwort. In Rücksicht auf die in Antwort der Frage 83 entwickelten Werte für:

$\cos\alpha = 0{,}8868$; $\cos\beta = 0{,}4927$; $\cos\gamma = 0{,}9853$

erhält man für einen Punkt mit den Koordinaten x, y, z die axonometrischen Koordinaten:

$x_0 = 0{,}8868 \cdot x$; $y_0 = 0{,}4927 \cdot y$; $z_0 = 0{,}9853 \cdot z$

Wollte man nun für jeden einzelnen axonometrisch darzustellenden Punkt seine axonometrischen Koordinaten berechnen, so wäre das eine sehr umständliche Sache. Man zeichnet sich vielmehr zweckmässig für jede Koordinatenachse einen Massstab derart, dass für die X_0-Achse die Längeneinheit gleich 0,8868, für die Y_0-Achse gleich 0,4927, für die Z_0-Achse gleich 0,9853 der wahren Längeneinheit beträgt. Die so bestimmten Maassstäbe heissen dann die axonometrischen oder Achsenmassstäbe der trimetrischen Projektion. Für eine solche sind somit drei axonometrische oder Achsenmassstäbe erforderlich. Misst man nun im rechtwinkligen Grund- und Aufriss die Koordinaten eines Punktes in wahrer Grösse, so erhält man die entsprechenden axonometrischen Koordinaten mittels der drei Achsenmassstäbe.

In Figur 129 ist auf die oben angegebene Art die axonometrische bezw. trimetrische

Projektion des in Figur 128 durch Grund- und Aufriss gegebenen Parallelepipedes dargestellt. Es ist demnach:

$$\overline{o_0 a_0} = 0{,}8868 \cdot \overline{o_1 a_1}\,; \quad \overline{a_0 b_0} = 0{,}8868 \cdot \overline{a_1 b_1}$$

$$\overline{a_0 d_0} = \overline{b_0 c_0} = 0{,}4927 \cdot \overline{a_1 d_1}$$

und

$$\overline{a_0 f_0} = 0{,}9853 \cdot \overline{a_2 f_2}$$

---

d) Die hypothetische Vergrösserung einer axonometrischen Projektion.

Frage 86. Was versteht man unter der hypotetischen Vergrösserung einer axonometrischen Projektion?

Antwort. Bei einer trimetrischen Projektion sind nach dem Vorangegangenen drei von einander verschiedene Massstäbe erforderlich. Für praktische Zwecke ist es wünschenswert, diese Anzahl zu vermindern. Man erreicht dies dadurch, dass man die Z-Koordinaten im axonometrischen Bilde in wahrer Grösse aufträgt also im Verhältnis $\frac{1}{\cos\gamma}$ vergrössert. Soll das Verhältnis zwischen den axonometrischen Koordinaten eines Punktes unverändert bleiben, so müssen auch die X- und Y-Koordinaten dementsprechend vergrössert werden. Man erhält auf diese Weise nicht die eigentliche axonometrische Projektion eines Körpers, sondern eine im Verhältnis $\frac{1}{\cos\gamma}$ vergrösserte Darstellung, welche der eigentlichen axonometrischen Projektion ähnlich ist. Für die trimetrische Projektion mit den Verhältniszahlen $9 : 5 : 10$ sind dann die Z-Koordinaten in wahrer Grösse, die Y-Koordinaten in halber Grösse, die X-Koordinaten dagegen in $\frac{9}{10}$ der wahren Grösse aufzutragen.

Die erzielte Vergrösserung des axonometrischen Bildes nennt man die hypotetische Vergrösssserung derselben. Der Zweck der Darstellung, ein anschauliches Bild des Körpers zu geben, wird, weil das vergrösserte Bild dem wirklichen Bilde ähnlich ist, durch die Vergrösserung nicht vereitelt, vielmehr in bequemerer Weise wie früher erreicht, weil nur noch zwei von einander verschiedene Massstäbe erforderlich sind, für welche die Einheiten nunmehr gleich der Hälfte bezw. gleich $\frac{9}{10}$ der wirklichen Einheit betragen.

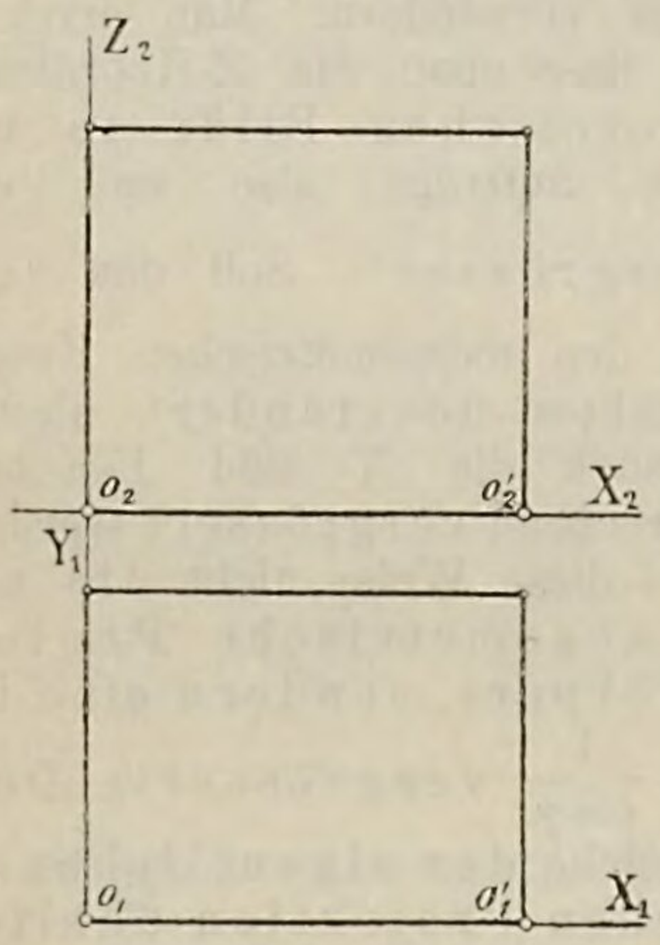
Ein auf die im Vorstehenden beschriebene Art konstruiertes axonometrisches Bild gibt unmittelbar die wahren Ausmessungen des dargestellten Körpers nach den Richtungen der drei Koordinatenachsen an; denn man hat ja die Z-Koordinaten direkt in wahrer Grösse und braucht die Y- bezw. X-Koordinate nur um 5- bezw. $\frac{1}{10}$ ihrer Länge zu vergrössern.

---

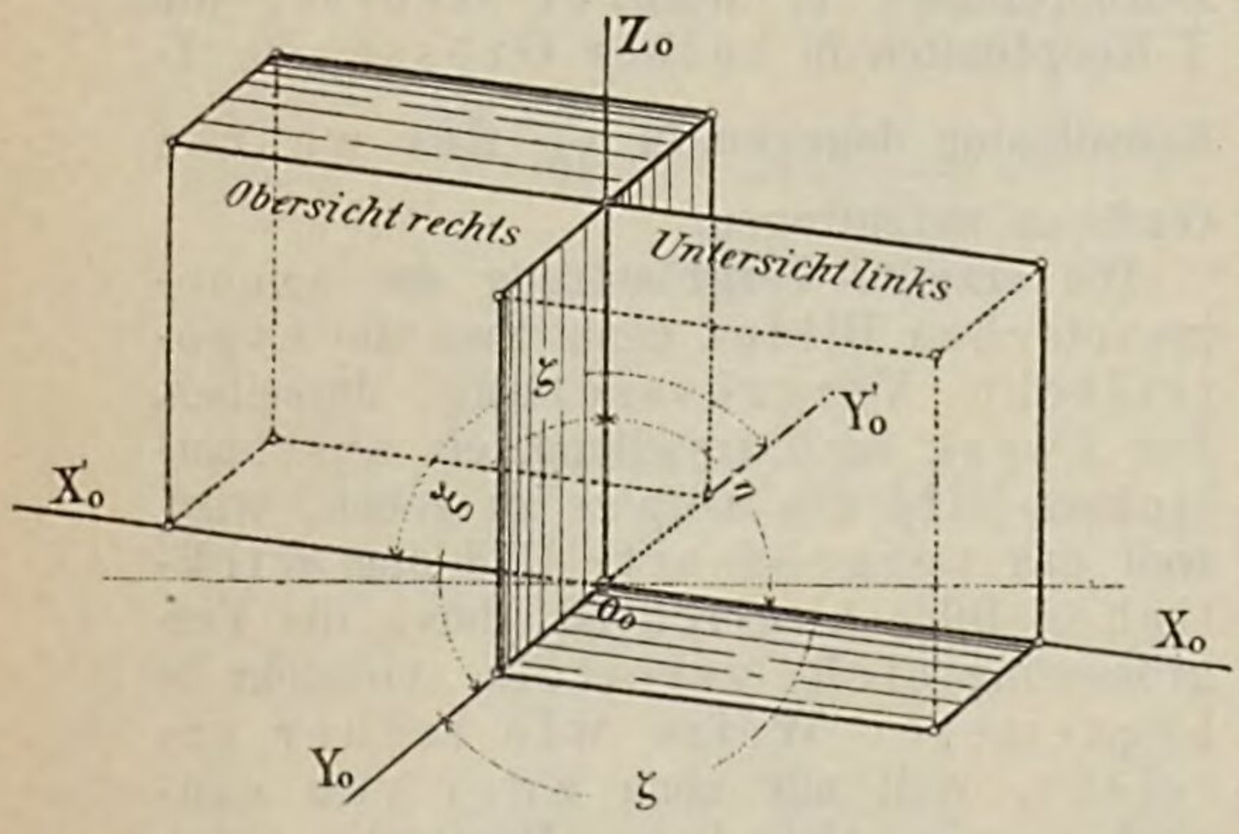
e) Die verschiedenen axonometrischen Ansichten.

Frage 87. Was versteht man unter den verschiedenen axonometrischen Ansichten eines Körpers?

Figur 130.



Figur 131.

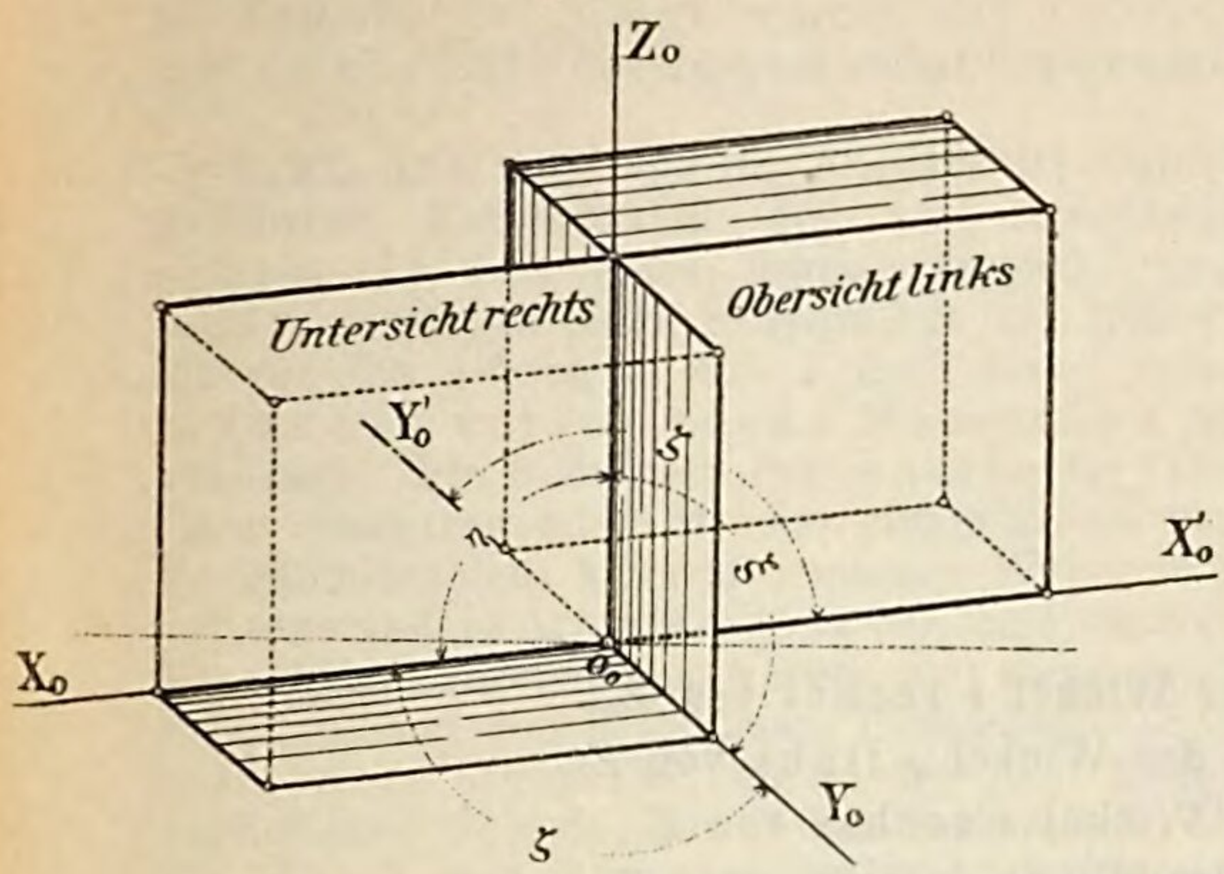


Antwort. Sind von einer axonometrischen Projektion die drei Verhältniszahlen m, n und p gegeben und ermittelt man hieraus die Winkel ξ, η und ζ des Achsenkreuzes, so lassen sich diese Winkel in zweifacher Weise, siehe Figur 131 und 132, zu einem Achsenkreuz aneinanderreihen. Im ersten Falle liegt der Winkel η rechts, im zweiten Falle links von Z. Entsprechen nun den Achsen X_0, Y_0 und Z_0 die Kantenrichtungen X, Y und Z eines rechtwinkligen Parallelepipedes, siehe Figur 130, so entspricht dem Punkte o_0, s. Figur 131, der Punkt o in Figur 130, dem Punkte o_0 in Figur 132, dagegen der Punkt o' in Figur 130, d. h. im ersten Falle die vordere untere linke, im zweiten Falle die vordere untere rechte Ecke des Parallelepipedes. In beiden Fällen erhält man in der axonometrischen Darstellung eine untere Ansicht des Körpers, d. h. dessen untere Fläche ist dem Beschauer sichtbar. Im ersten Falle ist die vordere untere linke Ecke, im zweiten Falle die vordere untere rechte Ecke des Körpers dem Auge des Beschauers zunächst gelegen. Man nennt daher aus diesem Grunde die eine Darstellung eine Untersicht links, die andere eine Untersicht rechts.

Aus den beiden Achsenkreuzen, siehe Figur 131 und 132 gewinnt man aber durch Verlängerung der Achsen X_0, Y_0 und Z_0 über o_0 hinaus noch zwei weitere Achsenkreuze, siehe Figur 131 und 132. In diesen entsprechen dem Punkte o_0 bezw. die Punkte o' und o in Figur 130, d. h. wieder die beiden vorderen unteren Ecken und zwar im ersten Falle die vordere untere rechte, im zweiten Falle die vordere untere linke Ecke des Körpers.

In beiden Fällen erhält man in der axonometrischen Darstellung eine obere Ansicht

Figur 132.



des Körpers, d. h. dessen obere Fläche ist dem Beschauer sichtbar.

Im Falle der Figur 131 ist die vordere obere rechte, im anderen Falle die vordere obere linke Ecke dem Beschauer zunächst gelegen.

Man nennt die erste Darstellung eine Obersicht rechts, die zweite eine Obersicht links.

Kurz zusammengefasst kann man folgenden Satz aussprechen:

„Den Verhältniszahlen m, n und p einer axonometrischen Projektion entsprechen vier Achsenkreuze, je nachdem man den Winkel η und die X_0-Achse rechts oder links von Z_0 legt und diese letztere Achse in den Winkelraum von ζ fällt oder nicht."

„Fällt die Achse Z_0 nicht in den Winkelraum von ζ, so erhält man Untersichten."

„Fällt die Achse Z_0 in den Winkelraum von ζ, so erhält man Obersichten."

Man kann folgende Fälle unterscheiden:

Z_0 fällt nicht in den Winkelraum von ζ {
- η und X_0 liegen rechts von Z_0, die entstehende Projektion gibt eine Untersicht links,
- η und X_0 liegen links von Z_0, die entstehende Projektion gibt eine Untersicht rechts.

}

Z_0 fällt in den Winkelraum von ζ {
- η liegt links, X_0' aber rechts von Z_0, die entstehende Projektion gibt eine Obersicht links.
- η liegt rechts, X_0' aber links von Z_0, die entstehende Projektion gibt eine Obersicht rechts.

}

Erkl. 135. Will man vornherein eine bestimmte Ansicht von einem Körper darstellen, so ist entsprechend den Angaben der Antwort der Frage 87 das zugehörige Achsenkreuz zu konstruieren. Benützt man nun zur Konstruktion des Achsenkreuzes das Verkürzungsdreieck, siehe Erkl. 125, so erhält man die möglichen Achsenkreuze, indem man über der Seite p^2 die beiden möglichen auf der nämlichen Seite liegenden Verkürzungsdreiecke zeichnet und in denselben die Halbierungslinien der Winkel zieht:

Bei Untersicht links liegt die Seite n^2 links von m^2 und die Achsen sind die über ihren Schnittpunkt hinaus verlängerten Halbierungslinien.

Bei Untersicht rechts liegt die Seite n^2 rechts von m^2 und die Achsen sind die über ihren Schnittpunkt hinaus verlängerten Halbierungslinien.

Bei Obersicht links liegt die Seite n^2 rechts von m^2 und die Achsen sind die Halbierungslinien selbst.

Bei Obersicht rechts liegt die Seite n^2 links von m^2 und die Achsen sind die Halbierungslinien selbst.

Benützt man aber die in Antwort der Frage 84 durchgeführten Konstruktionsverfahren, so verfährt man bei der Konstruktion des Spurendreieckes in gleicher Weise wie bei dem Verkürzungsdreieck und erhält in den Höhen bezw. deren Verlängerungen die Achsenbilder des Achsenkreuzes. Bei Anwendung des zweiten Verfahrens hat man bei den Untersichten die Winkel δ und ε nach unten, bei den Obersichten aber nach oben anzutragen und zwar liegt:

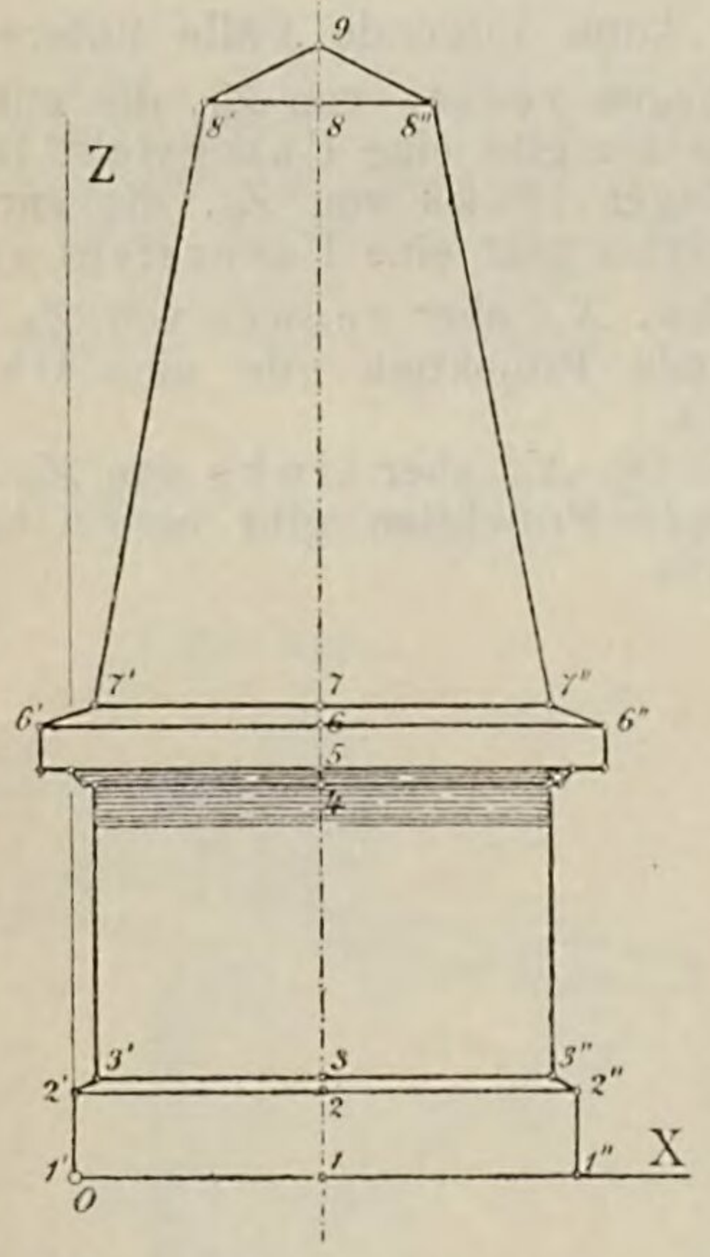
bei Untersicht links der Winkel δ links, der Winkel ε rechts von Z_0,
„ Untersicht rechts der Winkel δ rechts, der Winkel ε links von Z_0,
„ Obersicht links der Winkel δ links, der Winkel ε rechts von Z_0,
„ Obersicht rechts der Winkel δ rechts, der Winkel ε links von Z_0.

---

f) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 81. Der in Figur 133 im Aufriss dargestellte Körper ist trimetrisch, 9:5:10, in Obersicht links darzustellen.

Figur 133.



Erkl. 136. Der in Auflösung der Aufgabe 81 geschilderten Methode der Entwicklung des axonometrischen Bildes aus Aufriss und und Grundriss liegt die Benützung des sogenannten mittleren Querschnittes bezw. Profiles zu Grunde, worunter man einen parallel zu einer der Ebenen XZ und YZ geführten die Körperachse enthaltenden Schnitt versteht, dessen axonometrisches Bild zunächst konstruiert wird und aus welchem man mittels

Auflösung. Ein Grundriss der Figur ist nicht erforderlich, weil die Breitenausdehnungen des Körpers den entsprechenden Längenausdehnungen gleich sein sollen.

Wählt man nun das Achsenkreuz, so wie in Figur 134 und lässt dem Punkte o_0 den Punkt o in Figur 133 entsprechen, so wird man wohl am bequemsten zum axonometrischen Bilde des Körpers gelangen, wenn man sich zunächst das axonometrische Bild der vertikalen Mittelachse verschafft (mittels der Koordinaten $x = \overline{01}$, $y = \overline{01}$, s. Figur 133, daher in Figur 134 $x_0 = \overline{1_0' 1_0} = \frac{9}{10} x$, $y_0 = \frac{1}{2} y = \overline{0_0 1_0'}$) hierauf die Punkte 1_0, 2_0, $3_0 \cdots 9_0$ entsprechend den Punkten 1, 2, $3 \cdots 9$, siehe Figur 133, ermittelt, durch diese Punkte die Parallelen durch X_0 zieht und darauf die Punkte $1_0'$, $1_0''$, $2_0'$, $2_0'' \cdots$ entsprechend den Punkten $1'$, $1''$, $2'$, $2'' \cdots$ der Figur 133, bestimmt:

$$\left(\overline{1_0' 1_0''} = \frac{9}{10} \overline{1' 1''},\ \overline{6_0' 6_0''} = \frac{9}{10} \overline{6' 6''} \cdots\right)$$

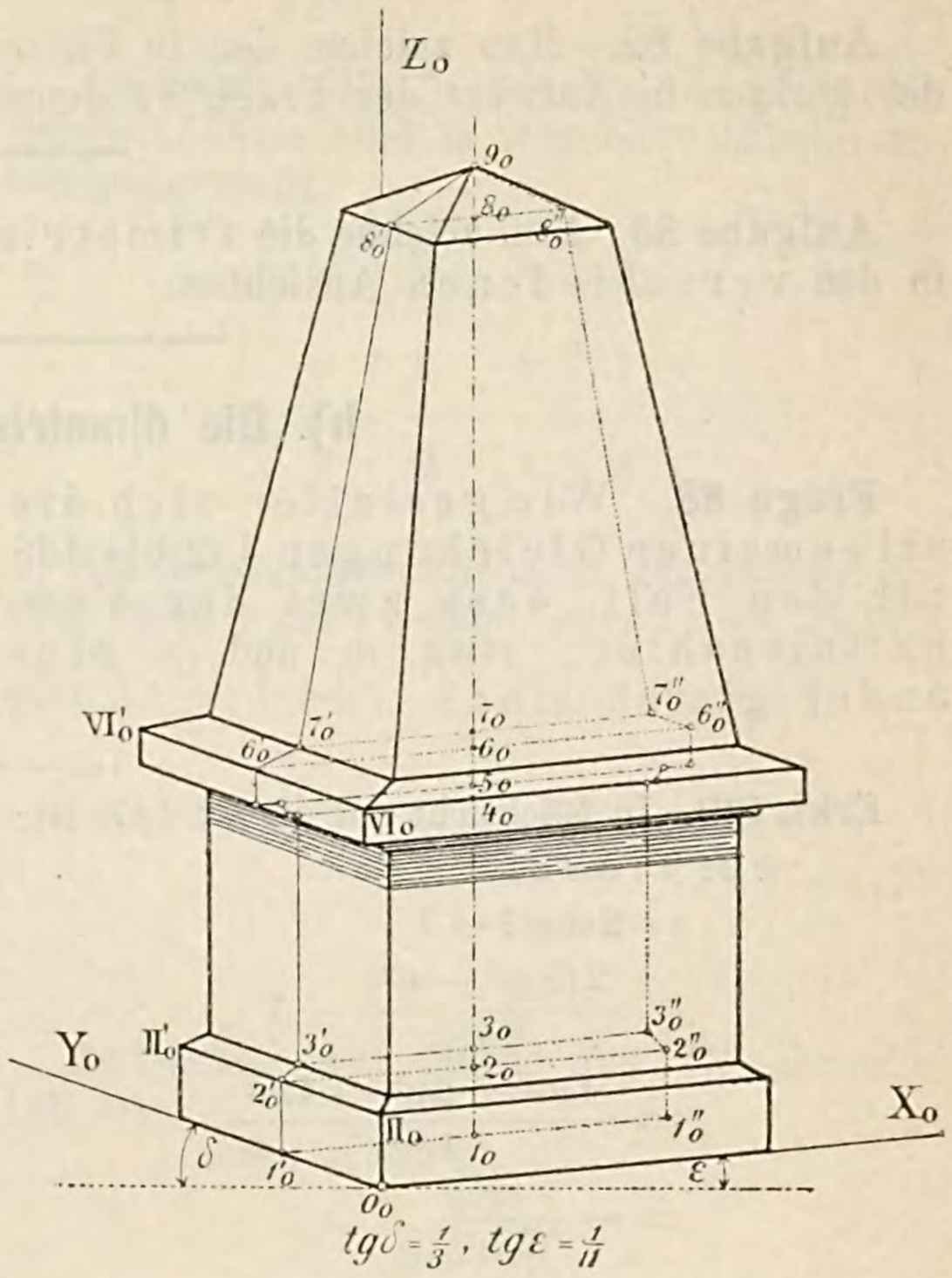
Durch die so sich ergebenden Punkte sind schliesslich noch die Parallelen zu Y_0 zu zeichnen und darauf nach beiden Seiten die halben bezüglichen Körperbreiten abzutragen (z. B. $\overline{2_0' \mathrm{II}_0} = \overline{2_0' \mathrm{II}_0'} = \frac{1}{2} \overline{22'}$, s. Fig. 133, $\overline{6_0' \mathrm{VI}_0} = \overline{6_0' \mathrm{VI}_0'} = \frac{1}{2} \overline{66'}$, siehe Figur 133.

der noch übrigen dritten Koordinaten, so wie in Aufgabe 81 gezeigt wurde, das axonometrische Bild des Körpers selbst konstruiert.

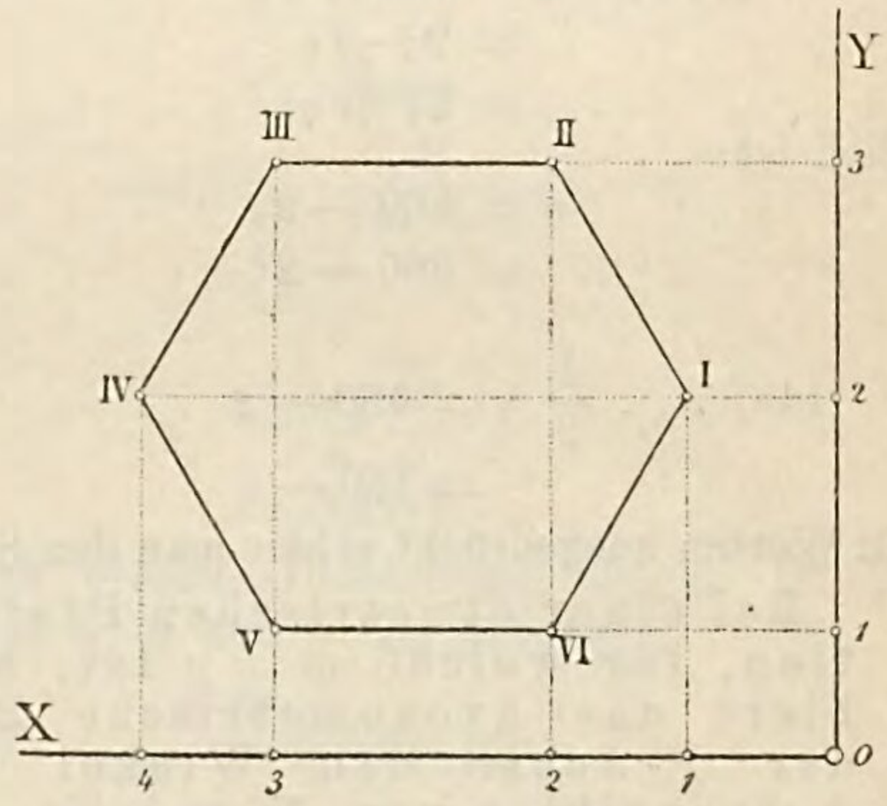
Erkl. 137. Bei der in Aufgabe 81 durchgeführten Konstruktion des axonometrischen Bildes eines durch Grund- und Aufriss dargestellten Körpers hat man immerhin für die Achsen X und Y noch zwei voneinander verschiedene Massstäbe zu benützen. Die Reduktion der wahren Grösse einer aufzutragenden Strecke entsprechend den Verhältniszahlen, kann in bequemer Weise noch auf eine andere Art, als mittels der angewandten Massstäbe vorgenommen werden und zwar durch Konstruktion von besonderen Hilfsachsen. Soll z. B., siehe Figur 136, ein in der XY-Ebene befindliches Gebilde, etwa das Sechseck I, II, III, IV, V und VI trimetrisch dargestellt werden, so kann man wie folgt verfahren. Man trage, siehe Figur 136, auf der Achse X_0 die Strecken $\overline{o_0 b_0}$ und $\overline{o_0 a_0} = 10$ bezw. 9 Einheiten auf, beschreibe um o_0 als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $\overline{o_0 b_0}$ einen Kreis, welcher von der Parallelen $a_0 \mathfrak{a}_0$ durch a_0 zu Y_0 in $\mathfrak{a}_0$ getroffen wird, so gibt die Verbindungslinie $o_0 \mathfrak{a}_0$ eine Hilfsachse $\mathfrak{X}_0$ von der Beschaffenheit, dass, wenn man auf ihr die wahren Längen von Strecken aufträgt und durch deren Endpunkte Parallele zu Y_0 zeichnet, hierdurch auf Y_0 die axonometrischen Bilder dieser Strecken abgeschnitten werden. In gleicher Weise lässt sich auch eine Hilfsachse $\mathfrak{Y}_0$ konstruieren, wenn man $\overline{o_0 d_0} = 2$, $\overline{o_0 c_0} = 1$ auf Y_0 abträgt, den Kreis um o_0 durch d_0 zieht und ihn mit der Parallelen durch c_0 zu X_0 in $\mathfrak{b}_0$ durchschneidet, die Linie $o_0 \mathfrak{b}_0$ gibt die Hilfsachse $\mathfrak{Y}_0$. Nunmehr überträgt man die X- und Y-Koordinaten der Sechseckspunkte I bis VI aus Figur 135 in wahrer Grösse auf die Achsen $\mathfrak{X}_0$ und $\mathfrak{Y}_0$, so liefern die Parallelen durch die Punkte 1, 2, 3, 4 auf $\mathfrak{X}_0$, bezw. 1, 2, 3, auf $\mathfrak{Y}_0$ zu den Achsen Y_0 und X_0 die axonometrischen Bilder I_0 bis VI_0 der Sechseckspunkte I bis VI.

Erkl. 138. Mittels des in Erkl. 137 angewandten Verfahrens erhält man, wie ersichtlich, das axonometrische Bild eines Gegenstandes, mit Benützung nur eines Massstabes. Selbstverständlich ist dieses Verfahren auch für die dimetrische Projektion benützbar.

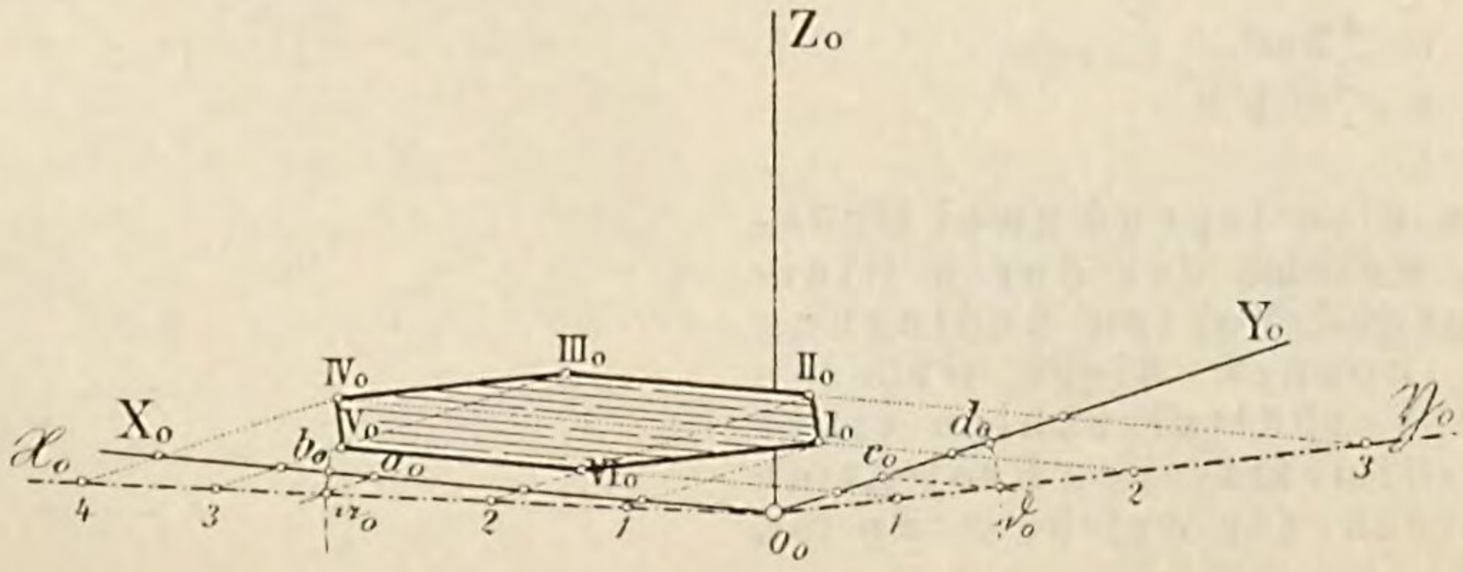
Figur 134.



Figur 135.



Figur 136.



g) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 82. Man zeichne den in Figur 133 im Aufriss dargestellten Körper in einer der übrigen in Antwort der Frage 87 genannten Ansichten, z. B. Untersicht rechts.

Aufgabe 83. Man zeichne die trimetrischen Bilder der regelmässigen Polyeder in den verschiedenen Ansichten.

---

h) Die dimetrische Projektion.

Frage 88. Wie gestalten sich die allgemeinen Gleichungen 132 bis 138 für den Fall, dass zwei der Verhältniszahlen, etwa m und p einander gleich sind?

Erkl. 139. In Rücksicht auf die Gl. 147) ist:

$$\begin{aligned}\cos 2\xi &= \cos 2\zeta \\ &= 2\cos^2\xi - 1 \\ &= \frac{2(2m^2 - n^2)}{2m^2} - 1 \\ &= \frac{4m^2 - 2n^2 - 4m^2}{4m^2} \\ &= -\frac{n^2}{2m^2} \\ &= \cos\eta\end{aligned}$$

Nun ist aber auch:

$$\begin{aligned}\xi + \eta + \zeta &= 360^0 \\ &= 2\xi + \eta \\ &= 2\zeta + \eta\end{aligned}$$

folglich ist:

$$\begin{aligned}\eta &= 360 - 2\xi \\ &= 360 - 2\zeta\end{aligned}$$

und

$$148) \ldots \frac{1}{2}\eta = 180 - \xi = 180 - \zeta$$

In Worten ausgedrückt erhält man den Satz:

„Bei einer dimetrischen Projektion, für welche $m = p$ ist, halbiert das axonometrische Bild der Y-Achse den Winkel der Achsenbilder von X und Z."

Erkl. 140. Aus den Gleichungen 116) entnimmt man, dass:

$$\begin{aligned}n &< 2m^2 \\ 149) \ldots \quad n &< m\sqrt{2}\end{aligned}$$

sein muss.

Wählt man also irgend zwei Grössen n und m, welche der durch Gleichung 149) ausgedrückten Bedingung genügen, so können diese Grössen stets als die Verhältniszahlen einer rechtwinklig-dimetrischen Projektion genommen werden, für welche $m = p$ ist.

Antwort. Unter der Voraussetzung, dass $m = p$ ist, hat man:

$$144) \ldots \begin{cases} \sin^2\alpha = \sin^2\gamma \\ \qquad = \dfrac{n^2}{2m^2 + n^2} \\ \sin^2\beta = \dfrac{2m^2 - n^2}{2m^2 + n^2} \end{cases}$$

$$145) \ldots \begin{cases} \cos^2\alpha = \cos^2\gamma \\ \qquad = \dfrac{2m^2}{2m^2 + n^2} \\ \cos^2\beta = \dfrac{2n^2}{2m^2 + n^2} \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 144) und 145) folgen aber die weiteren:

$$146) \ldots \begin{cases} \operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\gamma \\ \qquad = \dfrac{n^2}{2m^2} \\ \operatorname{tg}^2\beta = \dfrac{2m^2 - n^2}{2n^2} \end{cases}$$

Nunmehr hat man aber auch:

$$147) \ldots \begin{cases} \cos\eta = -\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma \\ \qquad = -\operatorname{tg}^2\alpha \\ \qquad = \dfrac{-n^2}{2m^2} \\ \cos\xi = \cos\zeta \\ \qquad = -\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \\ \qquad = -\sqrt{\dfrac{2m^2 - n^2}{4m^2}} \\ \qquad = -\dfrac{1}{2m}\sqrt{2m^2 - n^2} \end{cases}$$

Frage 89. Welche Werte besitzen die Verhältniszahlen m, n und p bei den gebräuchlichsten dimetrischen Projektionen?

Antwort. Die in der Praxis gebräuchlichsten Werte sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

m	**2**	3	4
n	**1**	1	1
p	**2**	3	4

Am allergebräuchlichsten ist jedoch die Projektion, für welche $m:n:p = 2:1:2$ oder $1:\frac{1}{2}:1$ ist.

Frage 90. Welche besonderen Werte erhält man für die Winkel α, β, γ, ξ, η und ζ, sowie für die Seiten des Spurendreieckes bei der am häufigsten angewandten dimetrischen Projektion mit den Verhältniszahlen $m:n:p = 2:1:2$?

Antwort. Auf Grund der Gleichungen 145 ist:

$$\cos^2\alpha = \cos^2\gamma = \frac{2\cdot 4}{2\cdot 4+1} = \frac{8}{9} = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}9428$$

$$\cos^2\beta = \frac{2}{2\cdot 4+1} = \frac{2}{9} = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0{,}4714$$

Aus diesen Gleichungen folgen für die Winkel α, β und γ die Werte:

$$\alpha = \gamma = 29^0\,28'\,16''$$

und

$$\beta = 71^0\,52'\,28''$$

Für die Achsenwinkel ξ, η und ζ findet man:

$$\cos\eta = -\frac{1}{2\cdot 4} = -\frac{1}{8} = -0{,}125$$

$$\cos\xi = \cos\zeta = \frac{\sqrt{8-1}}{7} = \frac{1}{8}\sqrt{7} = 0{,}311$$

Erkl. 141. Führt man statt der Winkel ξ und η die Winkel δ und ε ein, siehe Erkl. 134, so erhält man:

$$\delta = \xi - 90^0 = 7^0\,10'\,51''$$

$$\varepsilon = \eta - 90^0 = 41^0\,24'\,35''$$

Die trigonometrischen Tangenten dieser Winkel besitzen die Werte:

$$\operatorname{tg}\delta = 0{\cdot}1259 \text{ oder angenähert } = \frac{1}{8}$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = 0{\cdot}881 \quad „ \quad „ \quad = \frac{7}{8}$$

Aus diesen Gleichungen folgen für die Winkel ξ, η und ζ die Werte:

$$\eta = 97^0\,10'\,51''$$
$$\xi = \zeta$$
$$= 131^0\,24'\,35''$$

Für die Seiten des Spurendreieckes erhält man in Rücksicht auf die Gleichungen 143) die Werte:

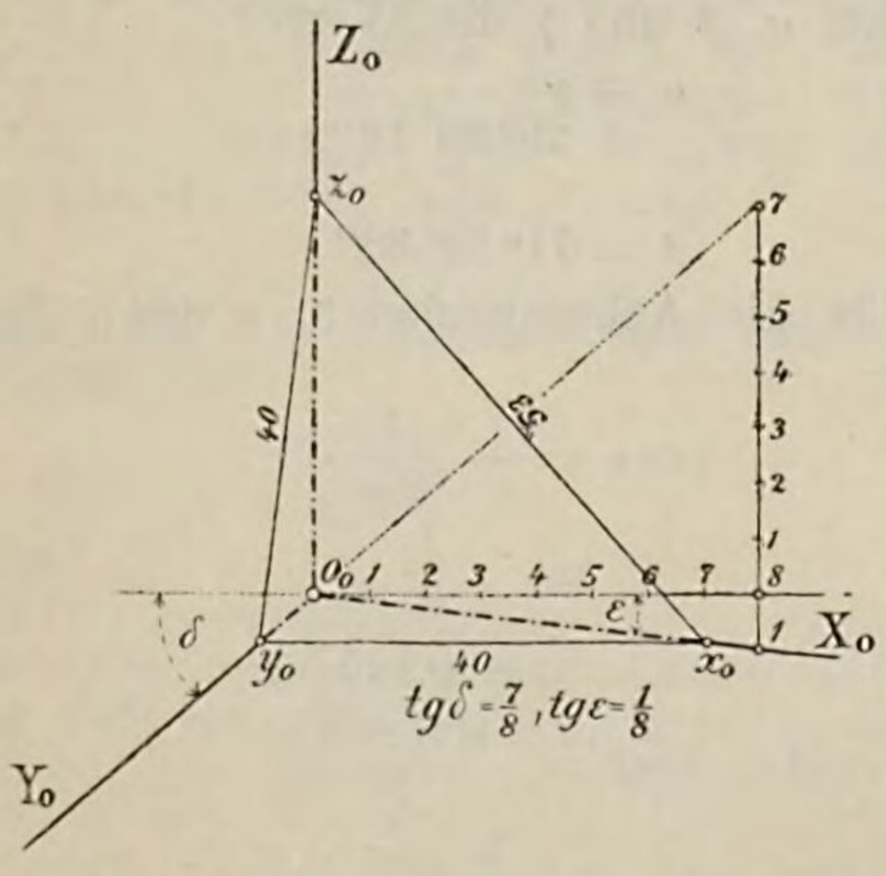
$$\overline{y_0 z_0} = \overline{x_0 y_0}$$
$$= \sqrt{\frac{2\cdot 4\,(4+1+4)}{-1+2\cdot 4\cdot 1}}$$
$$= \sqrt{\frac{8\cdot 9}{7}}$$
$$= \frac{6}{7}\sqrt{14}$$
$$= 3{,}20$$
$$x_0 z_0 = \sqrt{\frac{2\cdot 9}{1}}$$
$$= 3\sqrt{2}$$
$$= 4{,}24$$

Die Seiten des Spurendreieckes $x_0 y_0 z_0$ verhalten sich also wie:

$$x_0 y_0 : y_0 z_0 : x_0 z_0 = 320 : 320 : 424$$
$$= 40 : 40 : 53$$

Frage 91. Welche Konstruktionen folgen für das Achsenkreuz der dimetrischen Projektion $2:1:2$ oder $1:\frac{1}{2}:1$ in Rücksicht auf die in Antwort der Frage 89 aufgestellten Werte für die Seiten des Spurendreieckes und in Rücksicht auf die in Erkl. 140 berechneten Werte für die Tangenten der Winkel δ und ε?

Figur 137.



Antwort. Erste Konstruktion. Man zeichne, siehe Fig. 137, ein gleichschenkliges Dreieck mit einer Grundlinie $= 53$ und einer Schenkellänge $= 40$ Längeneinheiten (z. B. Millimeter). Die Höhen dieses Dreieckes geben die Achsenbilder der dimetrischen Projektion und zwar gehören zu den Schenkeln als Höhen die Achsenbilder X_0 und Z_0. Die zur Grundlinie gehörige Höhe gibt das Achsenbild Y_0.

Zweite Konstruktion. Man trage auf einer Horizontalen G, siehe Figur 137, von einem Punkte 0_0 aus nach einer Seite hin 8 gleiche Teile; durch den letzten Teilpunkt 8 ziehe man eine Senkrechte zu G und trage auf derselben nach der einen Seite 7 Teile, nach der anderen Seite 1 Teil ab.

Die Verbindungslinie 70_0 gibt die Y_0-Achse, die Verbindungslinie $0_0 1$ die X_0-Achse. Die Z_0-Achse steht senkrecht zu G.

Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung muss die Y_0-Achse den Winkel von X_0 und Z_0 halbieren.

Frage 92. Wie bestimmt man von einem durch Grund- und Aufriss gegebenen Körper eine dimetrische Projektion, z. B. jene mit den Verhältniszahlen $1 : \frac{1}{2} : 1$.

Erkl. 142. Handelt es sich nur um die Herstellung eines Bildes von dem Körpers, so zeichnet man dieses wieder bequemer in hypothetischer Vergrösserung, indem man für die Achsen X_0 und Y_0 die Einheit des Massstabes gleich der wahren Einheit nimmt. Dadurch wird aber die Einheit des Massstabes der Y_0-Achse gleich der Hälfte der wahren Einheit. Die hypothetische Vergrösserung ist bei dieser Darstellung eine $\frac{1}{0{\cdot}9428} = 1{\cdot}0606$ fache, das heisst es werden alle Längen parallel zu den Achsenrichtungen etwa um $\frac{1}{16}$ vergrössert.

Unter dieser Voraussetzung wird aber die Herstellung des axonometrischen Bildes ausserordentlich erleichtert, indem man jetzt die X- und Z-Koordinaten eines Punktes unverkürzt, die Y-Koordinate aber in halber Grösse in die axonometrische Darstellung übertragen kann.

Erkl. 143. Was nun die verschiedenen axonometrischen Ansichten anbetrifft, so bleibt das bei der Besprechung der trimetrischen Projektion, bezüglich der Konstruktion des Achsenkreuzes Gesagte, auch für die dimetrische Projektion in Gültigkeit. Nur für die in Antwort der Frage 90 als zweite Konstruktion gegebene Darstellung vereinfacht sich die Sache noch etwas.

Man hat nämlich für das Auftragen der Teile auf G und der Senkrechten hierzu folgende Uebersicht:

Untersicht links: 8 Teile rechts von Z_0, 1 Teil nach unten, 7 Teile nach oben.
Untersicht rechts: 8 Teile links von Z_0, 1 Teil nach unten, 7 Teile nach oben.
Obersicht links: 8 Teile rechts von Z_0, 1 Teil nach oben, 7 Teile nach unten.
Obersicht rechts: 8 Teile links von Z_0, 1 Teil nach oben, 7 Teile nach unten.

Antwort. Bei jeder dimetrischen Projektion sind zwei axonometrische Massstäbe erforderlich und zwar ein Massstab für die Y_0-Achse und ein solcher für die X_0- und Z_0-Achse. Bei der in Rede stehenden dimetrischen Projektion ist nun die Einheit für den Massstab der X_0- und Z_0-Achse $= 0{,}9428$ der wahren Einheit, für die Y_0-Achse dagegen $= 0{,}4714$ der wahren Einheit.

Will man also irgend einen Körper dimetrisch darstellen, so bezieht man denselben auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz X, Y, Z, bestimmt für jeden Punkt des Körpers seine Koordinaten x, y, z, verkürzt dieselben mittels der axonometrischen Massstäbe und trägt die so verkürzten Koordinaten als axonometrische Koordinaten im Achsenkreuze X_0, Y_0, Z_0 auf.

i) Gelöste Aufgaben.

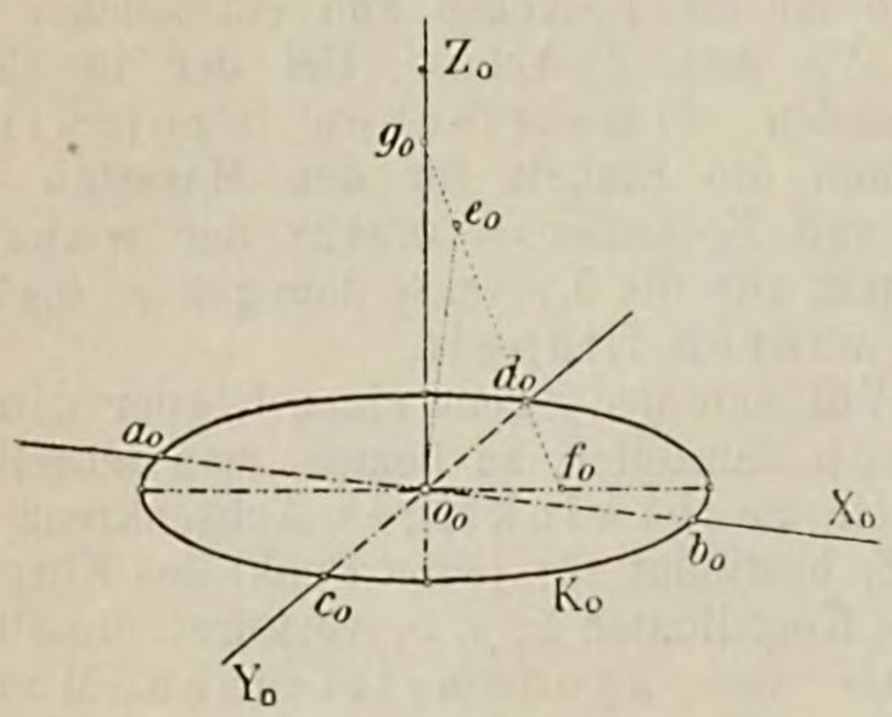
Aufgabe 84. Eine in der XY-Ebene liegende Kreislinie, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt, ist dimetrisch $1 : \frac{1}{2} : 1$ darzustellen.

Auflösung. Zeichnet man das zur Projektion gehörige Achsenkreuz auf eine der im Vorhergehenden angegebenen Arten, so ist der Durchmesser $\overline{a_0 b_0}$ auf der X-Achse gleich dem wahren Kreisdurchmesser, der Durchmesser auf der Y-Achse dagegen gleich der Hälfte des Kreisdurchmessers. Man könnte nun im Kreise eine Anzahl von Sehnen par-

allel zur X- oder Y-Achse zeichnen und diese axonometrisch übertragen, oder aber die Ellipse K_0 direkt aus den conjugierten Durchmessern $\overline{a_0 b_0}$ und $\overline{c_0 d_0}$ konstruieren.

Zweckmässig ist stets, will man ein schönes Bild der Ellipse erhalten, die Hauptachsen zu ermitteln, was bei axonometrischen Darstellungen besonders einfach ist, da ja die eine Achse und zwar die grosse stets senkrecht zur Z-Achse gerichtet ist, die kleine Achse aber mit der Z-Achse zusammenfällt. Man hat also die Lage der Achsen von vornherein gegeben und braucht nur deren Längen zu ermitteln. Wendet man nun die im ersten Bande dieses Lehrbuches S. 79 angegebene Konstruktion an, d. h. zieht man, siehe Figur 138, $o_0 e_0$ senkrecht $a_0 b_0$ und gleich $\overline{o_0 a_0}$ und verbindet d_0 mit e_0, so schneiden diese Linien auf den beiden Achsen die Punkte f_0 und g_0 derart aus, dass $\overline{d_0 f_0} = \overline{e_0 g_0} = \beta$ und $\overline{d_0 g_0} = \overline{e_0 f_0} = \alpha$ ist, wobei α und β die Längen der grossen bezw. kleinen Ellipsenachse bezeichnen.

Figur 138.

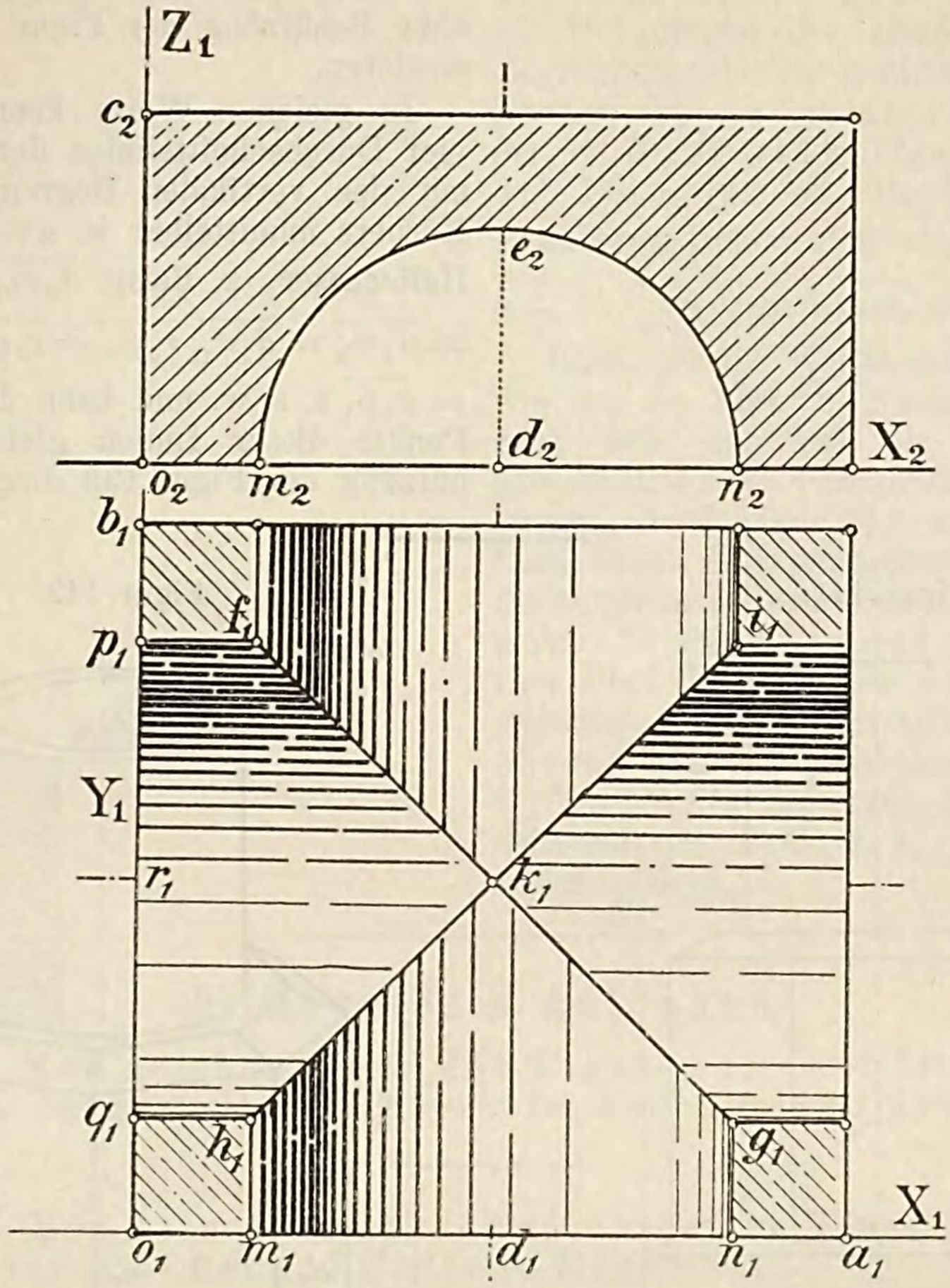


Aufgabe 85. Der in Figur 139 im Grund- und Aufriss dargestellte Körper ist dimetrisch $1 : \frac{1}{2} : 1$ in Untersicht links darzustellen.

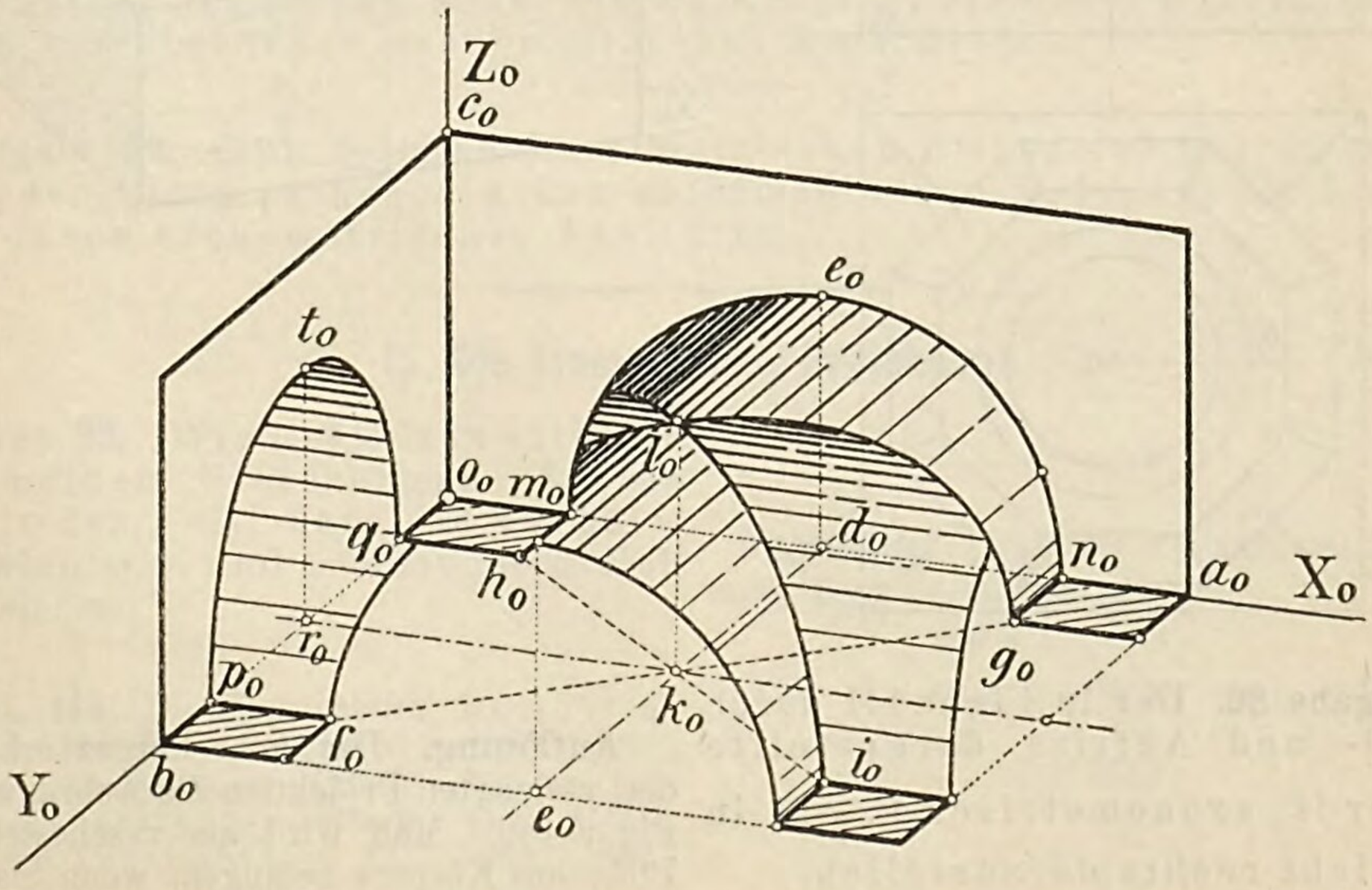
Auflösung. Man ermittele nach Annahme des Achsenkreuzes X_0, Y_0, Z_0, s. Figur 140, den axonometrischen Grundriss der Figur 139, indem man die x-Koordinaten in wahrer, die y-Koordinaten in halber Grösse als axonometrische Koordinaten benützt, z. B. $\overline{o_0 a_0} = \overline{o_1 a_1}$, $\overline{o_0 b_0} = \frac{1}{2}\overline{o_1 b_1}$ u. s. w. Trägt man endlich von den Punkten des axonometrischen Gundrisses aus die z-Koordinaten in wahrer Grösse als axonometrische Koordinaten ab, z. B. $\overline{o_0 c_0} = \overline{o_2 c_2}$, $\overline{d_0 e_0} = \overline{d_2 e_2} \cdots$ u. s. w., so ergeben sich hierdurch alle Punkte der axonometrischen Bilder des Körpers.

Die innere krumme Oberfläche des Körpers besteht aus zweien senkrechten Kreiscylindern von gleichem Halbmesser, die sich nach zweien Ellipsen durchdringen; ihre Grundrisse sind in der Fig. 139 durch die Diagonalen $f_1 g_1$ und $h_1 i_1$ gegeben, denen im axonometrischen Bilde die Diagonalen $\overline{f_0 g_0}$ und $\overline{h_0 i_0}$, siehe Figur 140, entsprechen. Zieht man durch deren Schnittpunkt k_0 eine Parallele $\overline{k_0 l_0}$ zur Z-Achse und gleich dem Halbmesser $\overline{de}$ der Cylinder, so kennt man von jeder der beiden halben

Figur 139.



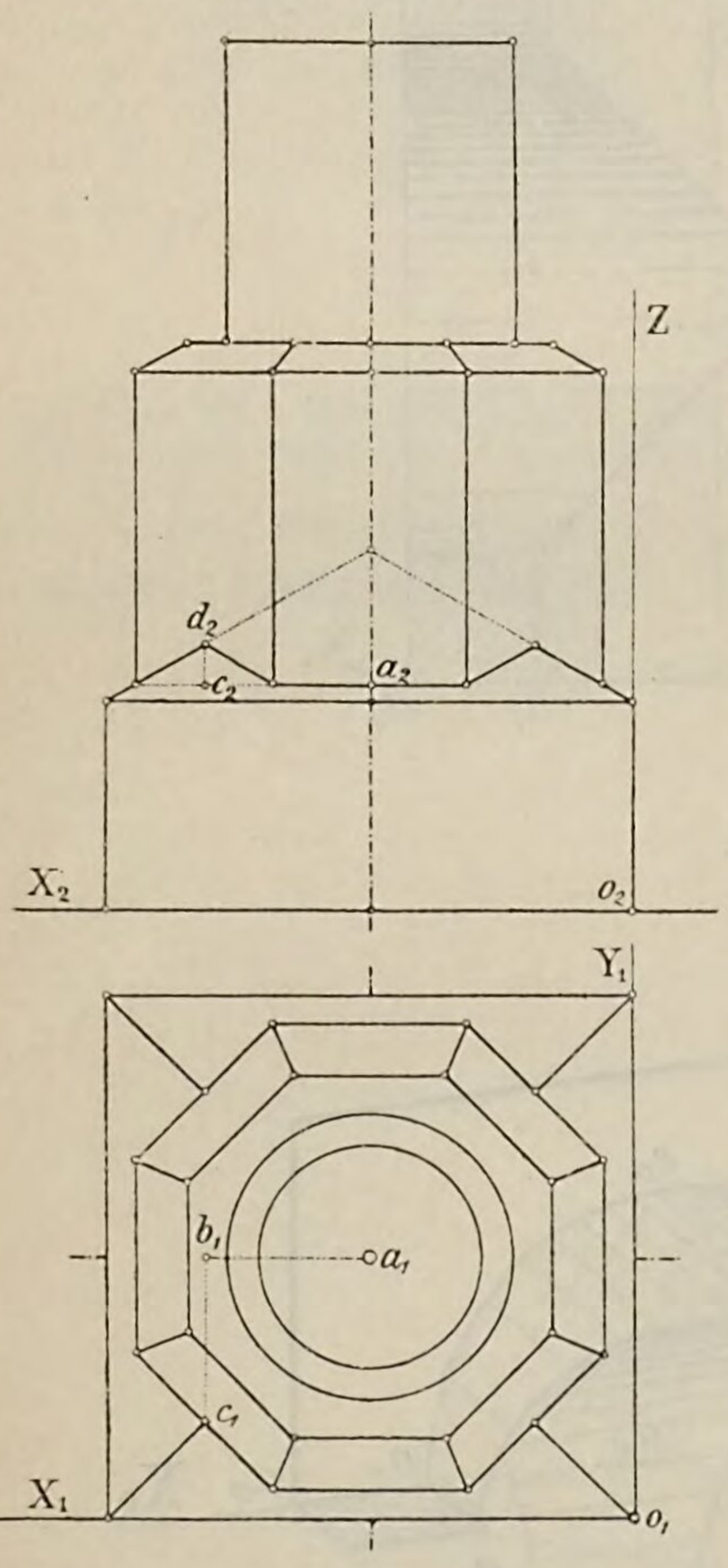
Figur 140.



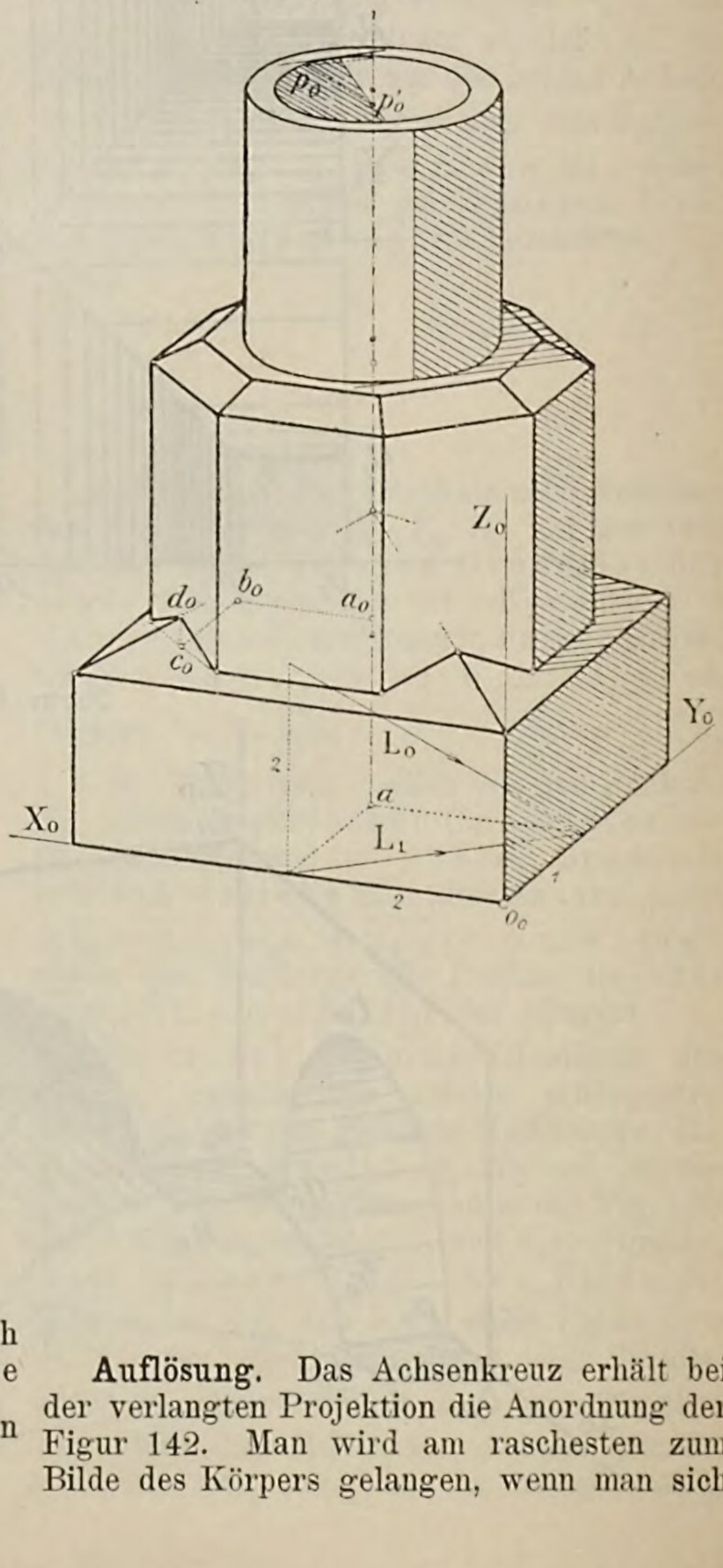
Durchschnittsellipsen zwei conjugierte Halbmesser, kann also beliebige weitere Punkte, ohne Benützung der Figur 139 direkt konstruieren.

In gleicher Weise kennt man von den vier Durchschnittslinien der beiden Cylinder mit den vertikalen Begrenzungsflächen des Körpers unmittelbar je zwei conjugierte Halbmesser, z. Beisp. $\overline{d_0 m_0} = \overline{d_0 n_0} = \overline{d_0 e_0} = \overline{d_1 m_1} = \overline{d_1 n_1}$, $\overline{r_0 p_0} = \overline{r_0 q_0} = \frac{1}{2}\overline{r_1 p_1}$, $\overline{r_0 t_0} = \overline{r_1 p_1}$ u. s. w. und kann daher die übrigen Punkte dieser Linien gleichfalls ohne Benützung der Figur 139 direckt konstruieren.

Figur 141.



Figur 142.



Aufgabe 86. Der in Figur 141 durch Grund- und Aufriss dargestellte Körper ist axonometrisch $1:\frac{1}{2}:1$ in Obersicht rechts darzustellen.

Auflösung. Das Achsenkreuz erhält bei der verlangten Projektion die Anordnung der Figur 142. Man wird am raschesten zum Bilde des Körpers gelangen, wenn man sich

wieder das axonometrische Bild der vertikalen Körperachse verschafft, darauf die Höhenlagen der einzelnen horizontalen Begrenzungsebenen ermittelt und in diesen Ebenen die axonometrischen Bilder der sie begrenzenden Figuren zeichnet. (In der Figur 142 ist die Konstruktion des Punktes d_0 angedeutet, es ist: $\overline{a_0 b_0} = \overline{a_1 b_1}$, $\overline{b_0 c_0} = \frac{1}{2}\overline{b_1 c_1}$ und $\overline{c_0 d_0} = \overline{c_2 d_2}$).

Bezüglich der Konstruktion des Schattens, wie ihn die Figur 142 zeigt, ist zu bemerken, dass man sich die Lichtrichtung im axonometrischen Grundriss und Bilde bestimmt, siehe Figur 142, und hierauf in den bezüglichen Horizontalebenen parallel zu L_1 die möglichen Streifstrahlen, bezw. Tangenten zieht. In der Figur 142 ist die Konstruktion eines Punktes des Schlagschattens angedeutet, der von dem inneren Rande des oberen Begrenzungskreises auf die innere Cylinderfläche erzeugt wird; der Schlagschatten des Punktes p_0 gelangt beispielsweise nach p_0'.

---

k) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 87. Man zeichne die in den Figuren 139 und 141 durch Grund- bezw. Aufriss dargestellten Körper in den übrigen axonometrischen Ansichten.

Aufgabe 88. Man löse die Aufgabe 84 unter der Voraussetzung, dass der Kreis in der XZ- bezw. YZ-Ebene liegen soll.

Aufgabe 89. Man zeichne das dimetrische Bild eines durch Grund- und Aufriss gegebenen senkrechten Kreiskegels bezw. Kreiscylinders in den verschiedenen axonometrischen Ansichten.

Aufgabe 90. Man zeichne die dimetrischen Bilder der regelmässigen Polyeder, desgleichen die der archimedischen Polyeder in den verschiedenen axonometrischen Ansichten.

---

l) Die isometrische Projektion.

Frage 93. Wie gestalten sich die allgemeinen Gleichungen 132 bis 138 für den Fall, dass die Verhältniszahlen m, n und p einander gleich werden?

Antwort. Unter der Voraussetzung, dass $m = p = n$ ist, hat man:

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha &= \sin^2\beta \\ &= \sin^2\gamma \\ &= \frac{m^2}{3m^2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Erkl. 144. Die Konstruktion des Achsenkreuzes bei der isometrischen Projektion gestaltet sich besonders einfach: „Man zeichnet ein gleichseitiges Dreieck; seine Höhen stellen die Achsenbilder X_0, Y_0 und Z_0 dar.“

$$\sin x = \sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$\alpha = \beta = \gamma = 27^0\,35'\,11''$$
$$\cos^2\alpha = \cos^2\beta = \cos^2\gamma = \frac{2m^2}{3m^2}$$
$$= \frac{2}{3}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$$
$$= 0{,}8165$$

Für die Winkel ξ, η und ζ findet man:

$$\cos\xi = \cos\eta = \cos\zeta = -\operatorname{tg}^2\alpha$$
$$= -\frac{1}{2}$$

oder:

$$\xi = \eta = \zeta = 120^0$$

Das Spurendreieck ist gleichseitig.

Erkl. 145. Bei der isometrischen Projektion sind die Winkel δ und ε, s. Erkl. 134, einander gleich und zwar ist jeder gleich 30^0. Man kann also mit den zur Verfügung stehenden Zeichnungsdreiecken den Winkel von 30^0 an die Horizontale, bezw. den von 60^0 an die Vertikale antragen, wodurch man wieder in einfacher Weise die Achsenbilder X_0, Y_0 und Z_0 erhält.

Frage 94. Wie bestimmt man von einem durch Grund- und Aufriss gegebenen Körper eine isometrische Projektion?

Antwort. Bei einer isometrischen Projektion ist, weil die Verhältniszahlen einander gleich sind, also gleich 1 genommen werden können, nunmehr ein axonometrischer Massstab erforderlich, in welchem die Längeneinheit gleich 0,8165 der wahren Einheit beträgt.

Will man also irgend einen Körper isometrisch darstellen, so bezieht man denselben auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz X, Y, Z und bestimmt für jeden Punkt des Körpers seine Koordinaten, die man mittels des axonometrischen Massstabes zu verkürzen und hierauf als axonometrische Koordinaten in dem Achsenkreuz X_0, Y_0 und Z_0 aufzutragen hat.

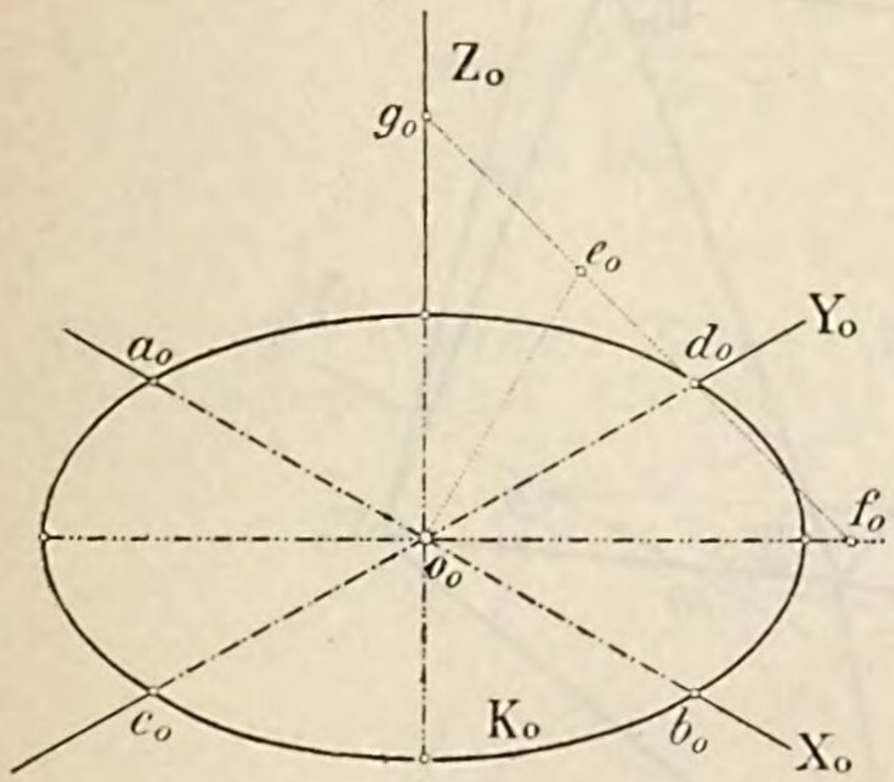
Erkl. 146. Handelt es sich nur um das Bild des Körpers, so zeichnet man dasselbe wieder in hypothetischer Vergrösserung, d. h. man trägt die rechtwinkligen Koordinaten im axonometrischen Bilde in wahrer Grösse, also unverkürzt auf. Die hierdurch erzielte Vergrösserung beträgt das $1 : 0{,}8165 = 0{,}225$fache; d. h. es werden die Längen parallel zu den **drei** Achsenrichtungen um etwa $\frac{1}{5}$ ihrer wirklichen Länge zu gross dargestellt.

Erkl. 147. Die isometrische Projektion gibt im allgemeinen keine schönen Bilder, weil die Verzerrungen zu gross und für alle drei Achsenrichtungen gleich sind. Trotzdem findet die Projektionsmethode die häufigste Anwendung, namentlich zur Darstellung einzelner Teile von Bauwerken, wie z. B. einzelner Steine von Bögen oder Gewölben, Holzverbindungen, Dachkonstruktionen, Maschinenteilen u. dergl. mehr. Die vielfache Verwendung dieser Projektionsart findet ihre Begründung in der ausserordentlich einfachen und leichten Konstruktion der Bilder, sowie in dem Umstande, dass aus dem isometrischen Bilde direkt die wirklichen Ausmasse des dargestellten Gegenstandes in verjüngtem Massstabe entnommen werden können, sobald das Bild in hypothetischer Vergrösserung gezeichnet worden ist.

m) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 91. Eine in der XY-Ebene liegende Kreislinie, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfällt, ist isometrisch darzustellen.

Figur 143.



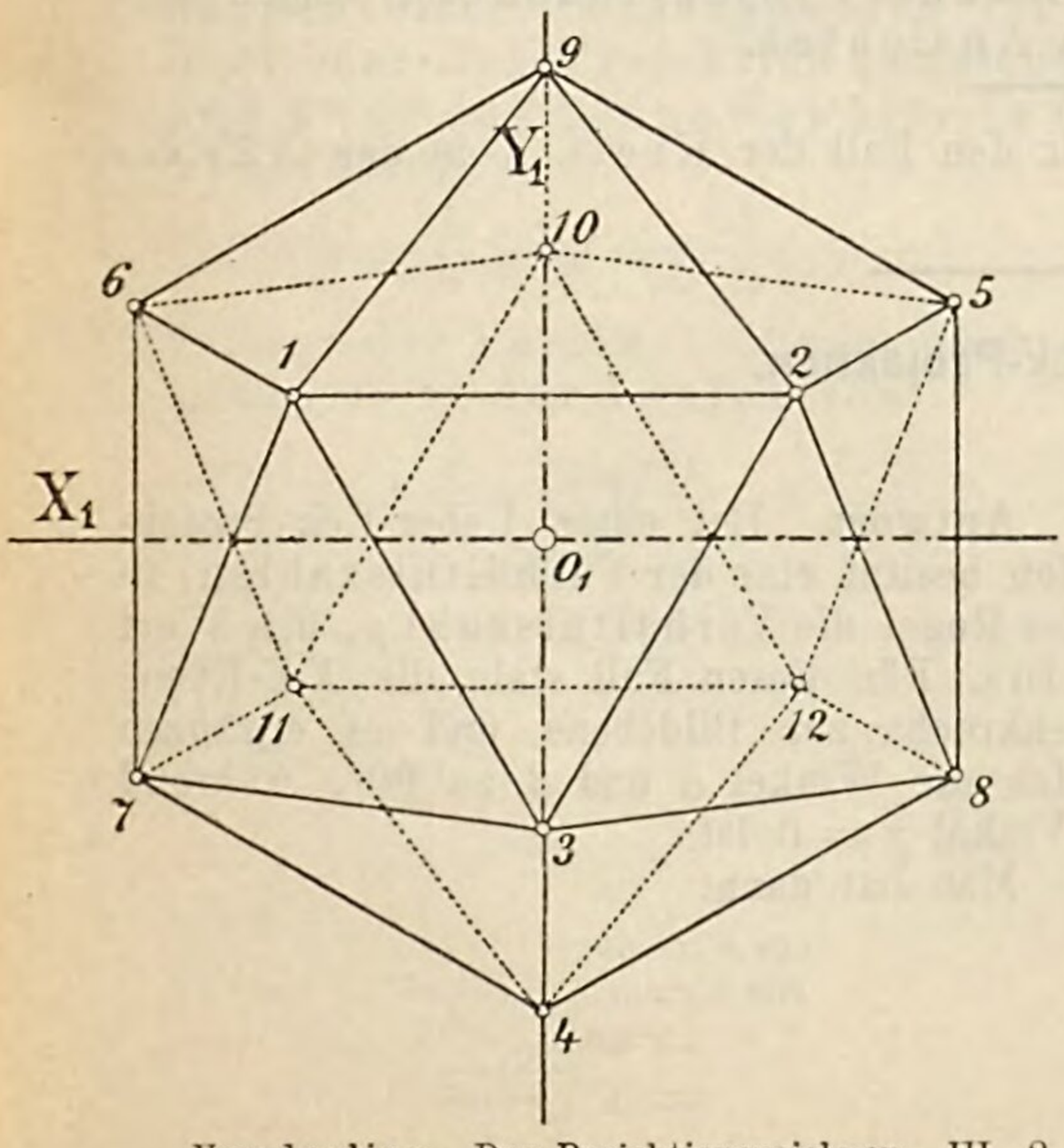
Auflösung. Die allgemeine, in Auflösung der Aufgabe 84 angegebene Konstruktion der Achsen des elliptischen Bildes vereinfacht sich im vorliegenden Falle noch mehr; denn sind $\overline{a_0 b_0}$, $\overline{c_0 d_0}$, s. Figur 143, die auf den Achsen X_0 und Y_0 liegenden conjugierten Durchmesser der Ellipse K_0, so bildet die Senkrechte $o_0 e_0$ mit der Z_0-Achse einen Winkel von 30^0, die Verbindungslinie $d_0 e_0$ ist daher gegen die Z-Achse sowie auch gegen die grosse Ellipsenachse unter 45^0 geneigt; zu ihrer Zeichnung ist die Kenntnis des Punktes e_0 gar nicht erforderlich.

„Man zieht vielmehr nur durch den Endpunkt d_0 des einen Durchmessers eine Gerade unter 45^0 geneigt gegen die Z-Achse, so schneidet diese Linie sowohl auf der Z-Achse einen Punkt g_0, als auch auf der grossen Ellipsenachse einen Punkt f_0 derart aus, dass $\overline{g_0 d_0} = \alpha$, $\overline{f_0 d_0} = \beta$, d. h. gleich der grossen bezw. kleinen Ellipsenhalbachse ist."

Nunmehr kann das elliptische Bild K_0 direkt aus den Hauptachsen in bekannter Weise konstruiert werden.

Aufgabe 92. Das in Figur 144 im Grundriss dargestellte regelmässige Ikosaëder ist isometrisch, Obersicht rechts, darzustellen.

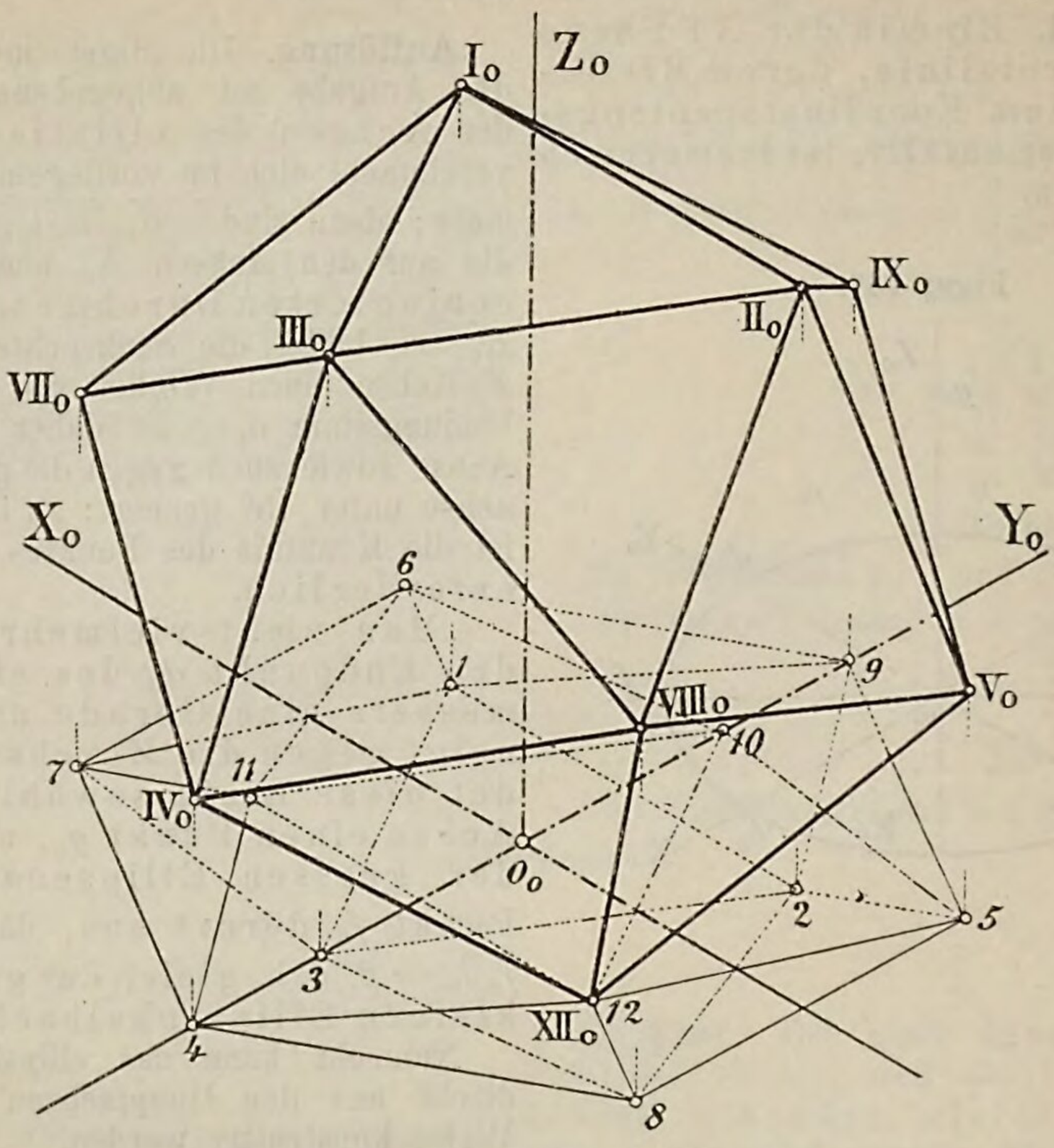
Figur 144.



Auflösung. Man zeichnet, nachdem das Achsenkreuz, so wie die Figuren 144 und 145 zeigen, angenommen ist, die isometrische Projektion des Grundrisses des Körpers, und trägt hierauf in den Punkten dieses Grundrisses die axonometrischen Z-Koordinaten auf, dabei haben, vorausgesetzt dass die Begrenzungsfläche 10, 11, 12 in der XY-Ebene liegen soll, die Punkte 4, 5, 6 einen Abstand $= r$, die Punkte 7, 8, 9 einen Abstand $= R$, endlich die Punkte 1, 2, 3 einen Abstand $= R + r$ von der XY-Ebene, wobei r und R die Halbmesser der den Sechsecken 1, 10, 2, 12, 3, 11, 1 und 6, 9, 5, 8, 4, 7, 6 umbeschriebenen Kreise bezeichnen, siehe auch den II. Teil dieses Lehrbuches, S. 98.

Es wurden im isometrischen Bilde nur die sichtbaren Punkte angegeben und mit römischen Ziffern bezeichnet.

Figur 145.



n) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 93. Man zeichne die isometrische Projektion eines Würfels in den verschiedenen Ansichten.

Aufgabe 94. Man zeichne die isometrischen Projektionen der bisher dargestellten Körper in den verschiedenen Ansichten.

Aufgabe 95. Man löse die Aufgabe 92 für den Fall der Kreis K in der XZ- beziehungsweise YZ-Ebene liegen soll.

o) Die Ueber-Eck-Projektion.

Frage 95. Wie gestalten sich die allgemeinen Gleichungen 132 bis 138) bei einer Ueber-Eck-Projektion?

Antwort. Bei einer Ueber-Eck-Projektion besitzt eine der Verhältniszahlen, in der Regel die Verhältniszahl p, den Wert eins. Für diesen Fall steht die XY-Ebene senkrecht zur Bildebene und es ergänzen sich die Winkel α und β zu 90^0, während Winkel $\gamma = 0$ ist.

Man hat dann:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= m \\ \cos\beta &= n \\ &= \sin\alpha \\ &= \sqrt{1-m^2} \end{aligned}$$

Für die Winkel ξ, η und ζ ergeben sich aus den Gleichungen 138) die Werte:

$$\cos\xi = -\frac{1}{2\sqrt{1-m^2}}\sqrt{(m^2-1+m^2+1)\,(m^2+1-m^2-1)} = 0$$

$$\xi = 90^0$$

$$\cos\eta = -\frac{1}{2m}\sqrt{(-m^2+1-m^2+1)\,(m^2+1-m^2-1)} = 0$$

$$\eta = 90^0$$

$$\cos\zeta = -\frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}\sqrt{(-m^2+1-m^2+1)\,(m^2-1+m^2+1)} = -1$$

$$\zeta = 180^0$$

Frage 96. Welche Ueber-Eck-Projektionen sind die gebräuchlichsten?

Antwort. Die gebräuchlichsten Ueber-Eck-Projektionen sind folgende:

1) Es ist $n = \frac{1}{2}$; hieraus folgt:

$$m = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Diesen Werten entsprechen die Winkel $\alpha = 30^0$ und $\beta = 60^0$.

2) Es ist $n = m = \sqrt{\frac{1}{2}}$, dem entsprechend sind auch die Winkel α und β einander gleich und 45^0.

---

p) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 96. Das in Figur 146 im Grundaufriss und Horizontalschnitt dargestellte Tonnengewölbe ist in der Ueber-Eck-Projektion zu zeichnen und zwar das ganze Gewölbe in der Projektion:

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{3};\quad n = \frac{1}{2};\quad p = 1$$

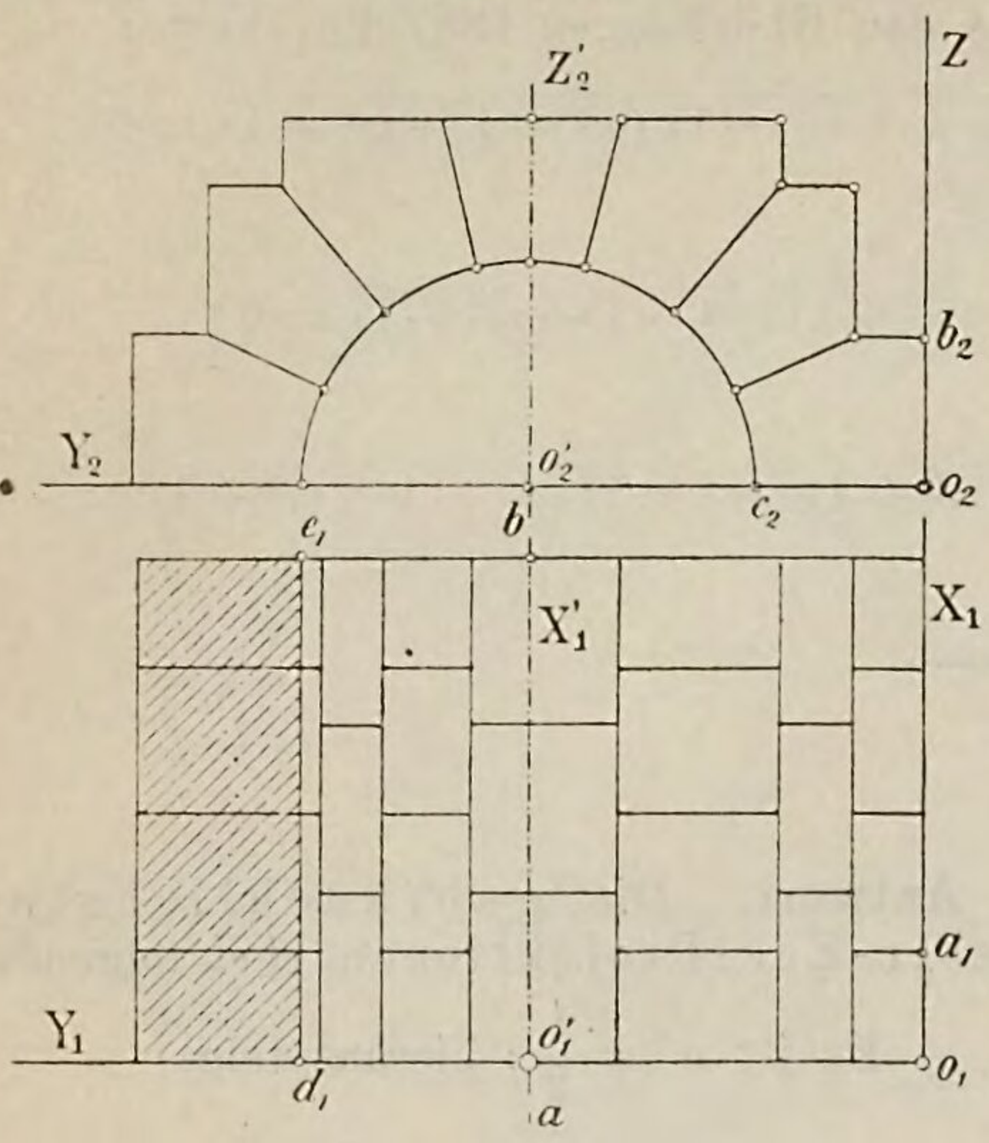
ferner der Vertikalschnitt nach der Linie ab in der Projektion:

$$m = n = \sqrt{\frac{1}{2}},\quad p = 1$$

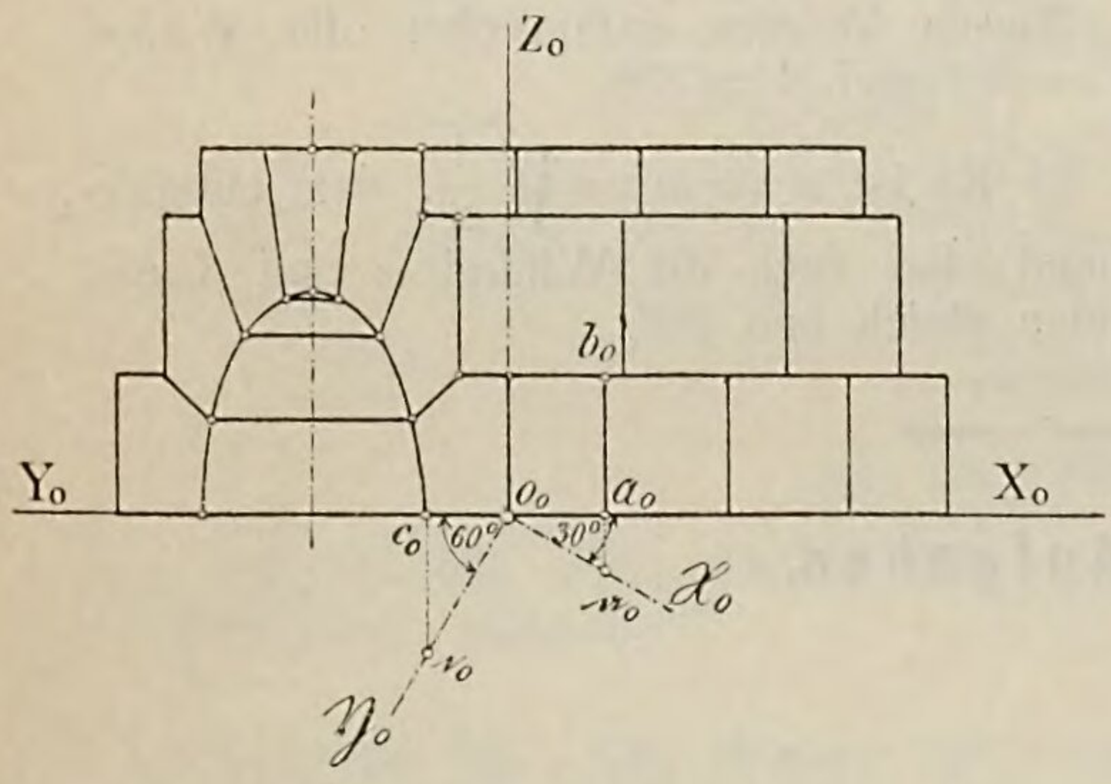
Auflösung. Für die Darstellung des ganzen Gewölbes nehme man den Punkt o, siehe Figur 146, als Koordinatenanfangspunkt und wähle die Achsen wie angegeben; hierauf übertrage man die einzelnen Punkte des Körpers mittels ihrer Koordinaten von Figur 146 auf Figur 147. Zweckmässig zeichnet man zur Ausführung der notwendigen Verkürzung die beiden Hilfsachsen $\mathfrak{X}_0$ und $\mathfrak{Y}_0$; erstere unter 30^0, letztere unter 60^0 gegen die X_0- bezw. Y_0-Achse geneigt, siehe Figur 147.

Man kann jetzt die Koordinaten aus Figur 146 in wahrer Grösse auf die Hilfsachsen $\mathfrak{X}_0$ und $\mathfrak{Y}_0$ auftragen

Figur 146.



Figur 147.



und sie hierauf rechtwinklig auf die Achsen X_0 und Y_0 projizieren. So ist z. B.:

$$\overline{o_0 a_0} = \overline{o_1 a_1} \text{ und } \overline{o_0 a_0} = \frac{\overline{o_0 a_0}}{2} \cdot \sqrt{3}$$

ebenso:

$$\overline{o_0 c_0} = \overline{o_2 c_2}; \quad \overline{o_0 c_0} = \frac{1}{2}\overline{o_0 c_0}$$

endlich:

$$\overline{a_0 b_0} = \overline{o_2 b_2}$$

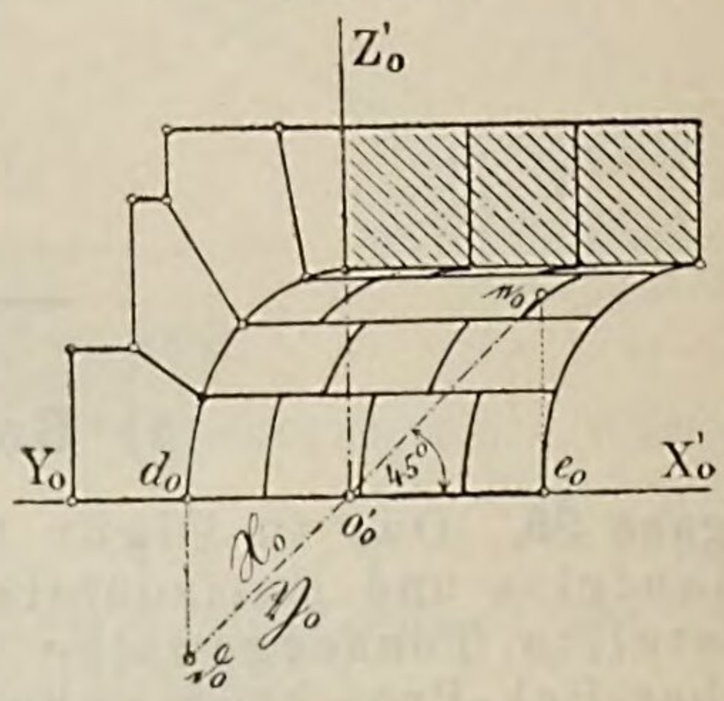
Für die Darstellung des Vertikalschnittes nach der Linie ab, nehme man, siehe Figur 146, den Punkt o' als Koordinatenanfangspunkt und verfahre im übrigen in gleicher Weise wie vorhin. Die Hilfsachsen $\mathfrak{X}_0$ und $\mathfrak{Y}_0$ bilden nunmehr mit X_0 bezw. Y_0 den Winkel von 45° und können aufeinander fallen, siehe Figur 148; es ist z. B.:

$$\overline{o_0' \mathfrak{d}_0} = \overline{o_1' d_1} \text{ und } \overline{o_0' d_0} = \overline{o_0' \mathfrak{d}_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

in gleicher Weise ist:

$$\overline{\mathfrak{d}_0 \mathfrak{e}_0} = \overline{d_1 e_1} \text{ und } \overline{d_0 e_0} = \overline{\mathfrak{d}_0 \mathfrak{e}_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Figur 148.



q) Ungelöste Aufgabe.

Aufgabe 97. Man zeichne die bisher kennen gelernten Körper in den gebräuchlichsten, Ueber-Eck-Projektionen, siehe Frage und Antwort 96.

C. Ueber die direkten axonometrischen Konstruktionen unter Benützung eines gegebenen Achsenkreuzes.

Anmerkung 32. Bei den bisherigen Konstruktionen hat es sich lediglich um die Ermittelung des axonometrischen Bildes einer Raumgrösse bei gegebenem Grund- und Aufriss gehandelt unter der Voraussetzung eines bestimmt vorgezeichneten Achsenkreuzes. Der Axonometrie kommt aber noch eine zweite Aufgabe zu und diese besteht darin, alle Konstruktionen der darstellenden Geometrie, direkt axonometrisch durchzuführen, d. h. lediglich mit Zuhilfenahme des Achsenkreuzes und der Bildebene, aber ohne Benützung von Grund- und Aufriss. Im Nachfolgenden sollen die wichtigsten Grundkonstruktionen durchgeführt werden.

a) Darstellung eines Punktes.

Frage 97. Wie wird ein Punkt axonometrisch dargestellt?

Antwort. Ein Punkt wird axonometrisch dargestellt durch sein axonometrisches Bild sowie durch das Bild seines Grundrisses, Aufrisses oder Seitenrisses.

Die Lage des Punktes a im Raume, siehe Figur 149, ist vollständig bestimmt, wenn man kennt entweder die Punkte a_0 und a_1, oder a_0 und a_2, oder endlich a_0 und a_3.

Dabei liegen a_0 und a_1, a_0 und a_2, endlich a_0 und a_3 je in einer Parallelen zur Z_0-, Y_0 und X_0-Achse beziehungsweise.

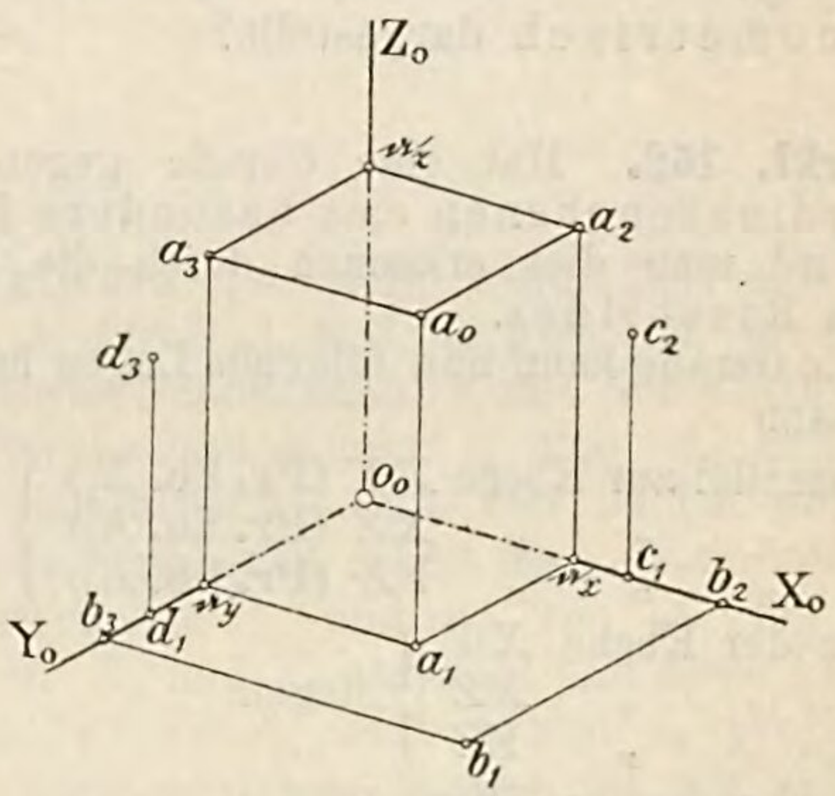
Erkl. 148. Die Längen $\overline{a_0 a_1}$, $\overline{a_0 a_2}$, $\overline{a_0 a_3}$ sind die axonometrischen Koordinaten des Punktes a und demnach gleich den Längen $\overline{o_0 a_z}$, $\overline{o_0 a_y}$ und $o_0 a_x$; sie geben die Abstände des Punktes a von den drei Koordinatenebenen XY, XZ und YZ an, ihre wahren Grössen können nach dem Früheren, siehe Frage und Antwort 78, ermittelt werden.

Erkl. 149. Liegt ein Punkt in der XY-Ebene (horizontale **Pr. Eb.**), so ist seine Z-Koordinate gleich Null, sein axonometrisches Bild b_0 fällt zusammen mit dem Bilde b_1 seines Grundrisses, s. Figur 149, das axonometrische Bild b_2 und b_3 des Aufrisses bezw. Seitenrisses liegt in der X_0- bezw. Y_0-Achse.

Liegt ein Punkt, z. B. der Punkt c, siehe Figur 149, in der XZ-Ebene (vertikale **Pr. Eb.**), so deckt sich sein axonometrisches Bild mit dem Bilde c_2 seines Aufrisses, siehe Figur 149, die Bilder von Grund- und Seitenriss liegen in der X_0- und Z_0-Achse beziehungsweise.

(Welche Lage gegen die Koordinatenebenen besitzt der in der Figur 149 dargestellte Punkt d?)

Figur 149.



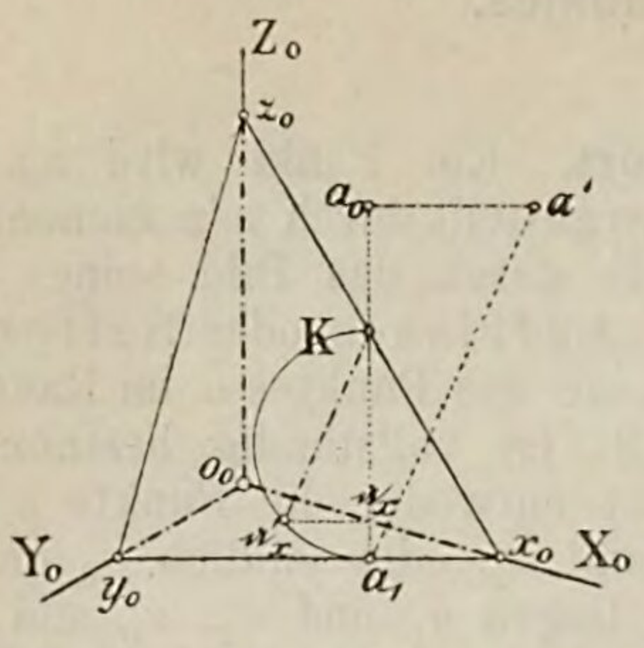
Erkl. 150. In der Folge soll ein Punkt in der Regel gegeben sein durch sein axonometrisches Bild und das seines Grundrisses.

Erkl. 151. Kennt man von einem Punkte a sein axonometrisches Bild a_0, sowie das Bild einer der drei Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3, so kann man hieraus stets die Bilder der Projektionen auf die beiden **Pr. Ebn.** ermitteln. Ist z. B. gegeben a_0 und a_1, so finden sich hieraus mittels der Parallelen durch a_1 zu Y_0 und X_0 die Punkte a_x und a_y hieraus mittels der Parallelen durch a_x bezw. a_y und a_0 zu Z_0 und Y_0 bezw. X_0 die Punkte a_2 und a_3. In ähnlicher Weise konstruiert man die Punkte a_3 und a_1 sowie a_2 und a_1, wenn gegeben sind a_0 und a_2 oder a_0 und a_3.

Frage 98. Wie konstruiert man den Abstand eines Punktes a, s. Fig. 150, von der Bildebene?

Antwort. Zeichnet man ein Spurendreieck $x_0 y_0 z_0$ der Bildebene etwa gleich so, dass die Seite $x_0 y_0$ durch a_1 geht, so begrenzen die beiden Seiten $\overline{x_0 y_0}$ und $\overline{x_0 z_0}$ desselben auf der Verbindungslinie $a_0 a_1$ eine Strecke, über welcher als Durchmesser ein Halbkreis K zu beschreiben ist, auf welchem die Umlegung a_x' des Punktes a_x sich befindet. Die Verbindungslinie $a_1 a_x'$ gibt die

Figur 150.



Umlegung von $a_1 a_x$ an und auf ihr senkrecht steht die Linie $a_1 a'$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes $a_1 a_0 a'$, in welchem die eine Kathete $\overline{a_0 a'}$ die gesuchte Entfernung des Punktes a von der Bildebene darstellt, während durch die Hypotenuse $\overline{a_1 a'}$ die wahre Entfernung des Punktes a von der XY-Ebene, d.h. von der horizontalen **Pr. Eb.** gegeben ist.

---

b) Darstellung einer Geraden.

Frage 99. Wie wird eine Gerade axonometrisch dargestellt?

Erkl. 152. Hat eine Gerade gegen die Koordinatenebenen eine besondere Lage, so wird man dies erkennen durch die Lage dieses Rissbildes.

Die Gerade kann nun folgende Lagen haben: Sie kann

1) parallel zur Ebene XY (**Pr. Eb.** E_1)
2) „ „ „ XZ (**Pr. Eb.** E_2)
3) „ „ „ YZ (**Pr. Eb.** E_3)

} sein.

4) in der Ebene XY
5) „ „ „ XZ
6) „ „ „ YZ

} liegen.

7) senkrecht zur Ebene XY
8) „ „ „ XZ
9) „ „ „ YZ

} stehen.

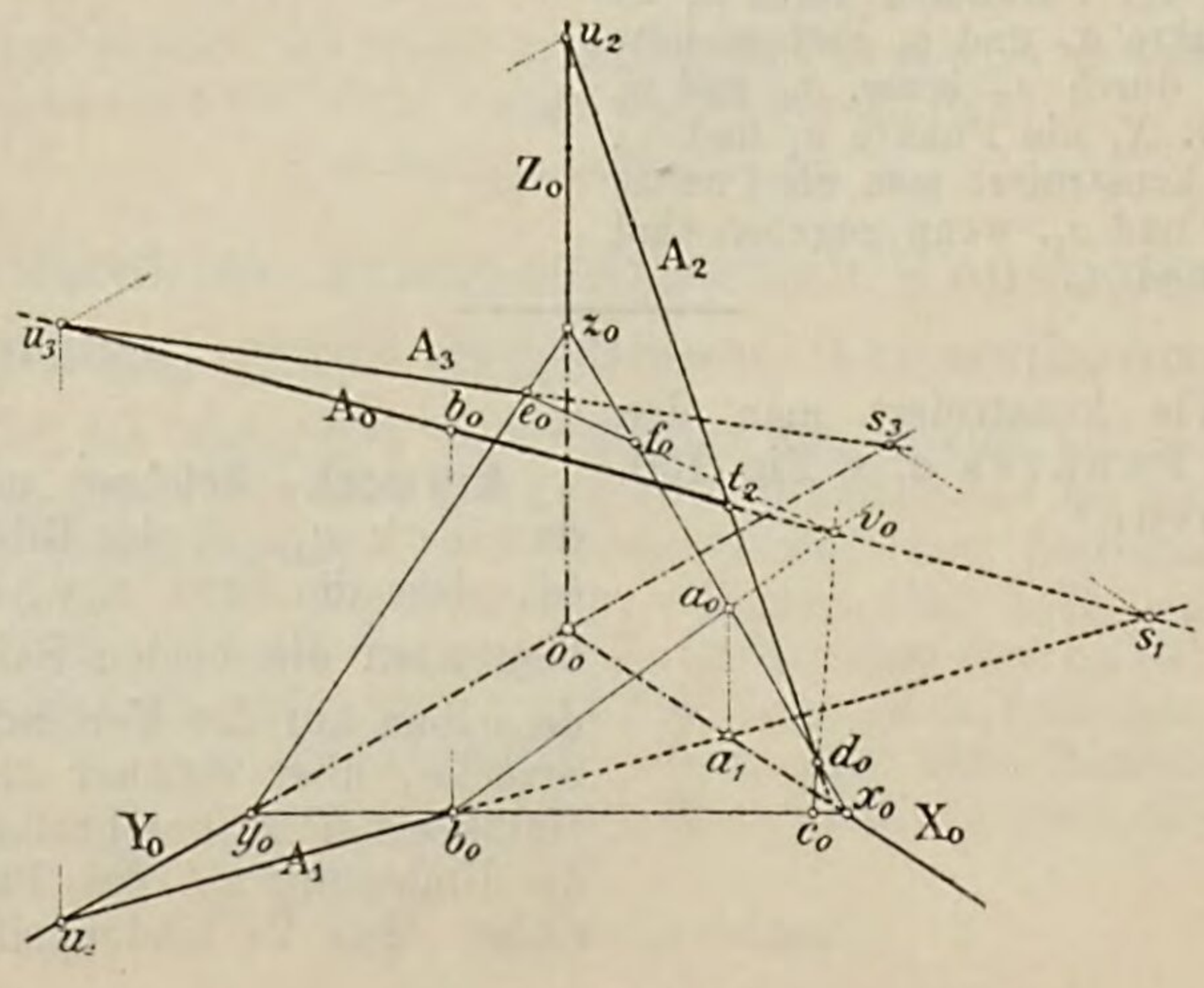
10) in der Achse X
11) „ „ „ Y
12) „ „ „ Z

} liegen.

Die Fälle 1) bis 3) erkennt man aus der Projektionszeichnung, wenn das axonometrische

Antwort. Eine Gerade wird in gleicher Weise wie ein Punkt dargestellt durch ihr axonometrisches Bild, und durch das ihres Grund-, Auf- oder Seitenrisses, siehe Figur 151. Hierbei können sowohl das axonometrische Bild sowie ein Rissbild ganz beliebig gewählt werden. Die Gerade A im Raume wird gegeben sein durch ihr axonometrisches Bild A_0, und durch das Bild A_1 ihres Grundrisses oder durch A_0 und A_2, endlich durch A_0 und A_3; dabei bezeichnen A_2 und A_3 die Bilder des Aufrisses bezw. Seitenrisses der Geraden.

Figur 151.



sche Bild und jenes Rissbild, das in jener Koordinatenebene liegt, zu welcher die Gerade parallel sein soll, zu einander parallel laufen. In den Fällen 4) bis 6) fällt das axonometrische Bild mit jenem Rissbilde zusammen, das in jener Koordinatenebene liegt, in welcher die Gerade selbst liegen soll. Die übrigen beiden Rissbilder fallen in die bezüglichen Koordinatenachsen. In den Fällen 7) bis 9) laufen das axonometrische Bild der Geraden sowie zwei ihrer Rissbilder parallel zu jener Koordinatenachse, welche auf der gleichen Koordinatenebene senkrecht steht, wie die Gerade selbst. Das Rissbild auf diese Ebene ist ein Punkt.

In den Fällen 10) bis 12) fallen das axonometrische Bild und zwei Rissbilder mit der bezüglichen Achse zusammen, das dritte Rissbild ist der Koordinatenanfangspunkt.

Frage 100. Wie bestimmt man die Durchschnittspunkte einer durch ihr axonometrisches Bild und eines ihrer Rissbilder gegebenen Geraden mit den Koordinatenebenen?

Erkl. 153. Die Punkte s, t und u sind die Spuren der Geraden A, die Punkte s_1, t_2 und u_3 daher die axonometrischen Bilder dieser Spuren.

Erkl. 154. Auf Grund der Antwort der Frage 100 ist es nunmehr leicht, von einer Geraden, welche durch ihr axonometrisches Bild und ein Rissbild gegeben ist, die beiden anderen Rissbilder konstruktiv zu ermitteln. Ist z. B. die Gerade A, siehe Figur 151, gegeben durch A_0 und A_1, so bestimme man, wie in Antwort der Frage 100 gezeigt wurde, die axonometrischen Bilder der Spuren s, t und u sowie deren Rissbilder, es geben dann die Verbindungslinien t_2u_2 und s_3u_3 die Rissbilder A_2 und A_3. Selbstverständlich geht A_2 auch durch s_2 und A_3 durch t_3.

Die Punkte s_2 und t_3 sind in der Figur 158 nicht besonders bezeichnet worden, es liegt aber s_2 auf X_0 und in der Parallelen zu Z_0 durch s_1, ebenso t_3 auf Z_0 und in der Parallelen zu X_0 durch t_2.

Frage 101. Wie bestimmt man den Durchschnittspunkt einer Geraden mit der Bildebene?

Erkl. 155. Der Durchschnitt einer Raumgrösse mit der Bildebene soll für die Folge die „Nullspur“ dieser Raumgrösse heissen. Der Punkt v_0 ist demnach das Bild der Nullspur der Geraden oder diese Nullspur selbst.

Die Gerade a_0b_0 ist die Nullspur der projizierenden Ebene A_1.

Antwort. Ist, siehe Figur 151, eine Gerade A durch A_0 und A_1 gegeben, so erhält man ihren Schnittpunkt s mit der Ebene XY im Durchschnittspunkt s_1 von A_0 und A_1. Ihre Schnittpunkte mit den beiden übrigen Koordinatenebenen erhält man, wenn man die Schnittpunkte t_1 und u_1 von A_1 mit den Achsen X_0 und Y_0 aufsucht und diese Punkte parallel zu Z_0 nach t_2 und u_3 projiziert.

In der Figur fällt der Punkt t_1 mit dem Punkte a_1 zusammen.

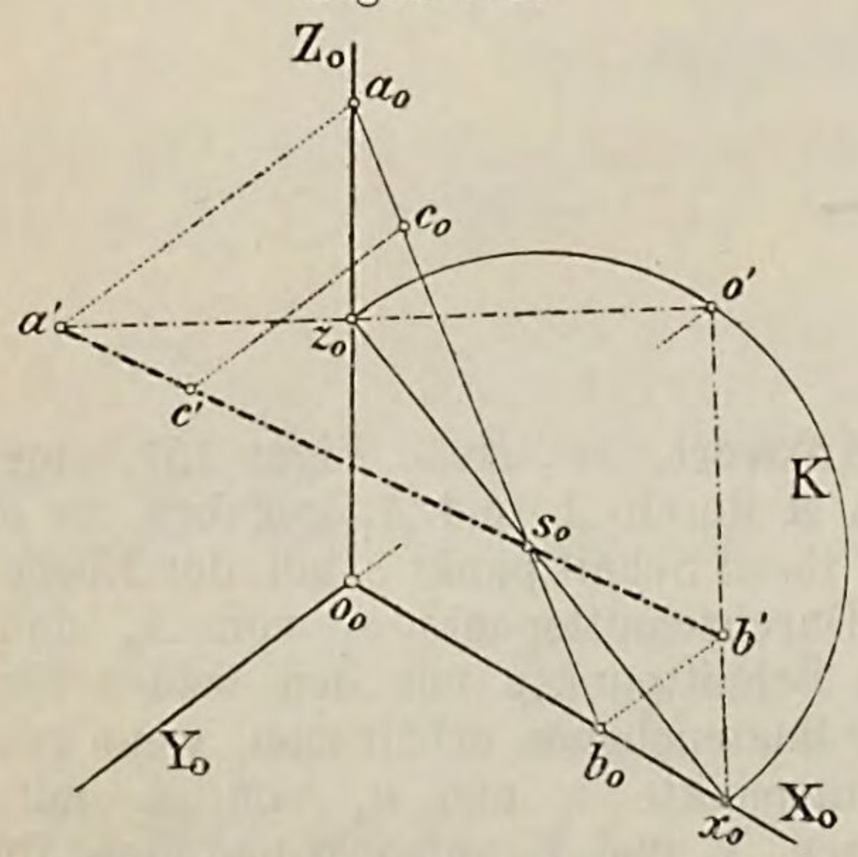
Der Punkt t ist der Schnittpunkt der Geraden A mit der Ebene XZ, der Punkt u ihr Schnittpunkt mit der Ebene YZ.

Antwort. Ist die Gerade A, s. Fig. 151, gegeben durch A_0 und A_1 und die Bildebene bestimmt durch das Spurendreieck $x_0y_0z_0$, so stellt die Gerade A_1 zugleich das Rissbild a_1b_0 einer Geraden ab dar, deren axonometrisches Bild a_0b_0 ist und welche in der Bildebene liegt. Zu gleicher Zeit liegt ab aber auch in der die Gerade A enthaltenden, auf der XY-Ebene senkrecht stehenden projizierenden Ebene. Es schneiden sich also die Geraden A und ab in einem

Erkl. 156. In gleicher Weise, wie in Antwort der Frage 101, hätte man die Nullspur der Geraden A auch konstruieren können, wenn die Geraden A_0 und A_2 oder A_0 und A_3 gegeben gewesen wären. So stellt, s. Figur 151, $c_0 d_0$ die Nullspur der projizierenden Ebene A_2, die Gerade $e_0 f_0$ die Nullspur der projizierenden Ebene A_3 dar und beide Linien schneiden die Gerade A_0 im Punkte v_0, der Nullspur von A.

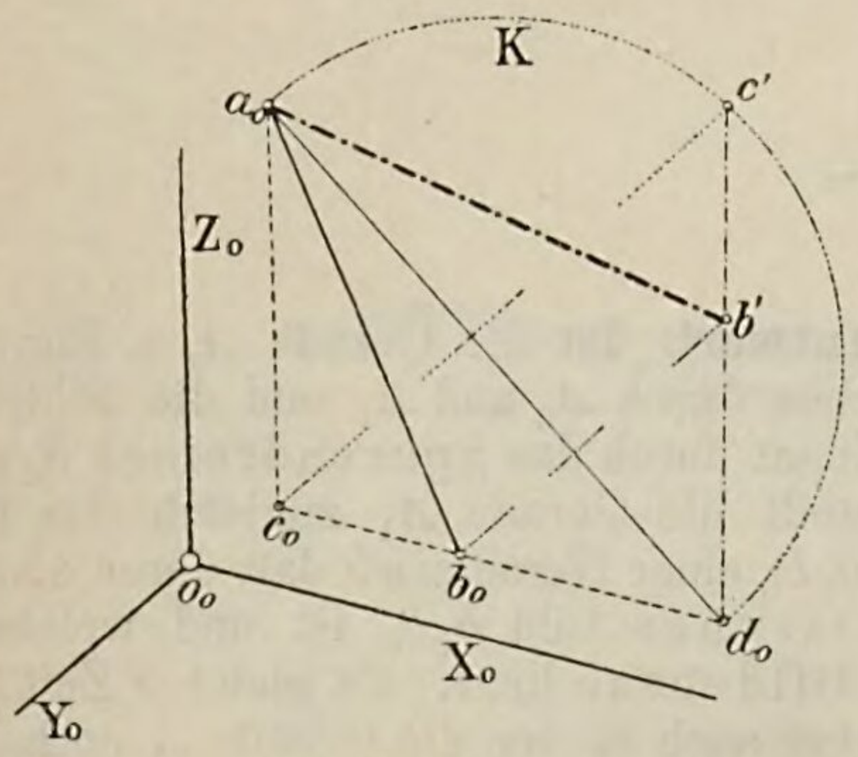
Frage 102. Wie bestimmt man die wahre Länge einer gegebenen Strecke?

Figur 152.



Erkl. 157. Will man etwa auf der Geraden $\overline{ab}$ von einem Punkte b aus eine Strecke von beliebiger Länge abtragen, so bestimmt man wieder die Umlegung $a'b'$ von ab, wie in Antwort der Frage 102 gezeigt wurde und trägt von b' aus auf $b'a'$ die Strecke $\overline{b'c'}$ gleich der gegebenen Länge ab und bestimmt c_0 aus c'. Die Strecke $\overline{b_0 c_0}$ ist dann das axonometrische Bild der gesuchten Strecke von gegebener wahrer Grösse.

Figur 153.



Erkl. 158. Die Bestimmung der wahren Länge einer in einer Koordinatenebene liegenden Strecke $\overline{ab}$ kann noch in etwas einfacherer Weise bewerkstelligt werden, wenn man sich der Nullspur der Geraden A bedient. Diese Nullspur ist der Punkt, dessen axonometrisches Bild v_0 im Durchschnitt von A_0 und $a_0 b_0$ liegt. Der Punkt v, dessen axonometrisches Bild v_0 mit ihm zusammenfällt, ist der Durchschnittspunkt der Geraden A mit der Bildebene xyz.

Antwort. Bei Beantwortung der vorliegenden Frage lassen sich zwei Fälle unterscheiden, es kann nämlich:

a) die gegebene Gerade in einer der Koordinatenebenen liegen oder:

b) es ist dies nicht der Fall.

Im Falle a) sei $a_0 b_0$ das axonometrische Bild der in der XZ-Ebene liegenden gegebenen Geraden, s. Figur 152, deren wahre Länge konstruiert werden soll. Zieht man nun $x_0 z_0$ senkrecht zu Y_0, sonst aber beliebig, so stellt $x_0 o_0 z_0$ das Bild eines bei o rechtwinkligen Dreieckes dar, dessen Umlegung um die Linie $x_0 z_0$ in die Bildebene unmittelbar gezeichnet werden kann, denn die Umlegung o' des Punktes o liegt auf der Senkrechten durch o_0 zu $x_0 z_0$ sowie auf dem über $\overline{x_0 z_0}$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreise K. Die Umlegung von $z_0 o$ kommt daher nach $z_0 o'$ und auf dieser Linie liegt in der Senkrechten durch a_0 zu $x_0 z_0$ die Umlegung a' von a. Die Umlegung von ab ist daher die Gerade $a' s_0$, gehend durch a' und durch den Schnittpunkt s_0 von $a_0 b_0$ und $x_0 z_0$. Die wahre Länge von ab ist demnach die Strecke $\overline{a'b'}$, wobei b' die Umlegung des Punktes b darstellt.

Im Falle b) habe die Gerade A eine ganz beliebige Lage gegen die Koordinatenebenen und es sei z. B. die wahre Länge der Strecke bs (s. Figur 154), deren axonometrisches Bild durch $b_0 s_1$ gegeben ist, zu bestimmen.

Sind, siehe Figur 154, $x_0 y_0$ und $x_0 z_0$ Seiten des Spurendreieckes der Bildebene, so stellt die Linie $y_0 z_0$ die Nullspur der horizontal projizierenden Ebene A_1 der Geraden A vor, es ist daher das Dreieck $y_0 a_1 z_0$ das Bild eines bei a rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Seite $y_0 z_0$ in der Bildebene liegt. Die Umlegung dieses Dreieckes in die Bildebene ist das Dreieck $y_0 z_0 a'$ und daher die Verbindungslinie $y_0 a'$ oder A_1' die Umlegung des axono-

facherer Weise als in Antwort der Frage 102 gezeigt wurde, geschehen. Ist nämlich, siehe Figur 153, $\overline{a_0 b_0}$ das axonometrische Bild der Strecke $\overline{ab}$, so zeichne man $a_0 d_0$ senkrecht zu Y_0, $b_0 c_0$ parallel zu X_0 und $a_0 c_0$ parallel zu Z_0, so ist das Dreieck $a_0 c_0 d_0$ das axonometrische Bild eines bei c rechtwinkligen Dreieckes, das mit einer Seite $a_0 d_0$ in der Bildebene liegt. Seine Umlegung um $a_0 d_0$ in die Bildebene ist daher das Dreieck $a_0 c' d_0$, dessen Ecke c' in der Senkrechten durch c_0 zu $a_0 d_0$ sowie auf dem über $\overline{a_0 d_0}$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreise K sich befindet. Auf der Linie $d_0 c'$ liegt nun in b' die Umlegung des Punktes b, daher ist in der Strecke $\overline{a_0 b'}$ die wahre Länge der Strecke $\overline{ab}$ gegeben.

Man löse die gleiche Aufgabe für den Fall die Gerade ab in einer der beiden übrigen Koordinatenebenen liegt.

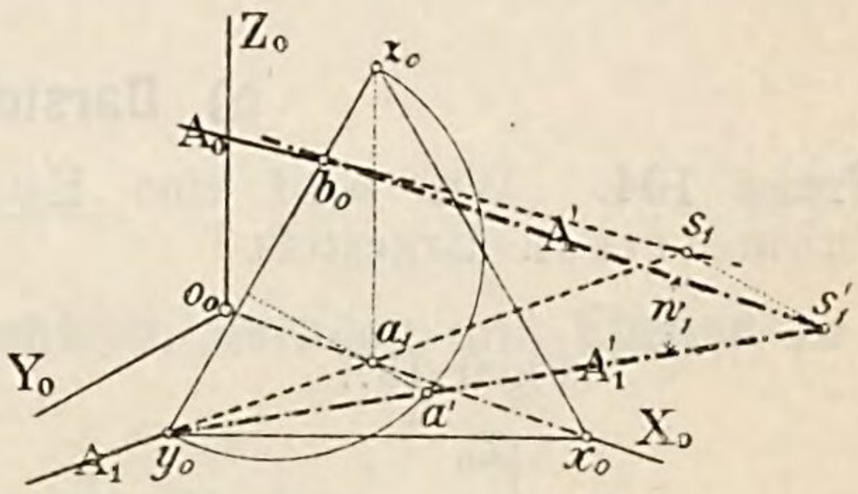
Man trage auf der Geraden $a_0 b_0$, siehe Figur 153, axonometrisch eine Strecke von bestimmter Länge ab.

Erkl. 159. Die Geraden A_1' und A' (siehe Figur 154) schliessen einen Winkel w_1 gleich dem Winkel der Geraden A mit der Ebene XY, d. h. mit der **Pr. Eb.** E_1 ein.

Man bestimme die wahre Länge von $\overline{bs}$ in gleicher Weise wie in Antwort der Frage 102, Fall b), aber unter Benützung des axonometrischen Aufrisses A_2, bezw. Seitenrisses A_3

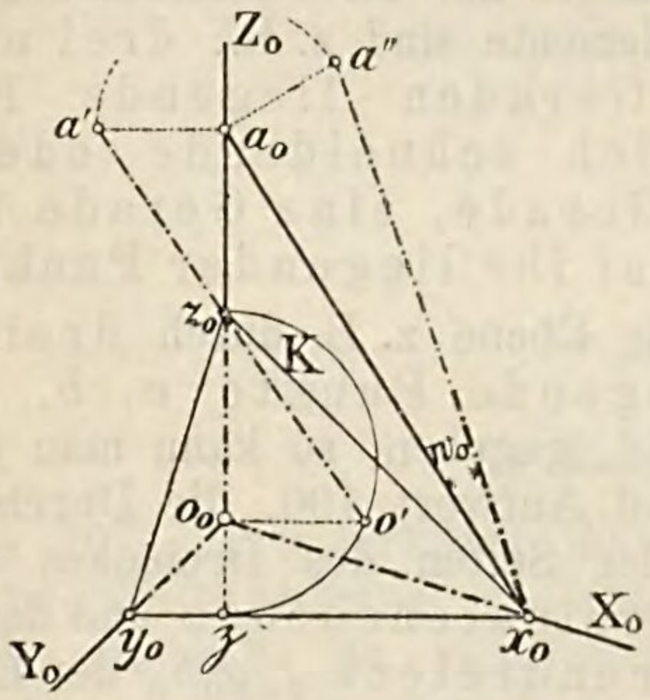
metrischen Grundrisses von A in die Bildebene. Zieht man nun noch durch s_1 die Senkrechte zu $y_0 z_0$ bis zum Schnitt s_1' mit A_1', so gibt die Verbindungslinie $b_0 s_1'$ oder A' die Umlegung der Geraden A in die Bildebene, die Strecke $\overline{b_0 s_1'}$ daher die gesuchte wahre Länge der Strecke $\overline{bs}$ an.

Figur 154.



Frage 103. Wie bestimmt man den Winkel einer Geraden mit der Bildebene in wahrer Grösse?

Figur 155.



Antwort. Die Gerade kann wieder:

a) in einer der Koordinatenebenen liegen, oder:

b) eine ganz beliebige Lage gegen letztere einnehmen.

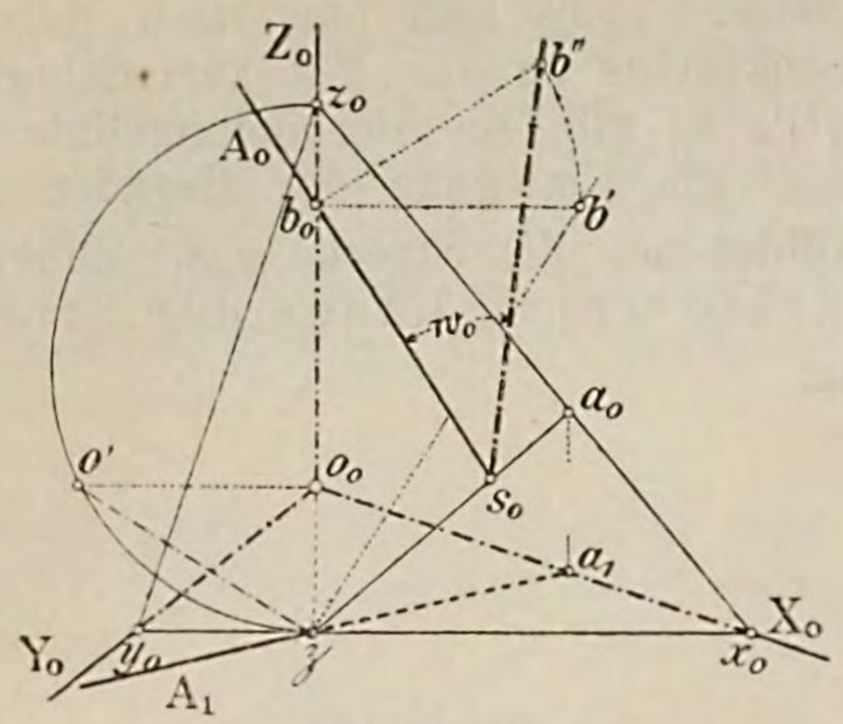
Im Falle a) sei $x_0 a_0$, siehe Figur 155, das axonometrische Bild der gegebenen Geraden. Man legt etwa gleich durch x_0 die Bildebene, bestimmt das Spurendreieck $x_0 y_0 z_0$ der Bildebene, sowie den Abstand $\overline{a_0 a'}$ des Punktes a von der letzteren, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $a_0 a'' x_0$ dessen Kathete $\overline{a_0 a''} = \overline{a_0 a'}$ ist, bei x_0 der gesuchte Winkel w_0 der Geraden ax mit der Bildebene in wahrer Grösse enthalten.

Man bestimme den Winkel einer in der XY-, bezw. XZ-Ebene liegenden Geraden mit der Bildebene.

Im Falle b) habe die Gerade A eine ganz beliebige Lage gegen die Koordinatenebenen.

Man bestimmt zunächst, siehe Figur 156, sowie Frage und Antwort 101, die Nullspur s_0 von A, sowie den Abstand $\overline{b_0 b'}$ eines Punktes b der Geraden A von der Bildebene. Das rechtwinklige Dreieck $b_0 b'' s_0$,

Figur 156.



dessen eine Kathete $\overline{b_0 b''} = \overline{b_0 b'}$ ist, enthält bei s_0 den gesuchten Winkel w_0 der Geraden A mit der Bildebene in wahrer Grösse.

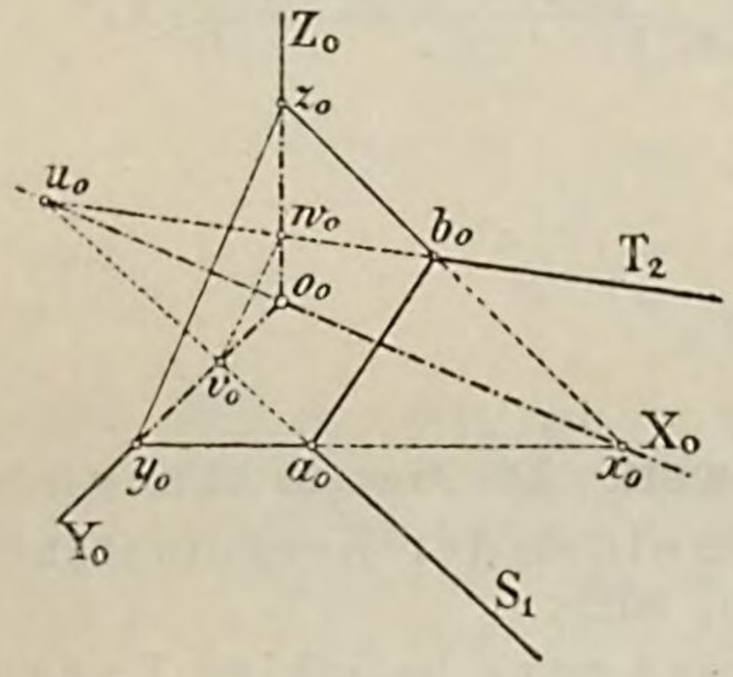
Man bestimme den Winkel w_0 unter Benützung eines der beiden übrigen Rissbilder A_2 oder A_3.

---

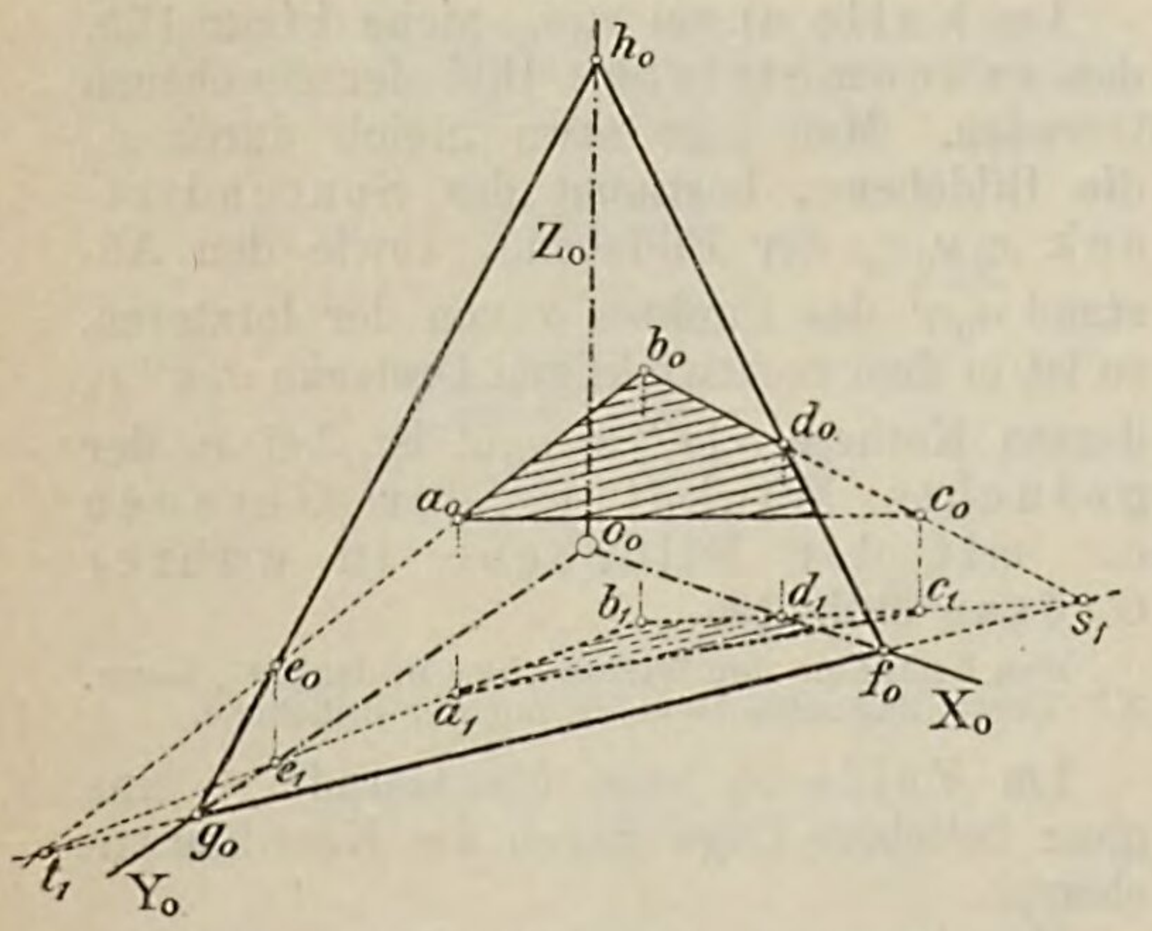
c) Darstellung einer Ebene.

Frage 104. Wie wird eine Ebene axonometrisch dargestellt?

Figur 157.



Figur 158.



Antwort. Eine gegen die drei Koordinatenebenen beliebig geneigte Ebene gibt man sich zweckmässig durch ihre drei Durchschnittspunkte u_0, v_0, w_0, s. Figur 157, mit den drei Koordinatenachsen bezw. durch deren Verbindungslinien $u_0 v_0$, $v_0 w_0$, $w_0 u_0$

Diese drei Linien bilden ein Dreieck, welches man das Spurendreieck der Ebene nennen kann, weil die genannten Linien nichts anderes darstellen als die Bilder der Schnittlinien der Ebene mit den drei Koordinatenebenen.

Ausser der eben genannten Bestimmungsart einer Ebene können aber auch noch andere Elemente zur ihrer Bestimmung dienen; solche Elemente sind z. B.: drei nicht in einer Geraden liegende Punkte, zwei sich schneidende oder parallele Gerade, eine Gerade und ein nicht auf ihr liegender Punkt u.s.w.

Ist die Ebene z. B. durch drei beliebig liegende Punkte a, b, c, siehe Figur 158, gegeben, so kann man ja, siehe Frage und Antwort 100, die Durchschnittspunkte der Seiten des Dreieckes abc mit den Koordinatenebenen und damit auch das Spurendreieck $f_0 g_0 h_0$ der Ebene ermitteln.

In gleicher Weise kann man verfahren, wenn die Ebene durch zwei sich schneidende Gerade oder durch eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt gegeben ist.

Für die Folge soll daher stets das Spurendreieck einer Ebene als gegeben vorausgesetzt werden.

Frage 105. Wie bestimmt man die Schnittlinie einer Ebene mit der Bildebene, das heisst die Nullspur der Ebene?

Erkl. 160. Die Seiten des Spurendreieckes, d. h. die Bilder der Spuren der Ebene kann man wie früher auch mit grossen Buchstaben des lateinischen Alphabetes, etwa u_0v_0 mit S_1, u_0w_0 mit T_2 und endlich v_0w_0 mit U_3 bezeichnen, so dass die in Figur 157 dargestellte Ebene auch Ebene S_1T_2 oder Ebene S_1U_3 oder endlich Ebene T_2U_3 genannt werden kann.

Erkl. 161. Ist die Ebene nicht durch ihr Spurendreieck, sondern durch andere Bestimmungsstücke, etwa zwei sich schneidende Gerade gegeben, so bestimmt man deren Nullspuren, siehe Frage und Antwort 101, und erhält in der Verbindungslinie dieser Nullspuren die Nullspur der Ebene.

Antwort. Ist $u_0v_0w_0$, siehe Figur 157, das Spurendreieck der gegebenen Ebene, so zeichne man ein Spurendreieck $x_0y_0z_0$ der Bildebene; es schneiden sich nun die in denselben Koordinatenebenen liegenden Seiten der Spurendreiecke $u_0v_0w_0$ und $x_0y_0z_0$ in Punkten der Nullspur der Ebene $u_0v_0w_0$.

---

d) Ueber die gegenseitigen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen zu einander.

α) Lagen von Punkt und Gerade.

Frage 106. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung in axonometrischer Darstellung die Lage eines Punktes zu einer Geraden?

Antwort. Ein Punkt kann bekanntlich auf einer Geraden liegen oder nicht; ersteres wird der Fall sein, wenn das axonometrische Bild des Punktes und dessen Rissbilder auf dem axonometrischen Bilde der Geraden bezw. auf den ensprechenden Rissbildern liegen.

Decken sich nun die axonometrischen Bilder von Punkt und Gerade, nicht aber die Rissbilder oder umgekehrt, so liegt der Punkt nicht auf der Geraden, selbstverständlich auch dann nicht, wenn weder die axonometrischen noch die Rissbilder sich decken.

β) Lagen zweier Geraden.

Frage 107. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung in axonometrischer Darstellung die möglichen Lagen zweier Geraden zu einander?

Antwort. Es sind dreierlei Lagen der Geraden möglich, entweder schneiden sich die Geraden, oder sie sind parallel, oder sie liegen endlich windschief zu einander.

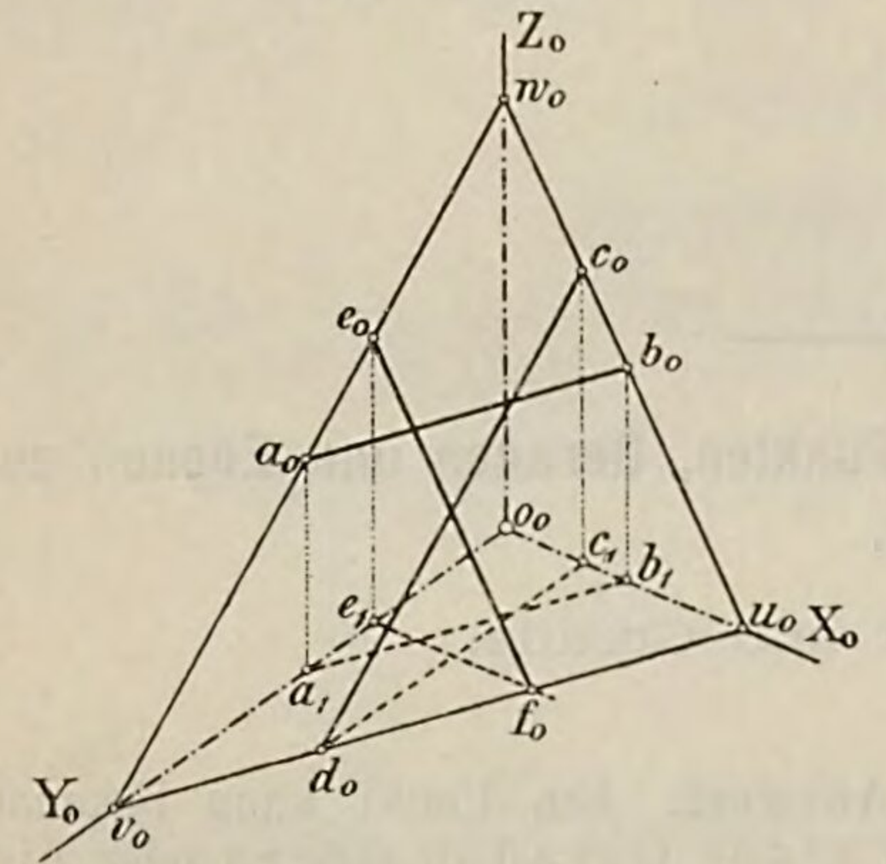
Im Falle des Schneidens werden die axonometrischen Bilder und Rissbilder beider Geraden das axonometrische Bild und Rissbild des Schnittpunktes gemein haben; im Falle des Parallelseins werden sowohl die axonometrischen, wie auch die Rissbilder unter sich parallel sein.

Liegen die Geraden endlich windschief, so können sowohl die axonometrischen wie die Rissbilder eine ganz beliebige Lage zu einander einnehmen.

γ) Lagen einer Geraden zu einer Ebene.

Frage 108. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung in axonometrischer Darstellung die möglichen Lagen einer Geraden zu einer Ebene?

Figur 159.



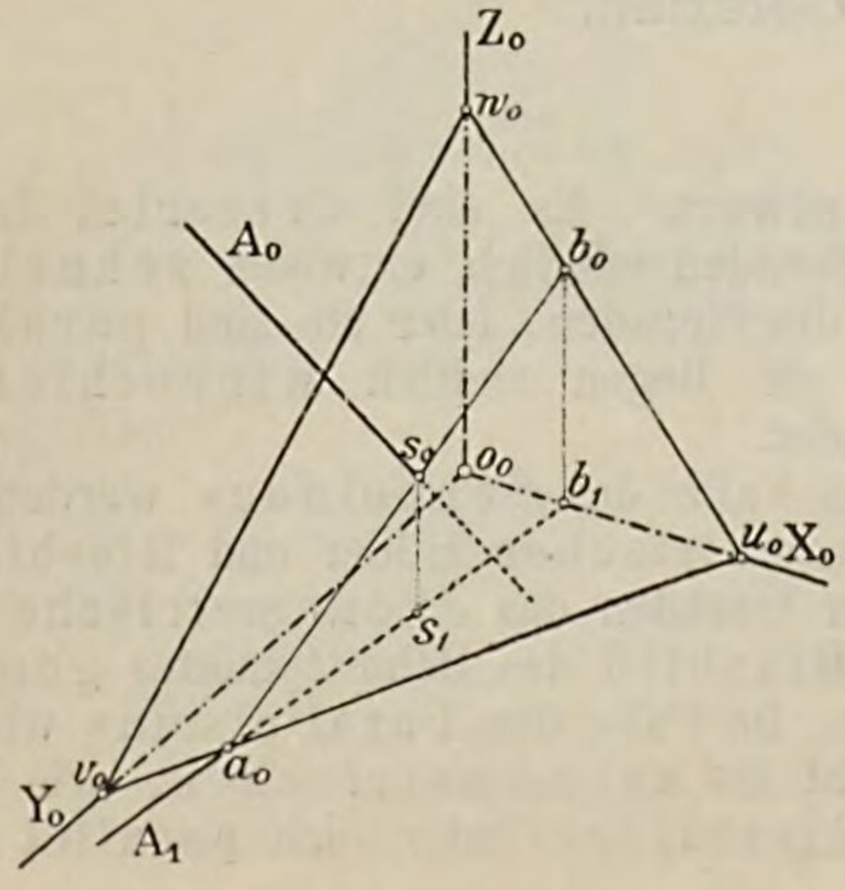
Erkl. 162. Anstatt von dem axonometrischen Grundriss A_1 auszugehen, hätte man auch das axonometrische Bild A_0 der Geraden A als axonometrisches Bild einer in der Ebene uvw liegenden Geraden betrachten und deren axonometrischen Grundriss bestimmen können. Fällt derselbe mit A_1 zusammen, so liegt die Gerade A in der Ebene, im anderen Falle nicht. Schneidet aber der so bestimmte Grundriss die Gerade A_1 in einem Punkte s_1, so ist dieser Punkt der axonometrische Grundriss des Durchschnittspunktes s der Geraden A und der Ebene uvw.

Antwort. Soll eine Gerade in der Ebene liegen, so muss sie zwei Punkte der Ebene enthalten. Nimmt man also auf den gegebenen Bestimmungsstücken zwei Punkte ganz beliebig an, so liegt deren Verbindungslinie in der Ebene. So liegen z. B. die Geraden ab, cd, ef, siehe Figur 159, in der Ebene uvw, weil die Punkte a, b, c, d, e, f auf den Spuren der Ebene angenommen sind.

Ist nun eine Gerade A und eine Ebene uvw, siehe Figur 160, ganz beliebig gegeben und will man untersuchen, welche Lage die Gerade A zur Ebene uvw einnimmt, so braucht man etwa nur das Rissbild A_1 aufzufassen als das Rissbild a_0b_1 einer in der Ebene liegenden Geraden und deren axonometrisches Bild a_0b_0 zu bestimmen. Fällt a_0b_0 mit A_0 zusammen, so liegt die Gerade A in der Ebene, im anderen Falle nicht.

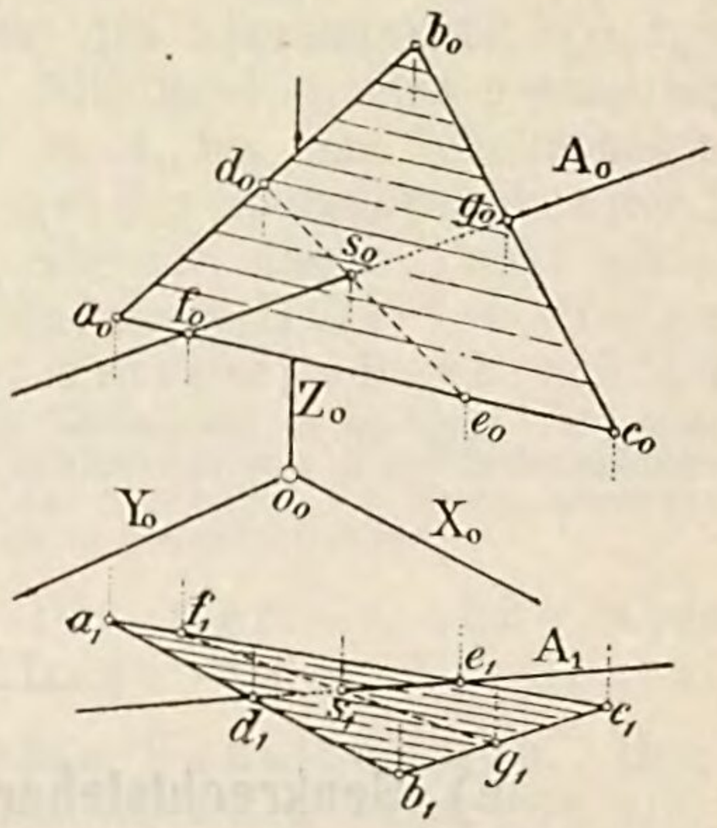
In der Figur 160 deckt sich die Gerade A_0 nicht mit a_0b_0, sondern schneidet dieselbe vielmehr in einem Punkte s_0, dem axonometrischen Bilde eines Punktes s, der in der Ebene und in der Geraden A liegt. Der Punkt s ist demnach der Schnittpunkt der Geraden A mit der Ebene uvw. Würde die Linie a_0b_0 parallel zu A_0 ausgefallen sein, so wäre dies ein Zeichen dafür, dass die Gerade A parallel zur Ebene uvw gerichtet wäre.

Figur 160.



Erkl. 163. Ist die Ebene nicht durch ihre Spuren, sondern etwa durch ein beliebiges Dreieck *abc*, siehe Figur 161, gegeben, so bleibt die Konstruktion die nämliche. Man nimmt wieder A_1 als Rissbild einer in der Ebene *abc* liegenden Geraden *de* und bestimmt deren axonometrisches Bild $d_1 e_1$, dessen Schnitt mit A_0 gibt das Bild s_0 des Schnittpunktes *s* der Geraden *A* mit der Ebene *abc*. In gleicher Weise kann man A_0 als Bild $f_0 g_0$ einer in der Ebene *abc* liegenden Geraden nehmen und ihren axonometrischen Grundriss $f_1 g_1$ bestimmen, dieser schneidet A_1 im Punkte s_1, dem axonometrischen Grundrisse des Schnittpunktes *s* der Geraden *A* und der Ebene *abc*.

Figur 161.



Erkl. 164. Unter allen Geraden einer Ebene haben jene eine besondere Lage, welche parallel zu den Spuren der Ebene laufen. Solcher Geraden gibt es drei Systeme, nämlich die Geraden parallel zu der Spur *uw*, *uv* und *vw* beziehungsweise. Sie führen den Namen „Spurparallelen“ oder „Hauptgeraden“ der Ebene.

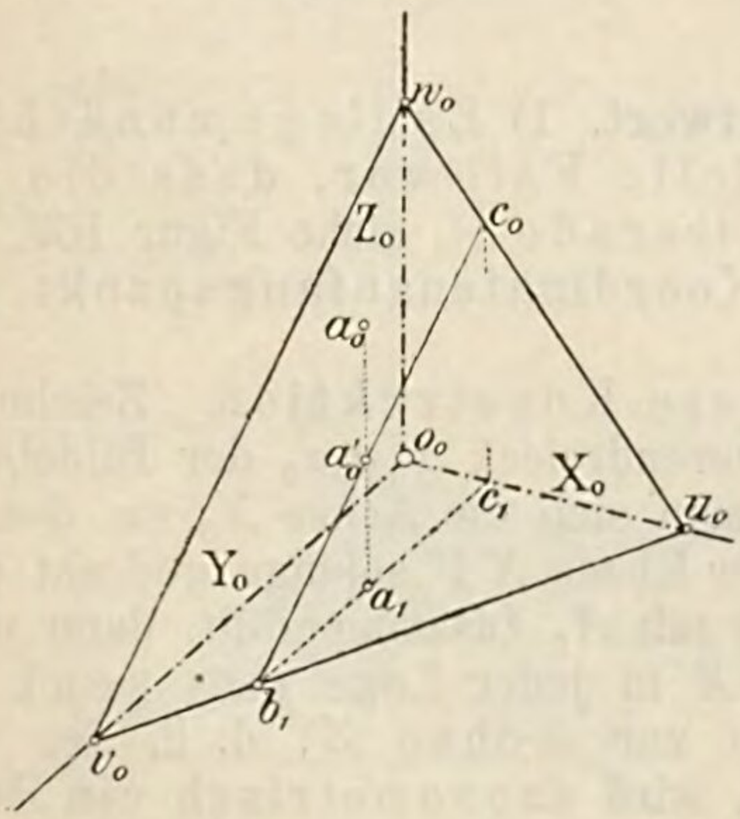
In die Figur 159 ist von jedem der drei Systeme eine Hauptgerade gezeichnet.

Die Gerade *ab* ist parallel zur Spur *uv*, die Gerade *cd* ist parallel zur Spur *vw*, die Gerade *ef* endlich ist parallel zur Spur *uw*.

δ) Lagen eines Punktes zu einer Ebene.

Frage 109. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung in axonometrischer Darstellung die möglichen Lagen eines Punktes zu einer Ebene?

Figur 162.



Antwort. Soll ein Punkt *a*, s. Figur 162, in einer Ebene *uvw* liegen, so muss durch ihn eine Gerade der Ebene gezogen werden können. Zieht man also durch a_1 die Gerade $b_1 c_1$ etwa gleich parallel zu Y_0 und bestimmt das axonometrische Bild $b_1 c_0$, so muss a_0 auf $b_1 c_0$ liegen, wenn der Punkt *a* der Ebene angehören soll. Dies ist in Figur 162 nicht der Fall, der Punkt *a* liegt daher nicht in der Ebene.

ε) Lagen zweier Ebenen.

Frage 110. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung in axonometrischer Darstellung die möglichen Lagen zweier Ebenen?

Antwort. Schneiden sich die Ebenen, so schneiden sich im allgemeinen auch die

Bilder ihrer Spuren. Sind die Ebenen aber parallel, so ist dies auch bezüglich der Bilder der in den nämlichen Koordinatenebenen liegenden Spuren der Ebene der Fall.

Sind von den Ebenen die Spurendreiecke nicht unmittelbar gegeben, so lassen sich dieselben, siehe Frage und Antwort 100, konstruieren; will man dieses aber vermeiden, so kann man aus der Projektionszeichnung unmittelbar die Lage der beiden Ebenen nicht erkennen, man wird vielmehr, so wie in Erkl. 161 gezeigt wurde, die Schnittlinie der beiden Ebenen zu konstruieren suchen, findet sich eine solche Schnittlinie, so schneiden sich die beiden Ebenen, im anderen Falle laufen sie zu einander parallel.

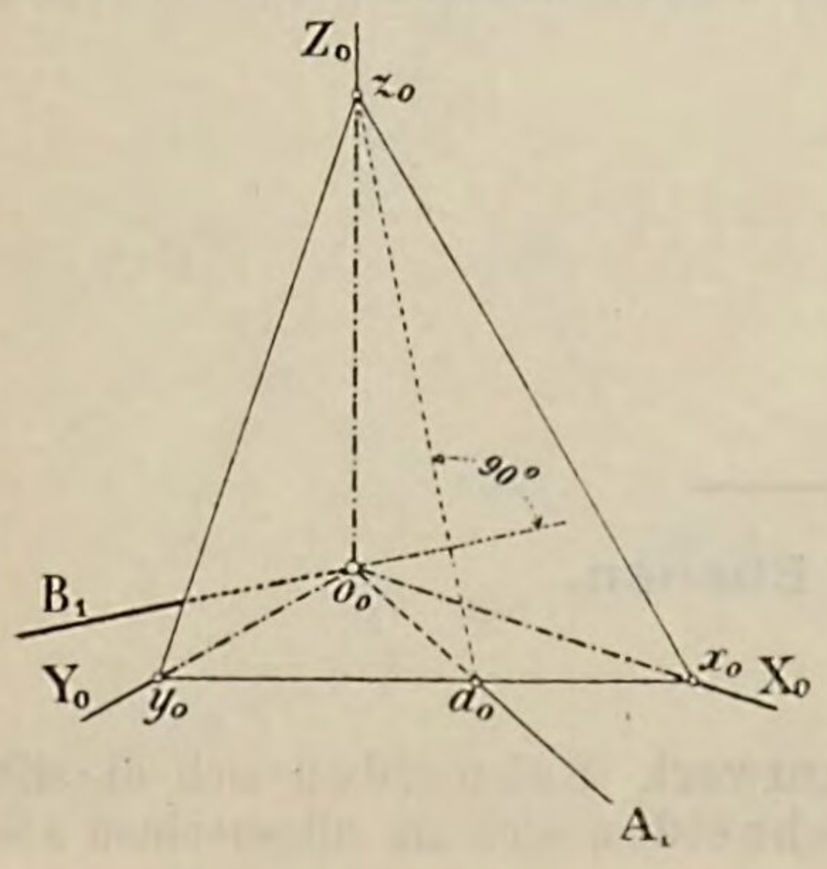
---

e) Senkrechtstehen einer Geraden zu einer Ebene.

Anmerkung 33. Liegt in einer der Koordinatenebenen ein rechter Winkel, so wird dessen axonometrisches Bild nicht wieder ein rechter Winkel sein, sondern eine von dem rechten Winkel verschiedene Grösse besitzen. Bezüglich der Lage des rechten Winkels sind nun zweierlei Fälle möglich, entweder laufen nämlich die Schenkel des Winkels zu den Koordinatenachsen parallel, dann werden auch die axonometrischen Bilder der Schenkel des Winkels parallel gerichtet sein zu den Bildern der Achsen, oder es haben die Winkelschenkel gegen die Koordinatenachsen eine ganz beliebige Lage, dann werden auch die axonometrischen Bilder der Schenkel eine bestimmte, jedoch nicht parallele Lage zu den Bildern der Achsen einnehmen. Im Nachfolgenden soll gezeigt werden, wie man sowohl in einer der Koordinatenebenen als auch in einer beliebig gegen die Koordinatenebenen geneigten Ebene einen rechten Winkel zeichnet, bezw. zu diesen Ebenen senkrechte Gerade zieht.

Frage 111. Wie zeichnet man vom Koordinatenanfangspunkte zu einer in der Koordinatenebene XY liegenden Geraden eine Senkrechte, d. h. wie bestimmt man deren axonometrisches Bild?

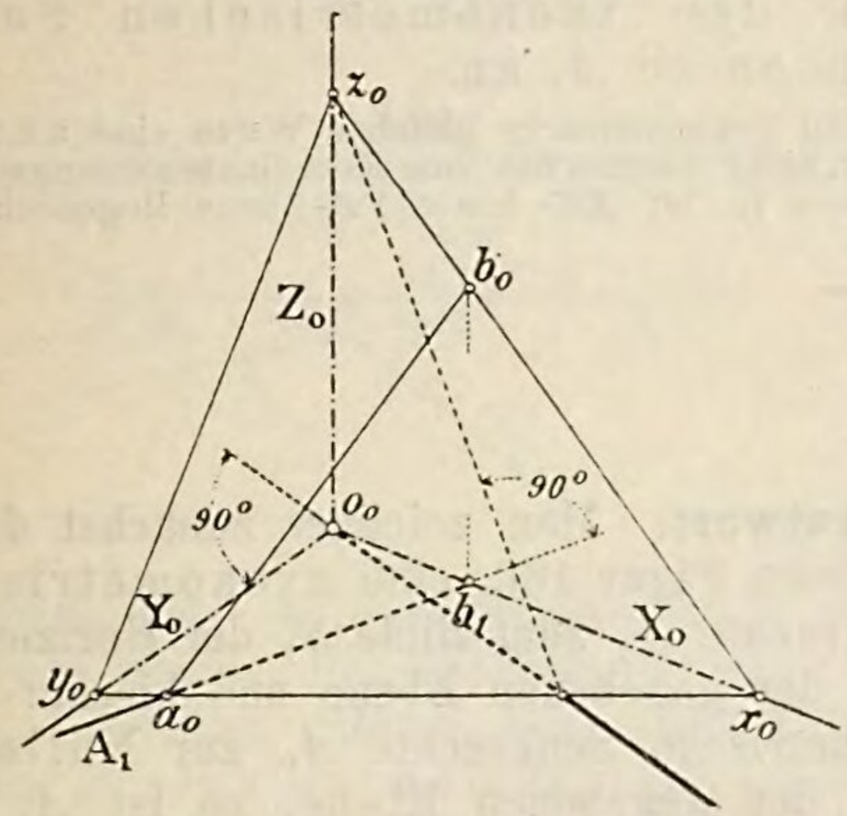
Figur 163.



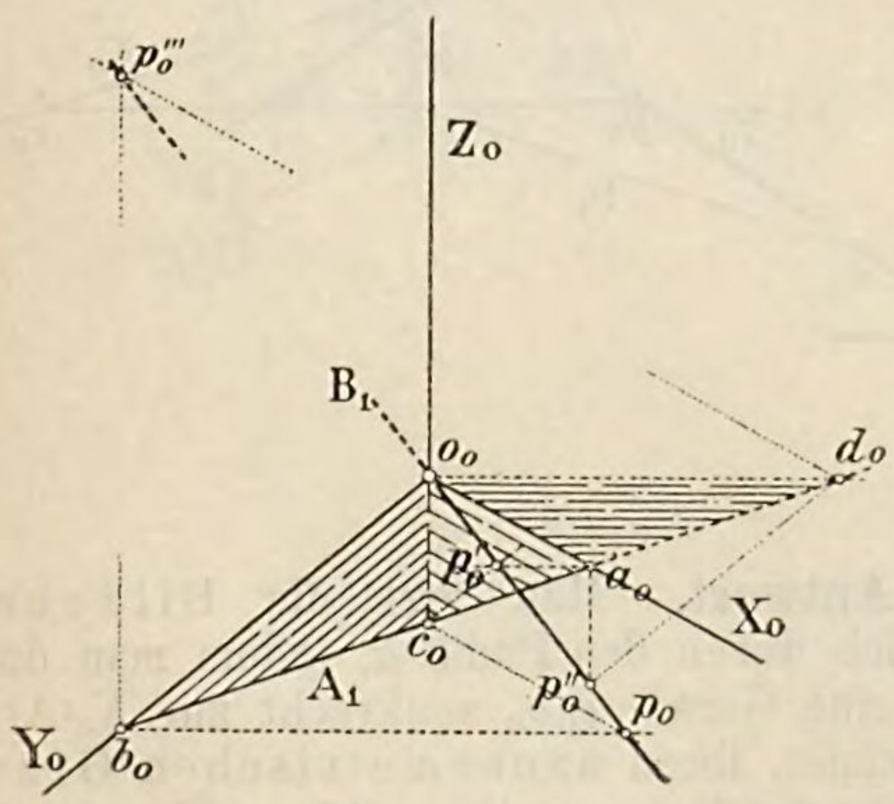
Antwort. 1) Es liege zunächst der spezielle Fall vor, dass die gegebene Gerade A, siehe Figur 163, durch den Koordinatenanfangspunkt selbst gehe.

Erste Konstruktion. Zeichnet man ein Spurendreieck $x_0 y_0 z_0$ der Bildebene, so kann man sich die Achse X_0 um den Punkt o in der Ebene XY solange gedreht denken, bis sie mit A_1 zusammenfällt, dann wird die Linie X in jeder Lage stets senkrecht bleiben zur Achse Z, d. h. der Winkel $z_0 o_0 a_0$ wird axonometrisch ein Rechter sein. Nimmt man daher die Linie $z_0 a_0$ als Seite eines Spurendreieckes der Bildebene, so steht die dritte zur Ebene zoa senkrechte Achse B_1 geometrisch senkrecht zu $z_0 a_0$. Diese ist somit die gesuchte axonometrische Senkrechte zu A_1.

Figur 164.



Figur 165.



Zweite Konstruktion. Hätte man, siehe Figur 163, die dritte Seite des zu den Ecken z_0, a_0 gehörigen Spurendreieckes noch gezeichnet, so stünde diese Linie geometrisch senkrecht zu A_1, woraus folgende weitere Konstruktion für die zu A_1 axonometrisch Senkrechte B_1 folgt. Man zeichnet das Spurendreieck $x_0 y_0 z_0$ der Bildebene, fällt durch z_0 eine geometrische Senkrechte zu A_1 bis zum Schnittpunkte mit der Seite $x_0 y_0$ des Spurendreieckes der Bildebene und verbindet diesen Punkt mit o_0. Die Verbindungslinie ist die gesuchte axonometrische Senkrechte B_1 zu A_1.

Man konstruiere in gleicher Weise eine axonometrische Senkrechte vom Koordinatenanfangspunkte auf eine in der XZ- bezw. YZ-Ebene liegende und durch den Punkt o gehende Gerade.

2) Die Gerade habe eine beliebige Lage in der XY-Ebene.

Erste Konstruktion. Man zeichnet zunächst wieder, s. Figur 164, ein Spurendreieck $x_0 y_0 z_0$ der Bildebene, fällt von z_0 aus eine geometrische Senkrechte zu A_1 und verbindet deren Schnittpunkt mit $x_0 y_0$ mit o_0. Diese Verbindungslinie (sie soll in der Figur 164 B_1 heissen) ist die gesuchte axonometrische Senkrechte zu A_1.

Zweite Konstruktion. Zeichnet man durch o_0 eine Parallele zu A_1 bis zum Schnitt mit $x_0 y_0$ und verbindet diesen Punkt mit z_0, so steht die gesuchte axonometrische Senkrechte geometrisch senkrecht auf dieser Verbindungslinie.

Dritte Konstruktion. Die vorhergehende Konstruktion lässt sich insoferne noch vereinfachen, als man in der Nullspur $a_0 b_0$ der horizontalprojizierenden Ebene A_1 ebenfalls eine Gerade hat, zu welcher die gesuchte axonometrische Senkrechte zu A_1 geometrisch senkrecht steht.

Vierte Konstruktion. Ist A_1, siehe Figur 165, die Gerade, zu welcher eine axonometrische Senkrechte errichtet werden soll, so betrachte man zunächst das Dreieck $o_0 b_0 c_0$. In demselben lassen sich in einfacher Weise die Bilder der drei Höhen ermitteln, denn zur Seite $o_0 c_0$ gehört als Höhe die geometrische Senkrechte zu $o_0 c_0$ durch b_0, zur Seite $o_0 b_0$ gehört als Höhe die Parallele zu X_0 durch c_0 und beide Höhen schneiden sich im Punkte p_0; die Linie $o_0 p_0$ ist also die zu $b_0 c_0$ gehörige Höhe, d. h. die gesuchte axonometrische Senkrechte B_1 zu A_1.

Die gleiche Konstruktion lässt sich ausführen unter Benützung der Dreiecke $o_0 a_0 c_0$, $o_0 c_0 d_0$ und $o_0 b_0 d_0$. Man erhält hierdurch beziehungsweise die Höhenschnittpunkte p_0', p_0'' und p_0'''; die sämtlichen Punkte p_0, p_0', p_0'' und p_0''' gehören der Geraden B_1, d. h. der axonometrischen Senkrechten zu A_1 an.

Man konstruiere in gleicher Weise eine axonometrische Senkrechte vom Koordinatenanfangspunkt zu einer in der XZ- bezw. YZ-Ebene liegenden Geraden.

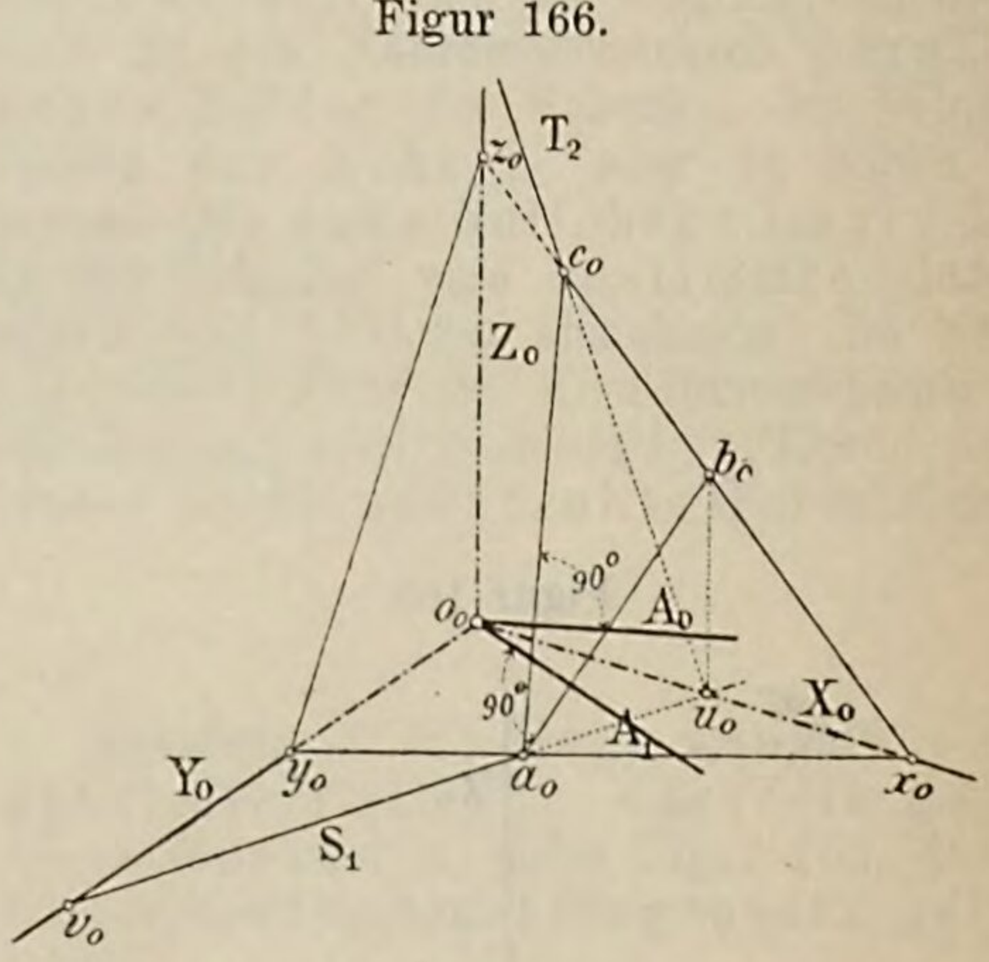
Frage 112. Wie zeichnet man axonometrisch vom Koordinatenanfangspunkte eine Senkrechte auf eine gegebene Ebene?

Erkl. 165. Man hätte in gleicher Weise auch eine axonometrische Senkrechte durch o_0 zu T_2 bezw. U_3 fällen können, so hätte dieselbe den axonometrischen Aufriss bezw. Seitenriss der gesuchten Senkrechten dargestellt.

Erkl. 166. Auf Grund der Antwort der Frage 112 kann man nunmehr auch von einem ganz willkürlich gegebenen Punkte eine Senkrechte zu einer Ebene fällen. Man braucht ja nur so zu verfahren wie in Antwort der Frage 112 und hierauf durch den gegebenen Punkt, d. h. durch dessen Bild und Rissbild eine Parallele zu A_0 bezw. A_1 zu ziehen.

Antwort. Man zeichnet zunächst durch o_0, siehe Figur 166, eine axonometrische Senkrechte A_1 zum Bilde S_1 der Horizontalspur der gegebenen Ebene und hierauf eine geometrische Senkrechte A_ω zur Nullspur $a_0 b_0$ der gegebenen Ebene, so ist A_1 der axonometrische Grundriss, A_0 das axonometrische Bild der gesuchten Senkrechten.

Figur 166.

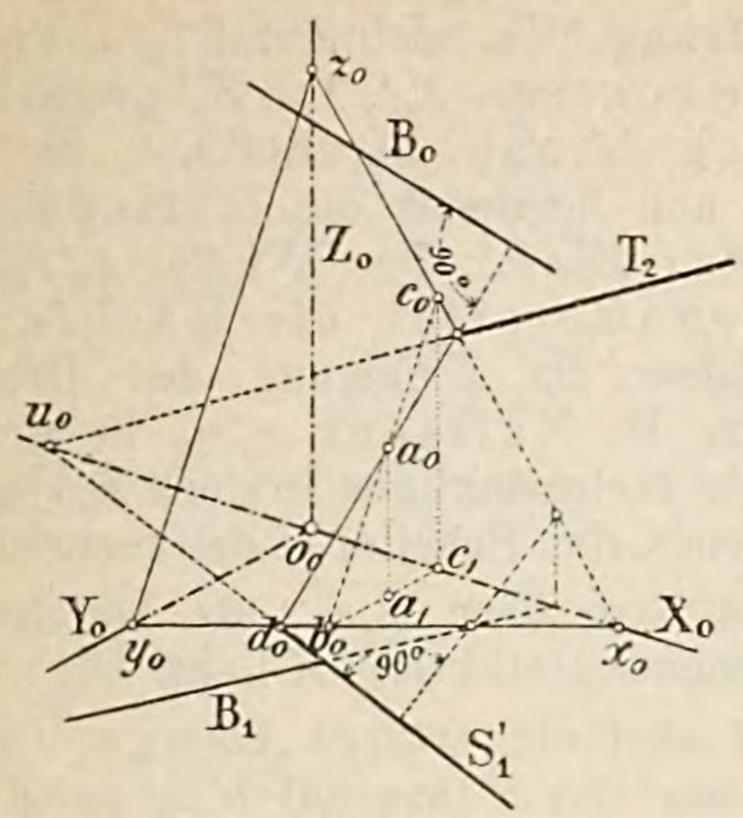


Frage 113. Wie legt man durch einen beliebig gegebenen Punkt a, siehe Figur 167, eine Ebene senkrecht zu einer gegebenen Geraden B?

Antwort. Man legt die Bildebene gleich durch den Punkt a, indem man durch a_0 eine Gerade $c_0 b_0$ senkrecht zur X_0-Achse zeichnet, ihren axonometrischen Grundriss parallel zu Y_0 wählt und nun ihre Spuren b_0 und c_0 mit der XY- bezw. XZ-Ebene aufsucht. Durch c_0 und b_0 gehen die Seiten $z_0 x_0$ bezw. $x_0 y_0$ des Spurendreieckes der Bildebene hindurch.

Nunmehr zeichnet man durch a_0 eine geometrische Senkrechte zu B_0 als

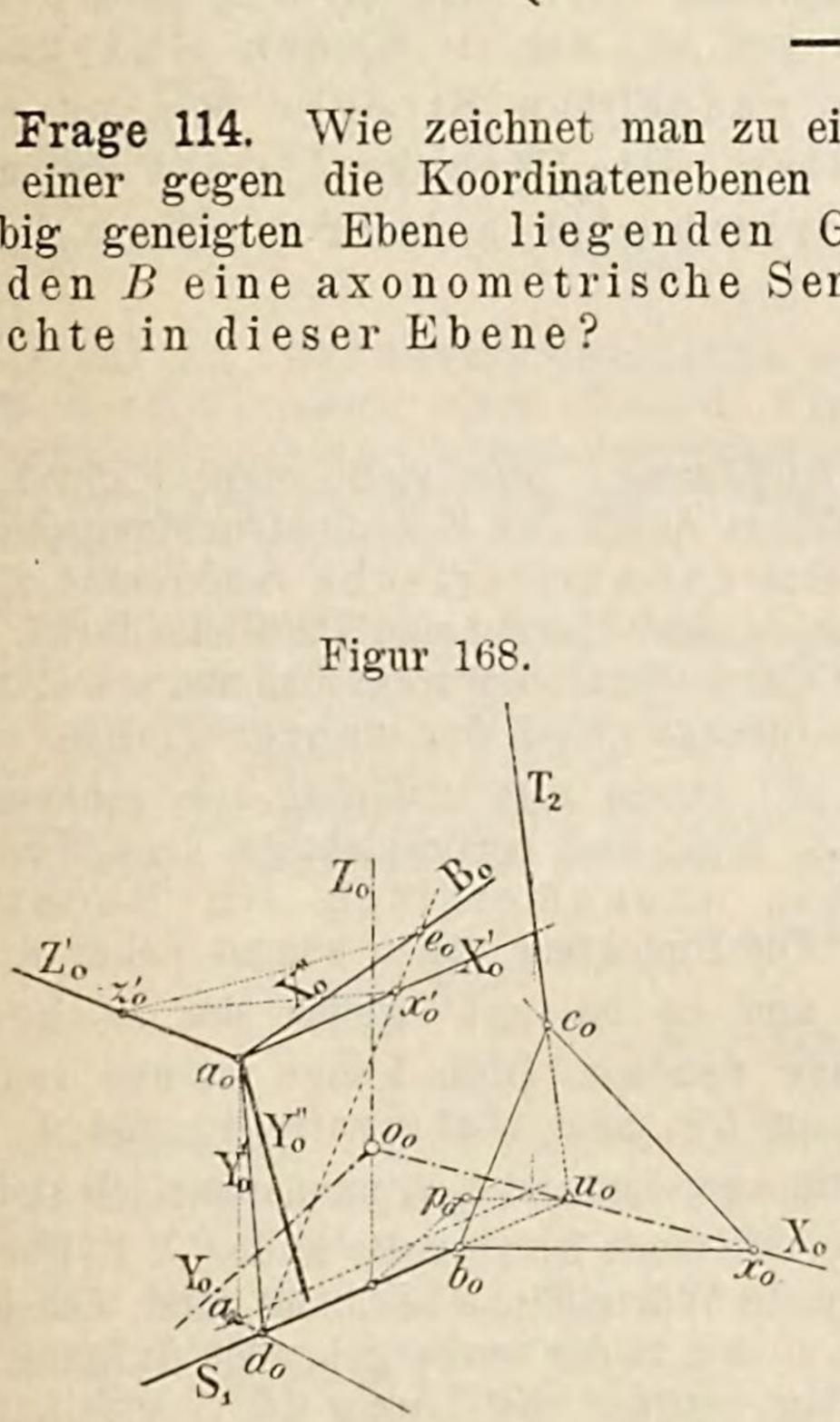
Figur 167.



Nullspur der gesuchten Ebene und hierauf durch ihren Schnittpunkt d_0 mit $x_0 y_0$ eine axonometrische Senkrechte zu B_1, oder was dasselbe ist, eine geometrische Senkrechte zur Nullspur der horizontal projizierenden Ebene B_1, so gibt diese Linie das Bild S_1' der Horizontalspur der gesuchten Ebene, sie schneidet die Verlängerung von X_0 in u_0, welcher Punkt zu verbinden ist mit dem Schnittpunkte der Seite $z_0 x_0$ und der Nullspur $a_0 d_0$, um das Bild T_2 der Vertikalspur der gesuchten Ebene zu erhalten. Diese ist daher die Ebene $S_1 T_2$.

Frage 114. Wie zeichnet man zu einer in einer gegen die Koordinatenebenen beliebig geneigten Ebene liegenden Geraden B eine axonometrische Senkrechte in dieser Ebene?

Figur 168.



Antwort. Ist, s. Fig. 168, $S_1 T_2$ die gegebene Ebene und $a_0 a_1$ ein beliebiger Punkt in ihr, durch welchen die gegebene Gerade B_0 hindurchgeht, so zieht man durch a_0 eine Parallele X_0' zur Horizontalspur S_1 der gegebenen Ebene und zeichnet zu dieser Linie in der Ebene $S_1 T_2$ eine axonometrische Senkrechte, indem man durch o_0 die axonometrische Senkrechte $o_0 p_0$ zu S_1 fällt, durch a_1 hierzu eine Parallele zieht und deren Schnittpunkt d_0 mit S_1 mit a_0 verbindet; $a_0 d_0$ oder Y_0' steht dann axonometrisch senkrecht zu X_0'. In der geometrischen Senkrechten Z_0' durch a_0 zur Nullspur $b_0 c_0$ der gegebenen Ebene erhält man endlich eine dritte Linie Z_0', welche zu den beiden Geraden X_0' und Y_0' axonometrisch senkrecht steht. Man hat also ein neues Achsenkreuz $X_0' Y_0' Z_0'$, für welches die Ebene $S_1 T_2$ eine Koordinatenebene ist. Die Gerade B liegt aber in dieser Koordinatenebene, die zu B_0 axonometrische Senkrechte Y_0'' kann daher, wie in Antwort der Frage 111, erster Fall, gezeigt wurde, konstruiert werden. Man verschafft sich nämlich die Ecke z_0' des Spurendreieckes der Bildebene für das Achsenkreuz $X_0' Y_0' Z_0'$, so steht die gesuchte Linie Y_0'' geometrisch senkrecht auf der Verbindungslinie $z_0' e_0$.

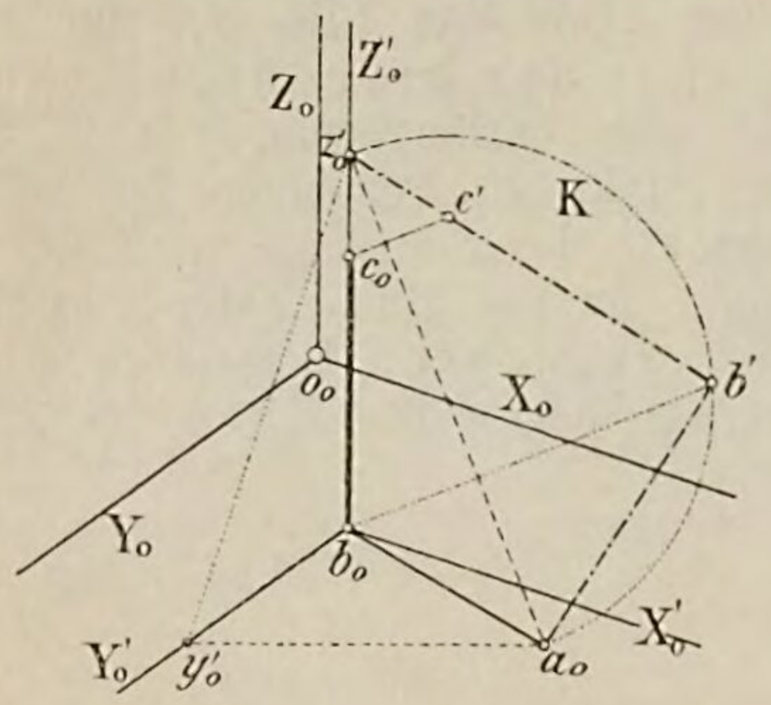
---

f) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 98. In der XY-Ebene ist eine Gerade ab gegeben. Man soll durch einen ihrer Endpunkte etwa b eine

Gerade parallel zur Z-Achse zeichnen und hierauf von b aus eine Strecke gleich der wahren Länge von $\overline{ab}$ abtragen.

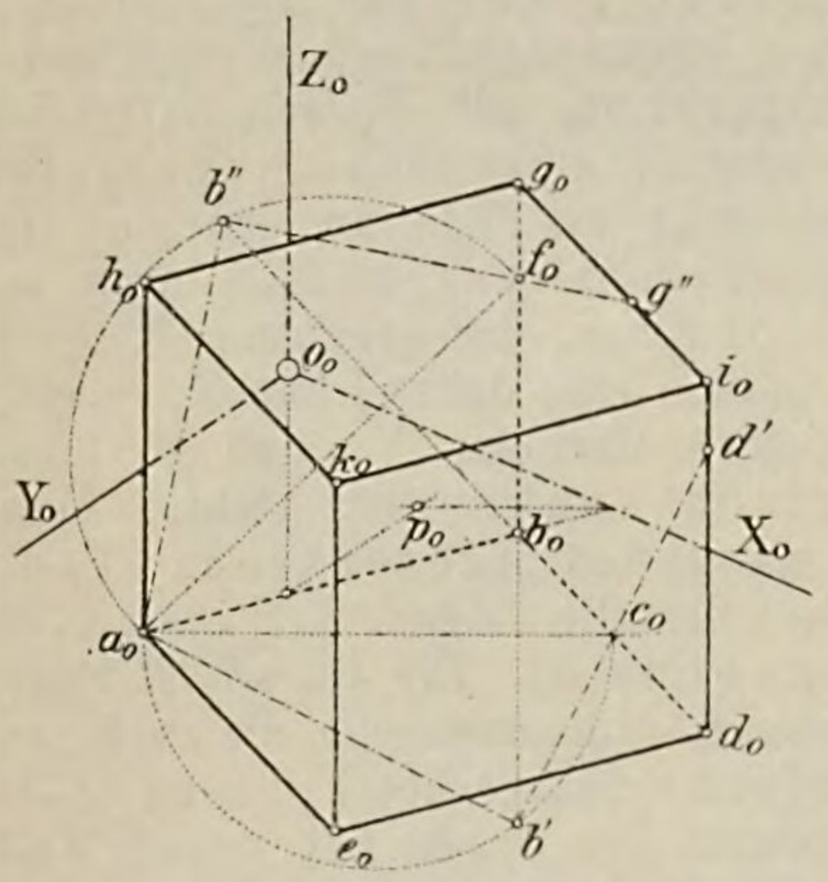
Figur 169.



Auflösung. Man zieht durch b_0, s. Fig. 169, ein Achsenkreuz X_0', Y_0', Z_0' parallel zu dem gegebenen, legt durch a_0 die Bildebene und bestimmt die Nullspur $z_0'a_0$ der Ebene $Z'ab$. Der Winkel $z_0'b_0a_0$ ist nun axonometrisch ein Rechter. Es wird daher die Umlegung des Dreieckes $z'ba$ um die Nullspur $z_0'a_0$ in die Bildebene ein rechtwinkliges Dreieck $z_0b'a_0$ sein, für welches der Scheitel b' des rechten Winkels auf dem über $\overline{a_0z_0'}$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreise K liegt. Die Strecke $\overline{a_0b'}$ ist also die wahre Länge von $\overline{ab}$, welche nur von b' aus auf $b'z_0'$ nach c' abzutragen ist, um in c_0 den Endpunkt der gesuchten Strecke $\overline{b_0c_0}$ zu erhalten. Die Strecke $\overline{b_0c_0}$ ist axonometrisch gleich der Strecke $\overline{a_0b_0}$.

Aufgabe 99. In der XY-Ebene ist eine Gerade ab durch ihr axonometrisches Bild a_0b_0 als Kante eines Würfels gegeben. Man soll das axonometrische Bild des Würfels zeichnen.

Figur 170.



Auflösung. Man zieht, siehe Figur 170, zunächst durch den Koordinatenanfangspunkt o_0 eine axonometrische Senkrechte o_0p_0 zu a_0b_0 und hierzu eine Parallele durch b_0. Auf dieser Parallelen trägt man nun von b_0 aus eine Strecke gleich der wahren Länge von $\overline{ab}$ ab, indem man zunächst a_0c_0 senkrecht zu Z_0 zieht und berücksichtigt, dass Winkel $a_0b_0c_0$ axonometrisch ein Rechter ist. Die Umlegung von b kommt daher nach b', und es ist $\overline{a_0b'}$ gleich der wahren Länge von $\overline{ab}$. Diese Länge ist nun von b' aus auf $b'c_0$ nach $b'd'$ abzutragen und d_0 zu bestimmen, dann ist $\overline{b_0d_0}$ axonometrisch gleich $\overline{a_0b_0}$. Hiermit ist aber die in der XY-Ebene liegende Würfelfläche bestimmt, und man hat nur, so wie in der vorhergehenden Aufgabe 98 gezeigt wurde, die Länge der Würfelkante von den Punkten a_0, b_0, d_0 und c_0 auf den Parallelen zur Z-Achse abzutragen, und die sich ergebenden Punkte miteinander zu verbinden, so ist hierdurch das axonometrische Bild des Würfels dargestellt.

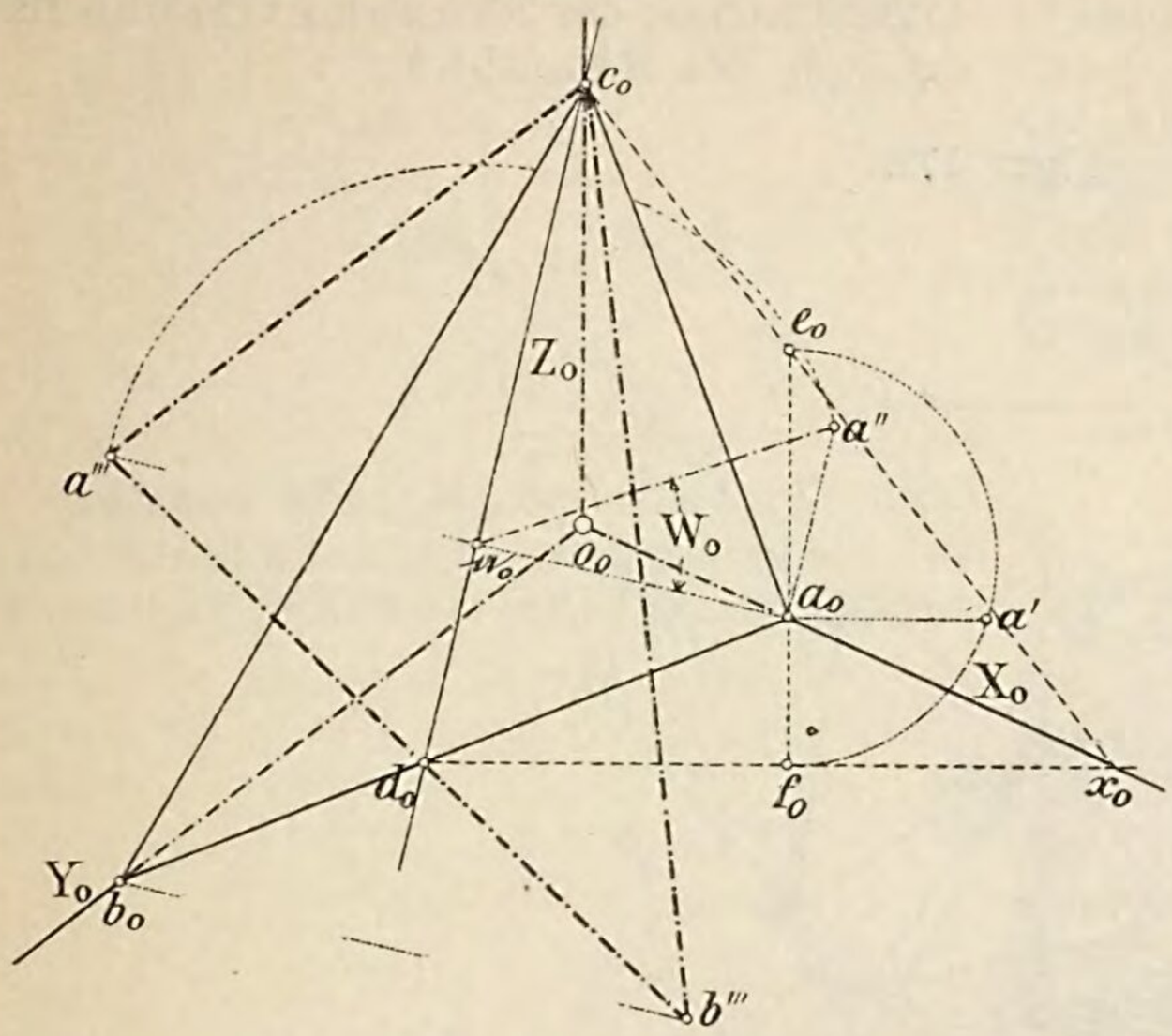
---

g) Das Umlegen einer Ebene in die Bildebene.

Frage 115. Wie konstruiert man in der Projektionszeichnung in axonometrischer Darstellung die Umlegung einer ebenen Figur in die Bildebene?

Antwort. Ist $a_0b_0c_0$, siehe Figur 171, das Spurendreieck der gegebenen Ebene, so legt man zweckmässig die Bildebene gleich durch den Punkt c, so dass die Linie c_0x_0

Figur 171.



Erkl. 167. Das axonometrische Bild und die Umlegung einer ebenen Figur sind wieder affine Figuren, desgleichen auch die Umlegung und die einzelnen Rissbilder der Figur.

Erkl. 168. Das Dreieck $a_0 \mathfrak{a}_0 a''$ heisst wieder das Konstruktionsdreieck des Punktes a. In demselben ist bei $\mathfrak{a}_0$ Winkel W_0 der Ebene abc mit der Bildebene gegeben. In Antwort der Frage 115 ist also zugleich die Bestimmung des Winkels einer Ebene mit der Bildebene enthalten.

α) Gelöste Aufgaben.

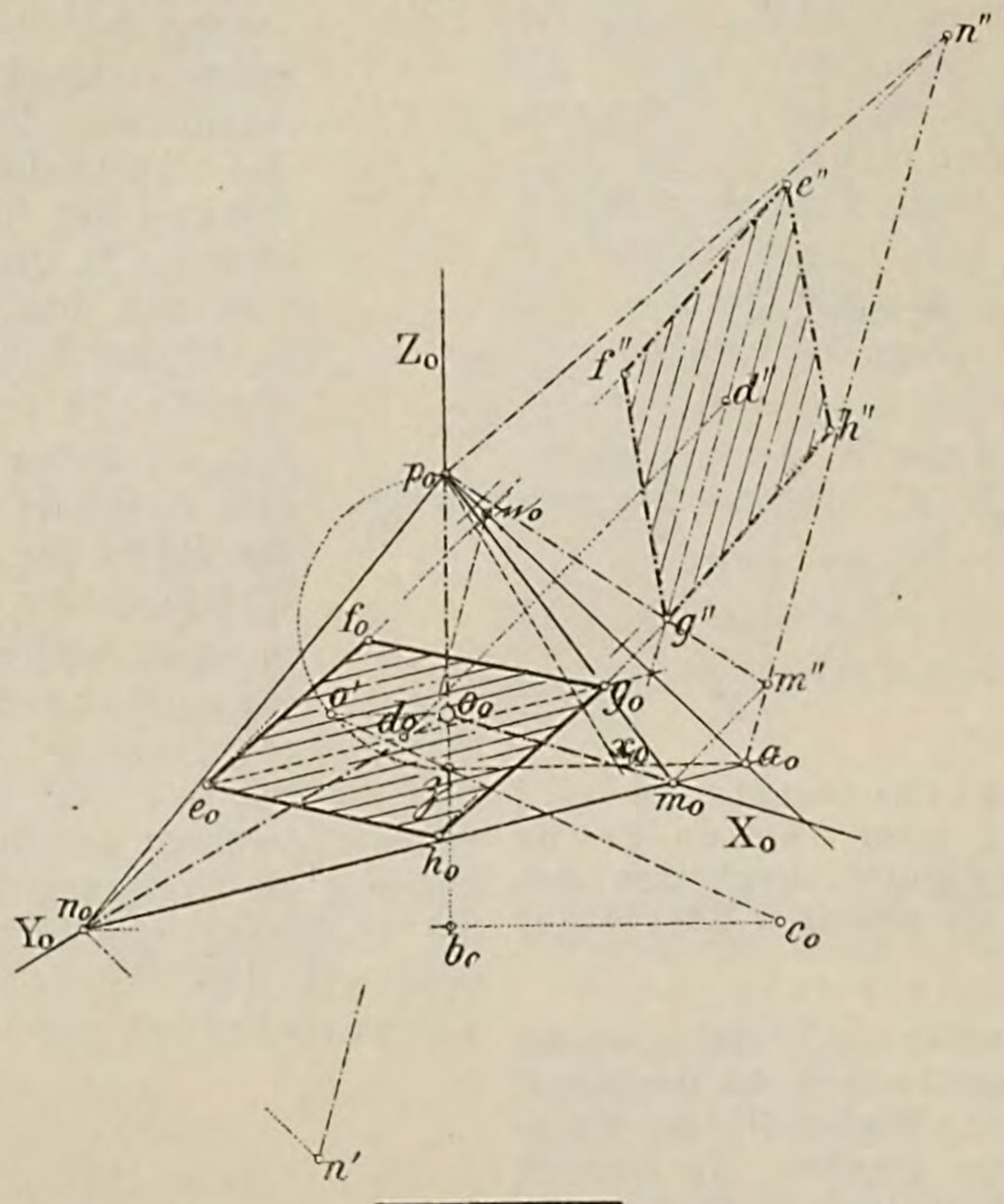
Aufgabe 100. In einer durch die Bilder ihrer Spuren gegebenen Ebene mnp, s. Figur 172, liegt ein Punkt d als Mittelpunkt eines Rhombus von bekannter Seitenlänge. Ausserdem soll die eine den Punkt d enthaltende Diagonale parallel laufen zur Spur mn der gegebenen Ebene. Es ist die wahre Gestalt und das axonometrische Bild des Rhombus zu zeichnen.

Auflösung. Man legt die Bildebene durch den Punkt p, bestimmt die Nullspur $p_0 a_0$ der gegebenen Ebene, sowie den Abstand $\overline{b_0 c_0}$ des Punktes n von der Bildebene. Mittels des Konstruktionsdreieckes $n_0 \mathfrak{n}_0 n'$ ergibt sich die Umlegung n'' von n und damit auch jene des Spurendreieckes $m_0 n_0 p_0$. Durch die Parallele durch d_0 zu $m_0 n_0$ und ihre Umlegung findet man die Umlegung d' von d und kann nun, so wie die Aufgabe verlangt, in der Umlegung die wahre Gestalt $e''f''g''h''$ des Rhombus zeichnen; aus dieser findet sich dann als affine

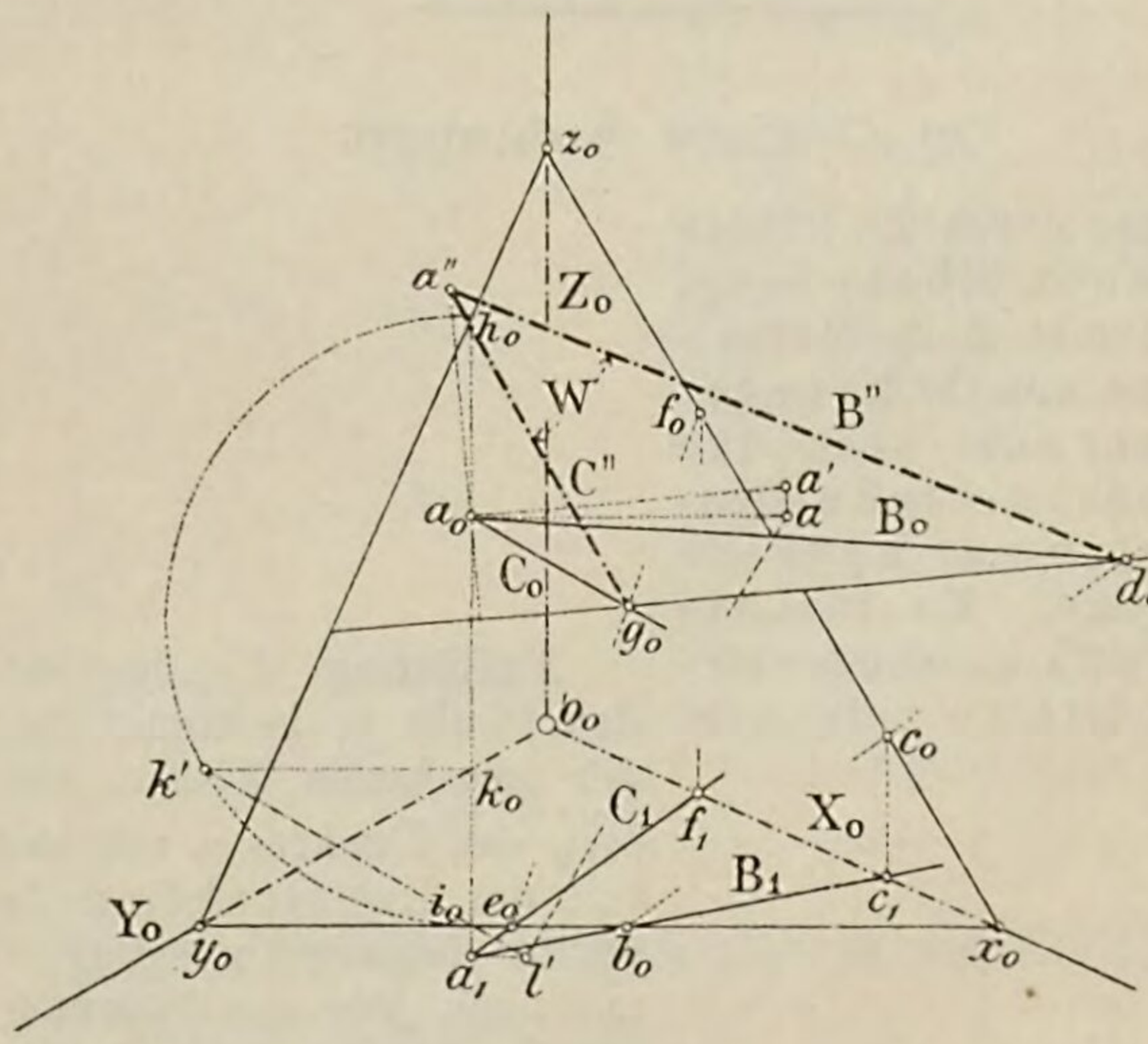
senkrecht zu Y_0 eine Seite des Spurendreieckes der Bildebene darstellt. Verschafft man sich nunmehr die Nullspur $c_0 d_0$ der Ebene, so wird um diese die Umlegung der Ebene abc in die Bildebene stattfinden. Man bedarf zur Ausführung der Konstruktion noch des Abstandes eines beliebigen Punktes der Ebene, von der Bildebene z. B. des Punktes a. Zieht man nun durch a_0 die Senkrechte $a_0 a'''$ zur Nullspur $c_0 d_0$ und konstruiert das rechtwinklige Dreieck $a_0 \mathfrak{a}_0 a''$, wobei $\overline{a_0 a''} = a_0 a'$ gleich dem Abstande des Punktes a von der Bildebene ist, so gelangt die Umlegung des Punktes a nach a''' in einer Entfernung $\overline{\mathfrak{a}_0 a'''} = \overline{\mathfrak{a}_0 a''}$ von $c_0 d_0$ zu liegen. Hiermit ist aber zunächst die Umlegung $c_0 a'''$ von $c'a$ und in $a'''d_0$ auch jene von ad gegeben; auf der Linie $a'''d_0$ liegt überdies die Umlegung b''' von b, wodurch die Umlegung $c_0 a'''b'''$, d. h. die wahre Gestalt des Dreieckes abc direkt axonometrisch gezeichnet ist.

Figur zu $e''f''g''h''$, bezüglich p_0a_0 als Affinitätsachse, das axonometrische Bild $e_0f_0g_0h_0$ des Rhombus.

Figur 172.



Figur 173.



Aufgabe 101. Man soll die wahre Grösse des Winkels zweier Geraden konstruieren.

Auflösung. Sind, siehe Figur 173, durch B_0B_1 und C_0C_1 die beiden Geraden gegeben, so nehme man das Spurendreieck $x_0y_0z_0$ beliebig an (d. h. stets so, dass seine Seiten

senkrecht zu den Achsenbildern stehen) und bestimme die Nullspuren d_0 und g_0 von B und C, so erhält man in $d_0 g_0$ die Nullspur der Ebene BC. Um diese lege man die letztere in die Bildebene um, wodurch der Punkt a nach a'' gelangt. Die Umlegungen B'' und C'' schliessen den gesuchten Winkel W in wahrer Grösse ein.

Aufgabe 102. Man soll den Winkel einer Geraden mit einer beliebigen Ebene in wahrer Grösse zeichnen.

Auflösung. Der Weg zur Lösung der Aufgabe bleibt derselbe wie früher, d. h. man fällt von einem beliebig gewählten Punkte der Geraden auf die Ebene eine Senkrechte, siehe Frage und Antwort 112, und bestimmt den Winkel dieser Senkrechten mit der gegebenen Geraden, siehe Aufgabe 102. Der Komplementswinkel dieses Winkels ist der gesuchte.

Aufgabe 103. Man soll den Abstand eines Punktes von einer beliebigen Ebene konstruieren.

Auflösung. Man fällt von dem Punkte eine Senkrechte auf die Ebene, bestimmt ihren Durchschnittspunkt mit der letzteren, siehe Frage und Antwort 108, und hierauf die wahre Länge der Strecke vom gegebenen Punkte bis zum Durchschnittspunkte, siehe Frage und Antwort 102.

Aufgabe 104. Man soll den Winkel zweier Ebenen konstruieren.

Auflösung. Von einem beliebigen Punkte, zweckmässig gleich von dem Koordinatenanfangspunkte fällt man Senkrechte zu den beiden Ebenen und bestimmt deren Winkel in wahrer Grösse. Dieser Winkel ist dann entweder gleich dem Winkel der beiden Ebenen selbst oder gleich dessen Supplementswinkel, je nachdem der angenommene Punkt im Winkelraume der Ebenen selbst oder in deren Nebenwinkelraume gelegen ist.

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 105. Man konstruiere:

a. den Abstand zweier parallelen Geraden,

b. den kleinsten Abstand zweier windschiefen Geraden.

Aufgabe 106. Man führe die im ersten Bande dieses Lehrbuches durchgeführten Dreikantskonstruktionen in axonometrischer Darstellung durch.

Aufgabe 107. Man konstruiere:

a. den Durchschnitt einer Ebene mit einem Prisma bezw. einer Pyramide,
b. den Durchschnitt einer Geraden mit einem Prisma bezw. einer Pyramide,
c. den Durchschnitt zweier Prismen,
d. den Durchschnitt eines Prismas mit einer Pyramide,
e. den Durchschnitt zweier Pyramiden in axonometrischer Darstellung.

Aufgabe 108. Man konstruiere die Bilder der regelmässigen Polyeder, wenn die Länge einer Kante gegeben ist und eine Seitenfläche in der XY-Ebene liegen soll.

---

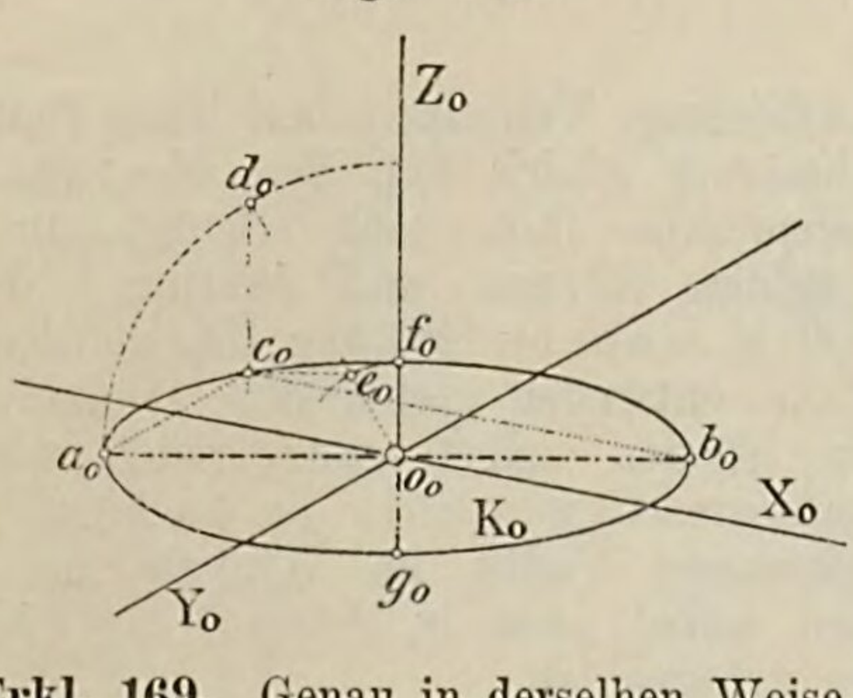
h) Axonometrische Darstellung eines Kreises.

Anmerkung 34. Bereits in einer früheren Aufgabe, siehe Aufgabe 84 und 91, wurde das axonometrische Bild eines in der XY-Ebene liegenden Kreises dargestellt mit Zuhilfenahme seiner rechtwinkligen Projektion, mittels welcher man sich auf den Achsenbildern X_0 und Y_0 zwei conjugierte Durchmesser verschaffte, aus welchen sich hierauf in einfacher Weise die Achsen des Kreisbildes konstruieren liessen, wodurch sich dieses dann selbst punktweise ergab. Im Folgenden sollen einige wichtige Konstruktionen der Kreisbilder auseinander gesetzt werden, Konstruktionen, die unabhängig sind von der rechtwinkligen Projektion des Kreises auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2.

α) Der Kreis liegt in einer der Koordinatenebenen.

Frage 116. Wie konstruiert man in der Projektionszeichnung in axonometrischer Darstellung das Bild eines in der XY-Ebene liegenden Kreises, wenn dessen Halbmesser als bekannt vorausgesetzt werden soll?

Figur 174.



Antwort. Fällt der Mittelpunkt des Kreises mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammen, so ist a_0, siehe Figur 174, der Mittelpunkt des Kreisbildes K_0, dieses selbst ist eine Ellipse, deren grosse Achse $\overline{a_0 b_0}$ senkrecht steht zur Z_0-Achse und gleich ist dem Kreisdurchmesser, während die kleine Achse in die Z_0-Achse fällt und ihrer Länge nach gleich ist $d \cdot \cos W_{xy}$, wenn mit d der gegebene Kreisdurchmesser bezeichnet wird. Ohne die Kenntnis von W_{xy} ergibt sich nun die Länge der kleinen Achse, wenn man durch die Endpunkte a_0 und b_0 der grossen Achse Parallele zu den Achsen Y_0 und X_0 zieht und berücksichtigt, dass, da der Winkel $a_0 c_0 b_0$ axonometrisch ein Rechter ist, der Punkt c_0 auf der Ellipse K_0 liegen muss. Man kennt nun von der Ellipse K_0, die eine Achse der Grösse und Lage nach, ausserdem einen Punkt c_0 und findet hieraus, wie die Figur zeigt, den einen Endpunkt f_0 der kleinen Achse und damit auch deren anderen Endpunkt g_0.

Erkl. 169. Genau in derselben Weise, wie in Antwort der Frage 116 gezeigt wurde, kann man verfahren, wenn der Kreis in einer der beiden übrigen Koordinatenebenen liegen soll.

Erkl. 170. Liegt der Kreismittelpunkt nicht im Koordinatenanfangspunkt, sondern ist derselbe ein ganz beliebiger Punkt der Koordinatenebene, so bleibt die in Antwort der Frage 116 angegebene Konstruktion ungeändert.

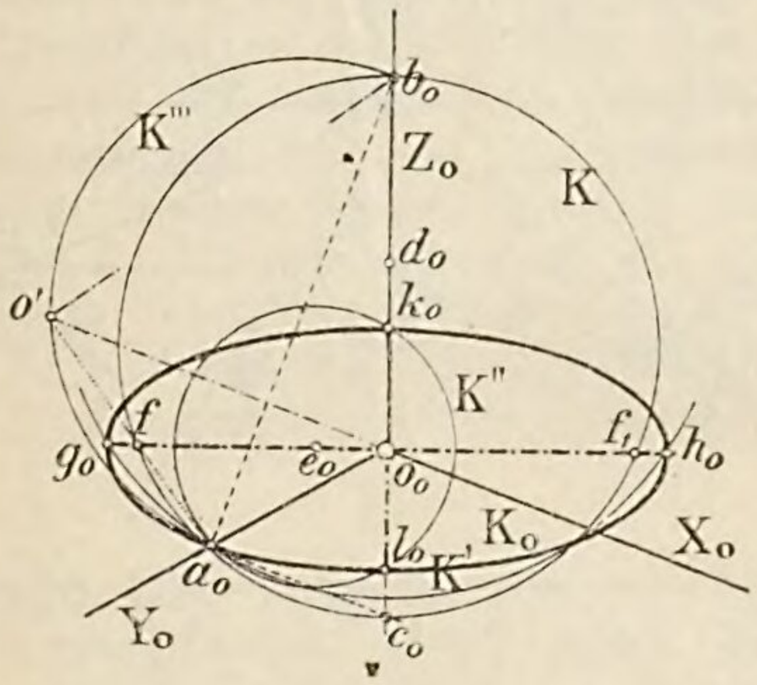
Erkl. 171. Beschreibt man über der Linie $\overline{a_0 b_0}$, siehe Figur 175, den Halbkreis K''', so schneidet dieser die verlängerte X_0-Achse in

einem Punkte o' derart, dass die Strecke $\overline{a_0 o'}$ gleich der wahren Länge von $\overline{o_0 a_0}$, d. h. gleich ist dem Halbmesser des Kreises bezw. gleich der halben grossen Achse der Ellipse K_0 ist. Die Linie $a_0 o'$ kann aber auch aufgefasst werden als die Projektion des zwischen dem Fusspunkt und der kleinen Ellipsenachse liegenden Stückes der Normalen $\overline{a_0 b_0}$ und da dieses gleich der halben grossen Ellipsenachse ist, so ist die Linie $a_0 o'$ ein Brennstrahl, siehe Frage und Antwort 21, d. h. sie enthält den Brennpunkt f.

Man erhält demnach die Länge der halben grossen Ellipsenachse auch dadurch, dass man $a_0 f$ zieht und diese Linie bis zum Schnitt mit X_0 verlängert.

Frage 117. Wie konstruiert man das axonometrische Bild eines in der XY-Ebene liegenden Kreises, wenn sein Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt, und der Schnittpunkt des Kreises mit einer der Achsen X_0 oder Y_0 gegeben ist?

Figur 175.



Erkl. 172. In der in Antwort der Frage 117 gegebenen zweiten Konstruktion ist zugleich noch eine andere Lösung der Aufgabe: „Man soll die wahre Länge einer in einer Koordinatenebene liegenden Geraden ermitteln“, enthalten, als sie in Antwort der Frage 103 gegeben wurde.

Soll z. B., siehe Figur 176, die wahre Länge der auf Y_0 liegenden Strecke $\overline{o_0 y_0}$ bestimmt werden, so zeichnet man $y_0 z_0$ senkrecht zu x_0; der um den Halbierungspunkt d_0 der Strecke $\overline{o_0 z_0}$ beschriebene, den Punkt y_0 enthaltende Kreis schneidet auf der Senkrechten durch o_0 zu Z_0 die gesuchte wahre Länge $\overline{o_0 y'}$ von $\overline{o_0 y_0}$ ab.

Sind auf der Y_0-Achse noch andere Punkte, z. B. a_0 und b_0 gegeben, deren wahre Entfernung gesucht ist, so braucht man nur $y_0 y'$ zu verbinden, so schneiden die Parallelen durch

Antwort. Erste Konstruktion. Da die beiden Achsen X_0 u. Y_0 conjugierte Durchmesser des Kreisbildes K_0 darstellen, so kennt man in dem Punkte a_0 von der Ellipse K_0 die Tangente und Normale, erstere ist parallel zu X_0, letztere steht senkrecht hierzu. Tangente und Normale schneiden dabei die Z_0-Achse in zweien Punkten c_0 und b_0 derart, dass der über $\overline{c_0 b_0}$ als Durchmesser beschriebene Kreis sowohl den Punkt a_0 als auch die beiden Brennpunkte f und f_1 der Ellipse K_0 enthält. Hierdurch ist aber die Länge der grossen Ellipsenhalbachse bestimmt, denn es ist ja:

$$a = \frac{f a_0 + f_1 a_0}{2}$$

Kennt man aber die grosse Ellipsenachse $\overline{g_0 h_0}$ der Lage und Länge nach, sowie den Punkt a_0, so findet man die Endpunkte der kleinen Achse wie in Antwort der Frage 116 gezeigt wurde.

Zweite Konstruktion. Legt man durch den Punkt a die Bildebene, so stellt die Linie $a_0 b_0$ eine Seite des Spurendreieckes der Bildebene dar. Eine Parallelebene durch o_0 zur Bildebene enthält die Linie $g_0 h_0$ und damit auch den Punkt g_0. Nun ist aber der Halbierungspunkt d_0 der Strecke $\overline{o_0 b_0}$ das axonometrische Bild der Spitze eines senkrechten Kreiskegels mit der Basis K_0 und diese Spitze liegt von den die Punkte g und a enthaltenden zur Bildebene parallelen Ebenen gleichweit entfernt; es müssen demnach die in Wirklichkeit gleich langen Linien $\overline{ad}$ und $\overline{gd}$

a_0 und b_0 zu y_0y' auf o_0y' die Punkte a' und b' ab, so dass $\overline{a'b'}$ gleich der wahren Länge von $\overline{a_0b_0}$ ist.

Erkl. 173. Die Ermittelung der wahren Entfernung eines auf einer Koordinatenachse liegenden Punktes vom Koordinatenanfangspunkte, kann noch in anderer Weise, als in Erkl. 172 gezeigt ist, ausgeführt werden.

Ist z. B. die wahre Länge von $\overline{o_0b_0}$, siehe Figur 176, zu bestimmen, so errichtet man im Halbierungspunkt c_0 von $\overline{o_0b_0}$ die Senkrechte zu X_0 bis zum Schnitt d_0' mit Z_0, so schneidet der Kreis um d_0' und gehend durch b_0 auf o_0y' die wahre Länge $\overline{o_0b'}$ von $\overline{o_0b_0}$ ab.

Erkl. 174. Ist die Gerade A_0, auf welcher die wahre Entfernung zweier Punkte bestimmt werden soll, keine Koordinatenachse, sondern eine beliebige, in der XY-Ebene liegende, aber durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Gerade, so kann man die in Erkl. 173 durchgeführte Konstruktion auch hierfür anwenden. Soll, siehe Figur 176, z. B. die wahre Länge von $\overline{o_0e_0}$ bestimmt werden, so zieht man durch den Halbierungspunkt f_0 von $\overline{o_0e_0}$ die Senkrechte zu Z_0 bis zum Schnitt mit X_0 (oder Y_0) und durch letzteren Punkt eine Senkrechte zu Y_0 (oder X_0) bis zum Schnittpunkt g_0 mit Z_0. Der Kreis um g_0 und gehend durch e_0 schneidet auf der Senkrechten durch o_0 zu Z_0 die wahre Länge $\overline{o_0e'}$ von $\overline{o_0e_0}$ ab.

Erkl. 175. Ist h_0 ein weiterer Punkt auf A_0, so liefert die Parallele durch h_0 zu e_0e' auf o_0e' einen Punkt h', so dass $\overline{h'e'}$ gleich der wahren Länge von $\overline{h_0e_0}$ ist.

Erkl. 176. Geht die Gerade A_0 nicht durch den Koordinatenanfangspunkt, so zieht man durch diesen zu A_0 eine Parallele und verfährt wie im Vorstehenden angegeben wurde.

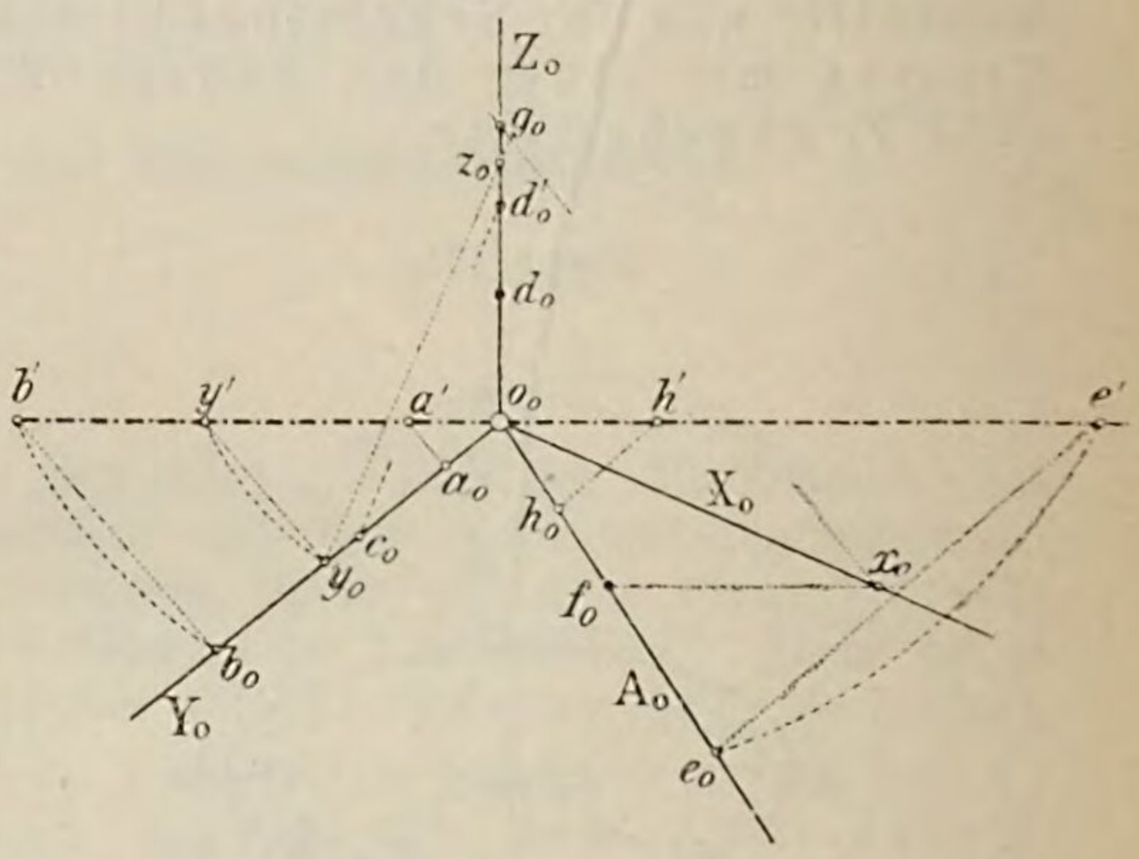
sich auch gleichlang projizieren, d. h. der Punkt g_0, und damit auch der Punkt h_0 liegt auf einem den Punkt a_0 enthaltenden Kreise K' mit dem Mittelpunkte d_0.

Hieraus erhält man folgende einfache Konstruktion der Achsen des elliptischen Kreisbildes:

„Man zeichnet a_0b_0 senkrecht zu X_0 und beschreibt um den Halbierungspunkt d_0 von $\overline{o_0b_0}$ einen Kreis K' durch a_0, so enthält derselbe die Endpunkte der grossen Achse der Ellipse."

Zieht man d_0e_0 parallel zu a_0b_0 bis zum Schnittpunkt e_0 mit der grossen Ellipsenachse, so ist auch e_0 Mittelpunkt eines den Punkt a_0 enthaltenden Kreises K'', der ausserdem noch die Endpunkte k_0 und l_0 der kleinen Ellipsenachse hindurchgeht.

Figur 176.



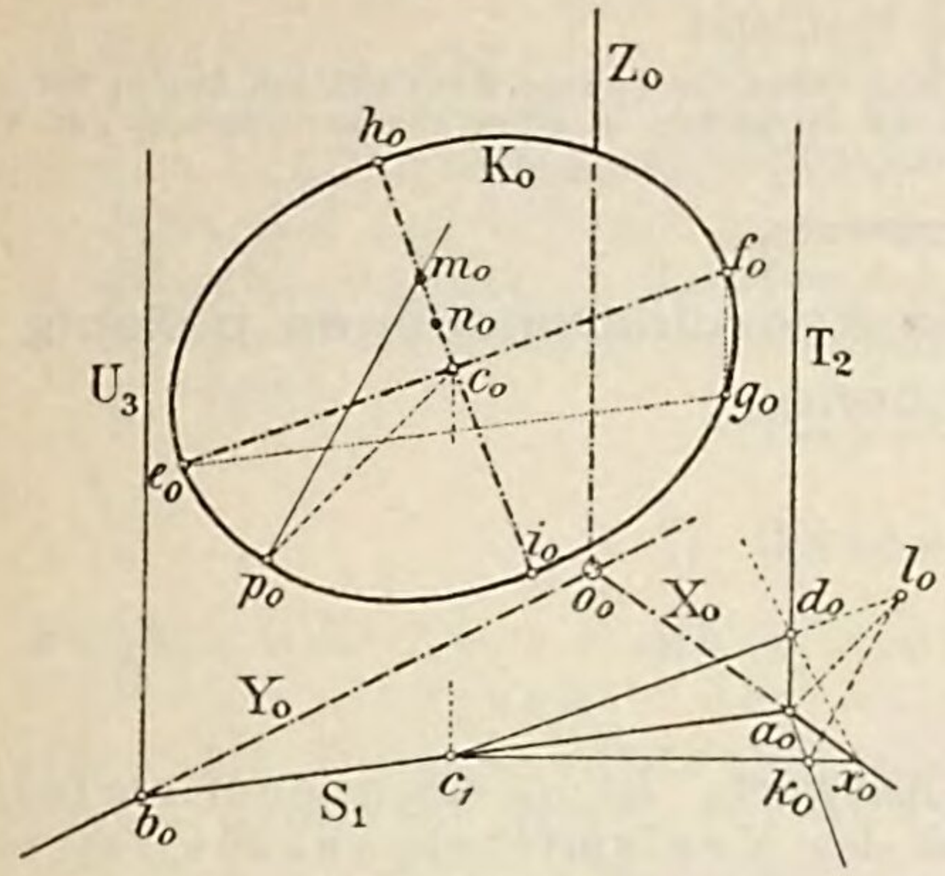
Anmerkung 35. Die bisher angegebenen Konstruktionen zur Darstellung der Achsenlängen des elliptischen Kreisbildes bleiben unverändert, wenn der Kreis in einer Parallelebene zu den Koordinatenebenen liegt. Man verschiebt eben dann das Achsenkreuz parallel zu sich selbst, bis der Koordinatenanfangspunkt wieder mit dem Kreismittelpunkte sich deckt und verfährt so wie in den Antworten der Fragen 115 und 116 angegeben wurde. Auch die Konstruktion der wahren Länge einer zu einer Koordinatenebene parallelen Strecke lässt sich in gleicher Weise, wie in Erkl. 172 u. ff. hervorgehoben wurde, durchführen.

β) Der Kreis liege in einer projizierenden Ebene.

Frage 118. Wie konstruiert man in der Projektionszeichnung in axonometrischer Darstellung das Bild K_0 eines in der horizontalprojizierenden Ebene S_1T_2 liegenden Kreises K_0, von welchem der Mittelpunkt und Halbmesser bekannt sind?

Antwort. Ist c_0, siehe Figur 177, das axonometrische Bild des Kreismittelpunktes, so laufen die Hauptachsen e_0f_0 und

Figur 177.



Erkl. 177. Die in Erkl. 174 gegebene Konstruktion lässt sich auch verwenden, wenn eine Gerade eine ganz beliebige Lage gegen die Koordinatenebenen einnimmt, denn ist z. B. $\overline{ab}$, siehe Figur 178, die gegebene Strecke, deren wahre Länge ermittelt werden soll, so ziehe man durch a_0 die Parallelen Z_0' und Y_0' zu Z_0 und $a_1 b_1$ bezw. und konstruiere die zur $Y'Z'$-Ebene senkrechte Gerade X', deren Bild X_0' ist, so bilden die Geraden X_0', Y_0', Z_0' ein neues Achsenkreuz so, dass die gegebene Gerade in der Koordinatenebene $Z'Y'$ liegt. Ihre wahre Länge findet sich somit, wenn man durch den Halbierungspunkt von $\overline{a_0 b_0}$ die Senkrechte zu X_0' und durch deren Schnitt z_0' mit Z_0' die Senkrechte zu Y_0' bis zum Schnitt x_0' mit X_0' zieht. Der Kreis um x_0' als Mittelpunkt und gehend durch b_0 schneidet auf der Senkrechten durch a_0 zu X_0' die wahre Länge $\overline{a_0 b'}$ von $\overline{a_0 b_0}$ ab.

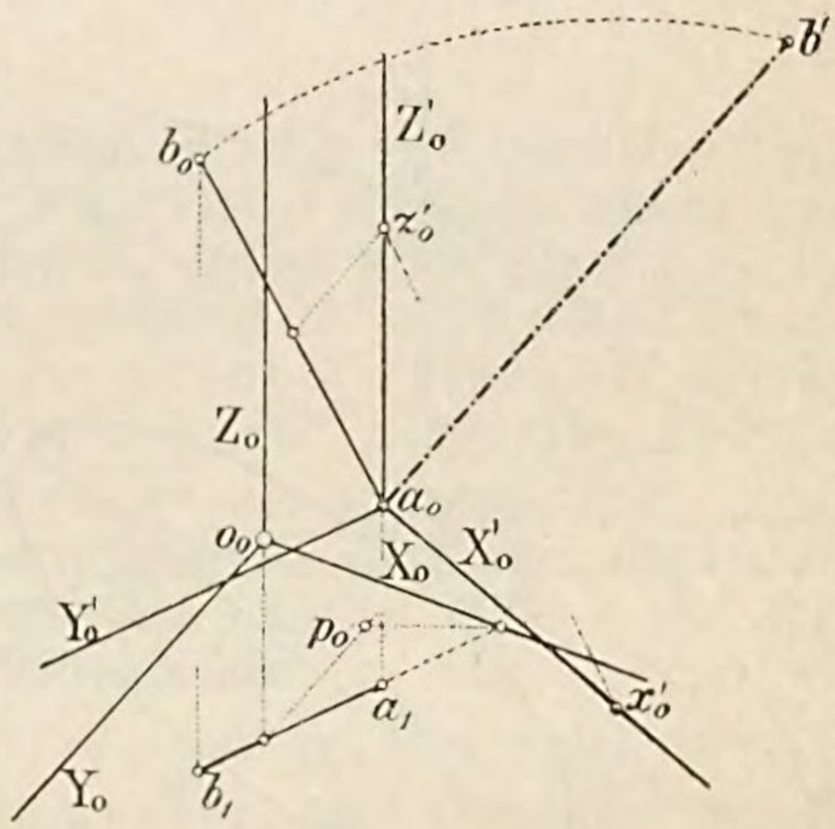
Frage 119. Wie konstruiert man das axonometrische Bild eines in einer horizontalprojizierenden Ebene liegenden Kreises, wenn dessen Mittelpunkt sowie ein beliebiger weiterer Punkt p_0 desselben bekannt sind?

Antwort. Man kann, siehe Figur 177, die Konstruktion in gleicher Weise durchführen, wie in Antwort der Frage 117, wenn man bedenkt, dass die Spuren $S_1 T_2$ sowie die zur Nullspur $c_1 d_0$ Senkrechte $a_0 k_0$ die Bilder von dreien aufeinander senkrechten Geraden darstellen, zu welchen $c_1 d_0 k_0$ als Spurendreieck der Bildebene gehört. Zieht man nun $p_0 c_0$ und hierzu eine Parallele $a_0 l_0$, so läuft die Ellipsennormale in p_0, parallel zur Verbindungslinie $k_0 l_0$, denn zu dieser Linie steht die zu $a_0 l_0$ axonometrische Senkrechte, d. h. die zum Halbmesser $c_0 p_0$ conjugierte Richtung, geometrisch senkrecht. Ein Kreis um den Halbierungspunkt n_0 von $\overline{m_0 c_0}$ als Mittelpunkt und gehend durch p_0 enthält die Endpunkte der grossen Ellipsenachse. Hier-

$h_0 i_0$ des Kreisbildes parallel bezw. senkrecht zur Nullspur $c_1 d_0$ der gegebenen Ebene $S_1 T_2$.

Zieht man nun durch die Endpunkte e_0 und f_0 Parallele zu S_1 und T_2 beziehungsweise, die sich in g_0 schneiden, so ist der Winkel $e_0 g_0 f_0$ axonometrisch ein Rechter, der Punkt g_0 also ein Punkt von K_0. Man kann nun, wie in Antwort der Frage 116, da von der Ellipse eine Achse $\overline{e_0 f_0}$ der Grösse und Lage nach, sowie ein Punkt g_0 bekannt sind, die Länge der anderen Achse $\overline{h_0 i_0}$ konstruieren.

Figur 178.



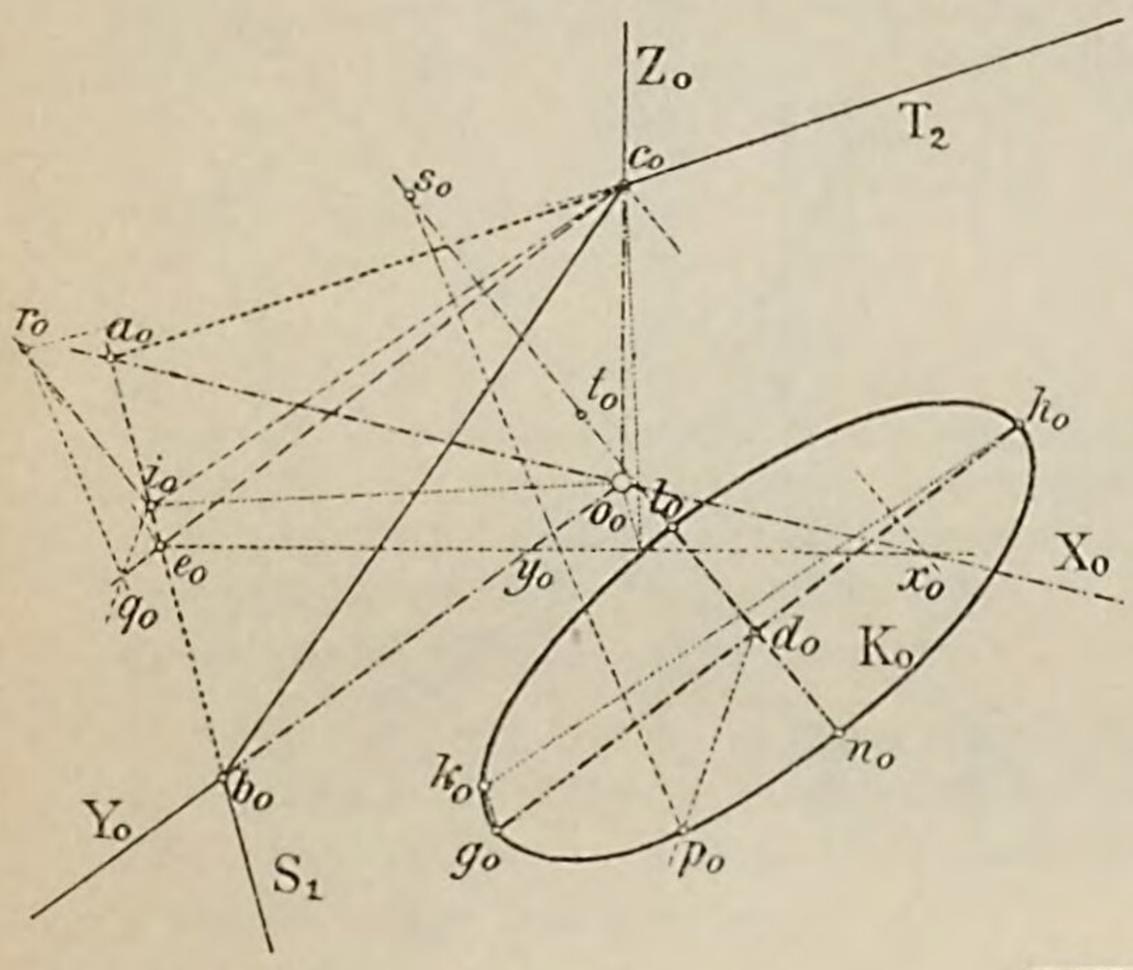
durch sind aber auch jene der kleinen Achse $\overline{h_0 i_0}$ bestimmt.

Man führe die gleiche Konstruktion durch, für den Fall die Kreislinie in einer Ebene senkrecht zur XZ- bezw. YZ-Ebene liegen soll.

γ) Der Kreis liegt in einer gegen die Koordinatenebenen beliebig geneigten Ebene.

Frage 120. Wie konstruiert man das axonometrische Bild eines in einer beliebig gegen die Koordinatenebenen geneigten Ebene abc, siehe Figur 179, liegenden Kreises, von welchem Mittelpunkt und Halbmesser bekannt sind?

Figur 179.



Antwort. Ist d_0 das axonometrische Bild des Kreismittelpunktes, so verschafft man sich zunächst wieder die Nullspur $c_0 e_0$ der gegebenen Ebene und zieht parallel bezw. senkrecht zu ihr die Hauptachsen der Ellipse K_0 der Lage nach. Mittels des gegebenen Halbmessers kennt man dann auch die Endpunkte g_0 und h_0 der grossen Achse. Zeichnet man nun durch o_0 die Linie $o_0 i_0$ axonometrisch senkrecht zu S_1 und zieht $c_0 i_0$, so ist diese Linie eine in der Ebene abc liegende und zu S_1 axonometrisch senkrecht stehende Gerade.

Die durch g_0 und h_0 zu S_1 bezw. $c_0 i_0$ gezogenen Parallelen stehen daher axonometrisch aufeinander senkrecht, d. h. ihr Schnittpunkt k_0 gehört der Ellipse K_0 an, von welcher sich nun die kleine Achse wie in Antwort der Frage 116 ermitteln lässt.

Frage 121. Wie konstruiert man das axonometrische Bild eines in einer beliebig gegen die Koordinatenebenen geneigten Ebene abc liegenden Kreises, von welchem Mittelpunkt und ein beliebiger weiterer Punkt p_0 bekannt sind?

Antwort. Es handelt sich wieder darum, im Punkte p_0 die Normale zu zeichnen, welche geometrisch senkrecht steht zu der zu $p_0 d_0$ conjugierten Richtung. Nun stehen die Linien $c_0 i_0$ und S_1 axonometrisch aufeinander senkrecht, eine dritte zu den beiden Linien senkrechte Gerade ist die geometrische Senkrechte $i_0 r_0$ zu $e_0 c_0$. Die drei Linien $i_0 e_0$, $i_0 c_0$ und $i_0 r_0$ bilden daher ein Achsenkreuz, für welches $e_0 c_0 r_0$ das Spurendreieck der Bildebene darstellt. Zieht man nun $c_0 q_0$ parallel zu $d_0 p_0$, so läuft die Ellipsennormale $p_0 s_0$ des Punktes p_0 parallel zur Linie $r_0 q_0$. Ein Kreis um den Halbierungspunkt t_0 der Strecke $\overline{s_0 d_0}$ und gehend durch p_0 enthält die Endpunkte g_0 und h_0 der grossen Ellipsenachse. Die Endpunkte l_0 und n_0 sind hiermit ebenfalls bestimmt.

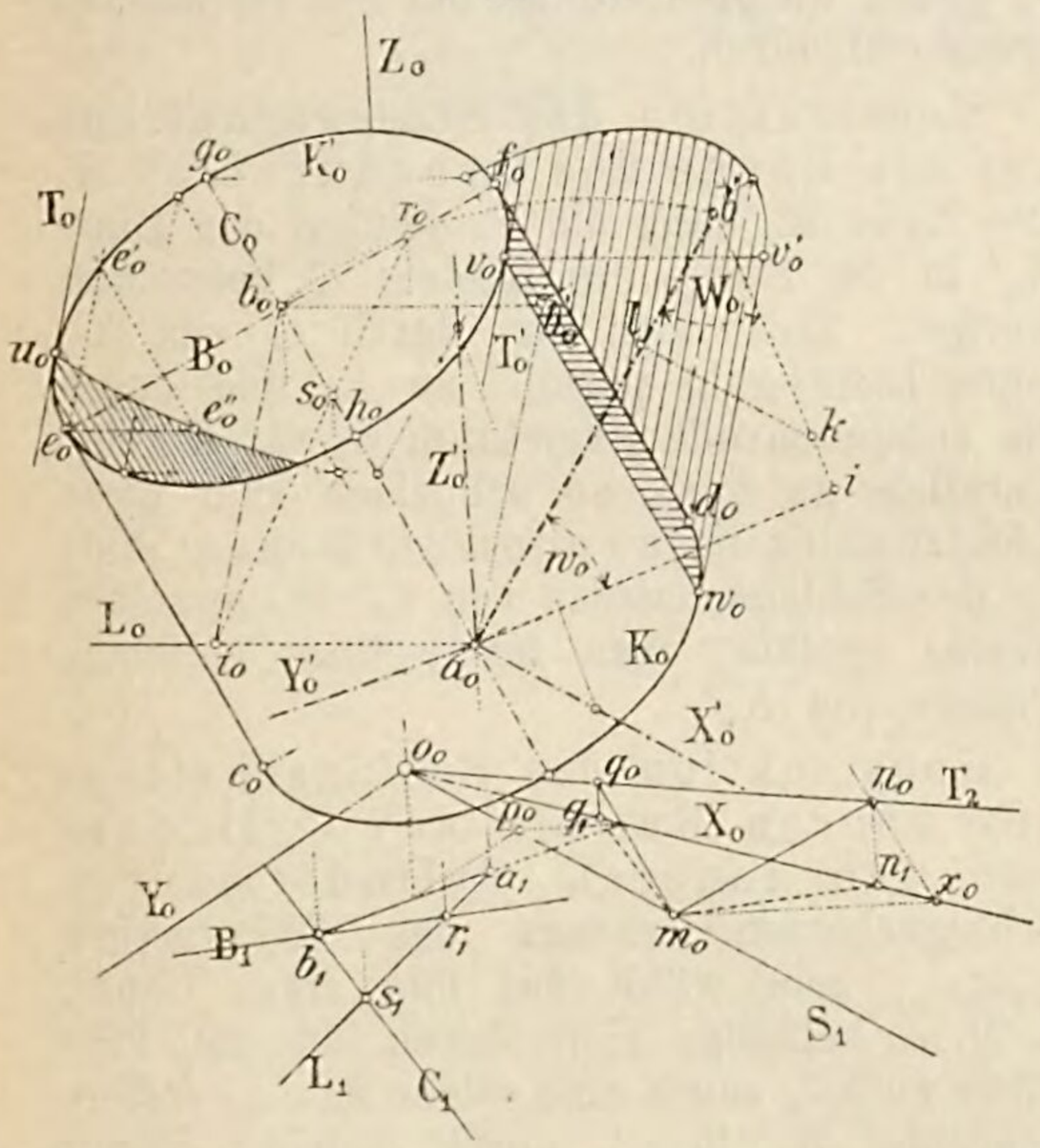
Anmerkung 36. Im Vorangegangenen sind die Mittel enthalten, alle jene Aufgaben der darstellenden Geometrie, bei welchen die gegenseitigen Lagen von Punkten, geraden Linien und Ebenen in Betracht kommen, nunmehr auch direkt in axonometrischer Darstellung durchzuführen, ohne auf den rechtwinkligen Grund- oder Aufriss zurückgreifen zu müssen, dabei sind natürlich auch jene Aufgaben inbegriffen, in welchen die bis jetzt kennen gelernten krummen Linien, das sind die Kegelschnitte, als Elemente auftreten. Im Nachfolgenden sollen einige Aufgaben dieser Art zur Durchführung gelangen.

---

i) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 109. Zwei Punkte a und b sind als die Endpunkte der Achse eines senkrechten Kreiscylinders, dessen Durchmesser gleich der wahren Länge von $\overline{ab}$ sein soll, gegeben. Es ist der Cylinder in axonometrischer Darstellung zu zeichnen und ausserdem der Selbstschatten sowie der Schlagschatten auf die Grundfläche unter Annahme paralleler Lichtstrahlen zu konstruieren.

Figur 180.



Auflösung. Man lege durch den Punkt a_0, siehe Figur 180, ein Achsenkreuz, dessen Y_0'- und Z_0'-Achse bezw. parallel zu Y_0 und Z_0 ist, während die dritte Achse X_0' parallel läuft zur axonometrischen Senkrechten o_0p_0 zu $\overline{a_1b_1}$ und konstruiere die wahre Länge $\overline{a_0b'}$ von $\overline{ab}$, siehe Erkl. 173. Die Begrenzungskreise des Kreiscylinders stellen sich nun als Ellipsen K_0 und K_0' dar mit den Mittelpunkten a_0 und b_0; die grossen Achsen $\overline{c_0d_0}$ und $\overline{e_0f_0}$ sind gleich dem Kreisdurchmesser, also gleich $\overline{a_0b'}$ und stehen geometrisch senkrecht zu a_0b_0, die kleinen Achsen fallen mit der Linie $\overline{a_0b_0}$ zusammen und besitzen eine Länge $\overline{g_0h_0}$ gleich $\overline{a_0b'} \cdot \cos W_0$, wenn W_0 den Winkel der Kreisebene mit der Bildebene bezeichnet.

Die Länge $\overline{g_0h_0}$ ergibt sich leicht wie folgt. Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck $a_0b'i$ mit der Kathete $\overline{a_0i}$ gleich $\overline{a_0b_0}$, so schliesst die andere Kathete $\overline{b'i}$ mit a_0b' den Winkel W_0 ein; macht man daher auf $b'i$ die Strecke $\overline{b'k} = \overline{b_0e_0}$ und zieht kl senkrecht auf a_0b', so ist:

$$\overline{b'l} = \overline{b_0g_0} = \overline{b_0h_0}$$

Nunmehr können die Begrenzungsellipsen K_0 und K_0' gezeichnet, wodurch das axonometrische Bild des Cylinders gegeben ist.

Konstruktion des Selbstschattens. Ist durch L_1L_0 die Richtung der Lichtstrahlen gegeben, so projiziere man die Lichtrichtung in die Ebene K_0', indem man den Durchschnittspunkt t_0 des durch a_0 gehenden Lichstrahles mit der Ebene K_0' aufsucht. Zu diesem Zwecke ist es nötig, sich die

axonometrischen Grundrisse B_1 und C_1 der Linien ef und hg zu verschaffen. Man legt durch o_0 eine Parallelebene zu K_0' und bestimmt aus S_1 (axonometrisch senkrecht zu $a_1 b_1$) und $m_0 n_0$ (Nullspur parallel zu $e_0 f_0$) das Bild T_2 der Vertikalspur der Parallelebene, woraus sich aus n_0 der Punkt n_1 und hieraus der axonometrische Grundriss $m_0 n_1$ der Nullspur der Ebene $S_1 T_2$ ergibt; zieht man nun eine Parallele $m_0 q_0$ zu $a_0 b_0$, so erhält man in $m_0 q_1$ den axonometrischen Grundriss von $m_0 q_0$. Nunmehr kann man durch b_1 Parallele B_1 und C_1 zu $m_0 n_1$ und $m_0 q_1$ ziehen, so stellen diese Linien die axonometrischen Grundrisse von $e_0 f_0$ und $g_0 h_0$ beziehungsweise dar. Der Schnittpunkt t_0 der Ebene BC, d. h. der Kreisebene K' ergibt sich nun, wie in Erkl. 162 gezeigt wurde. Die Verbindungslinie $t_0 b_0$ ist das axonometrische Bild der Projektion der Lichtrichtung in die Ebene des Kreises K' und parallel zu ihr sind die Tangenten T_0 und T_0' an die Ellipse K_0' zu zeichnen; durch ihre Berührpunkte u_0 und v_0 gehen die Mantellinien der Selbstschattengrenze hindurch.

Konstruktion des Schlagschattens auf die Ebene des Grundkreises K. Die Linie K_0 kann als Projektion der Linie K_0' in die Ebene des Kreises K betrachtet werden. Zieht man nun durch v_0 von K_0' einen Lichtstrahl parallel zu L_0 und durch die entsprechende Projektion w_0 auf K_0 eine Parallele zu $b_0 t_0$, so schneiden sich diese Lichtstrahlen im axonometrischen Bilde v_0' des Schlagschattens von v_0; in derselben Weise verfährt man für weitere beliebige Punkte von K_0'.

Konstruktion des Schlagschattens des oberen Randes des Cylinders auf den inneren Cylindermantel. Schlagschatten erzeugt das Kurvenstück $u_0 h_0 v_0$; man wählt auf ihm einen Punkt, z. B. e_0 beliebig, zieht durch ihn eine Parallele zu $b_0 t_0$ sowie eine solche zu L_0, erstere schneidet K_0' in e_0', durch welchen Punkt eine Cylindermantellinie zu ziehen ist, welche auf dem Lichtstrahle durch e_0 den Schlagschattenpunkt e_0'' ausschneidet. Die Konstruktion ist in der Figur noch für einen weiteren Punkt angedeutet.

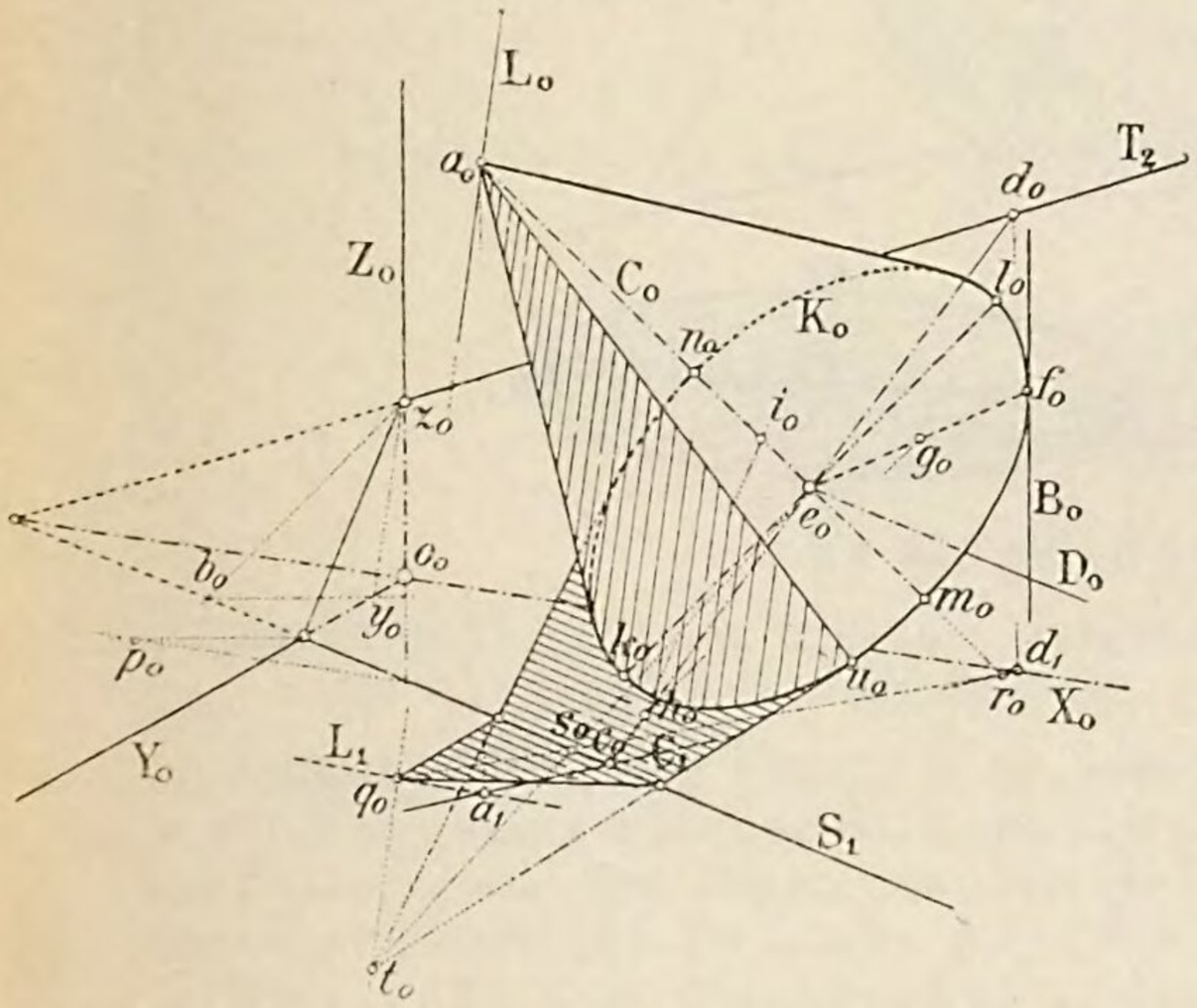
Erkl. 178. Direkt kann man die Schlagschatten von K_0' erhalten, wenn man berücksichtigt, dass die Schlagschattenellipse der Ellipse K_0' kongruent und lediglich in der Richtung L_0 verschoben ist. Bestimmt man daher den Schlagschattenpunkt b_0' des Mittelpunktes b_0, so braucht man nur durch b_0' Parallele zu den Achsen $e_0 f_0$ und $g_0 h_0$ zu ziehen, auf diesen vom Punkte b_0' aus die halben Achsenlängen nach beiden Seiten der betreffenden Linien hin abzutragen und hierauf die Ellipse selbst aus den Achsen zu konstruieren.

Aufgabe 110. Ein Punkt a_0 ist als Spitze eines senkrechten Kreiskegels gegeben, dessen Grundkreis in einer gegebenen Ebene $S_1 T_2$ liegt

und ausserdem eine in dieser liegende Gerade B berührt.

Man soll das axonometrische Bild des Kegels zeichnen, ausserdem die Selbstschattengrenze, sowie den Schlagschatten des Kegels auf die Ebene $S_1 T_2$ bezw. auf die Ebene XY konstruieren.

Figur 181.



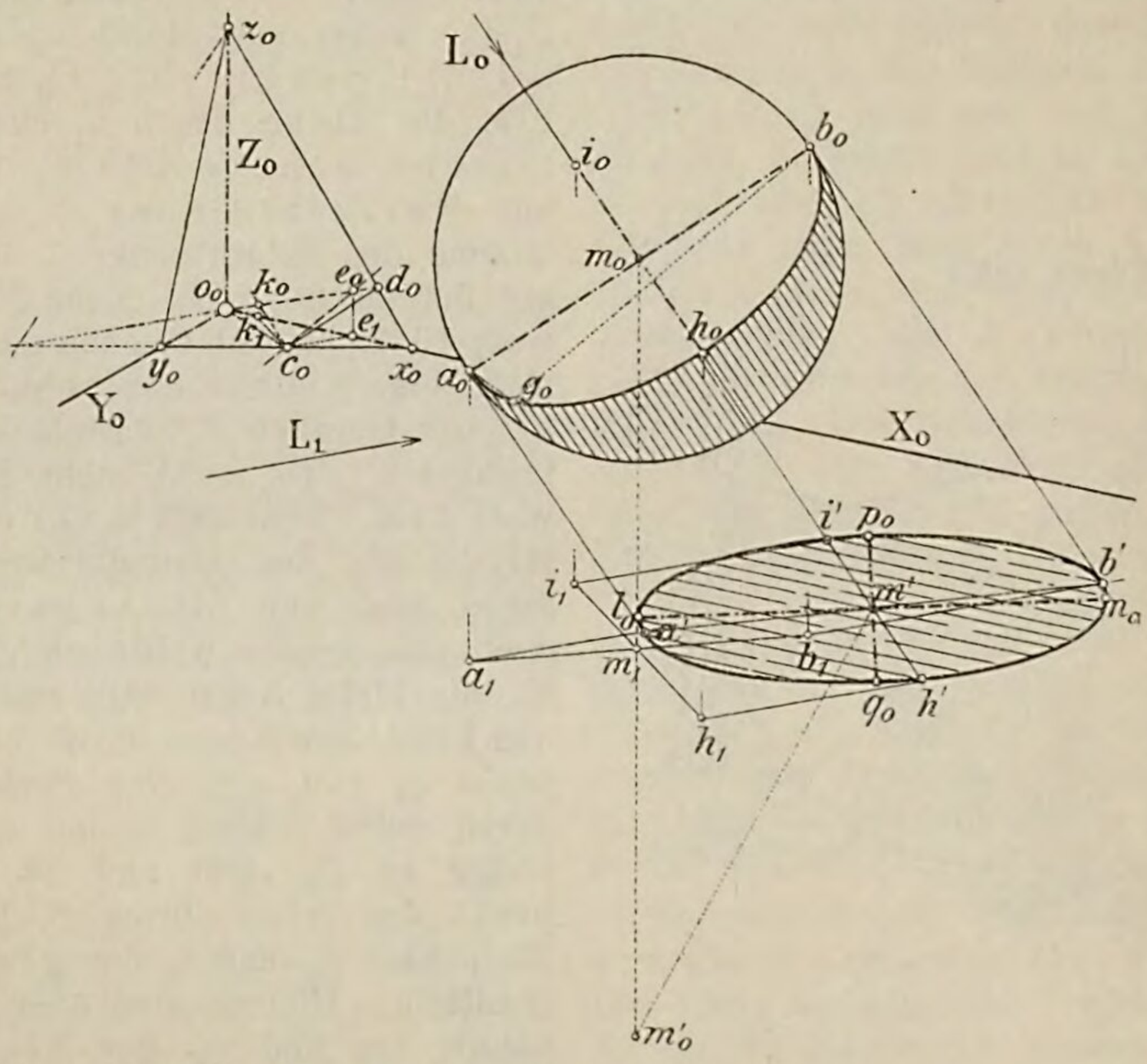
Auflösung. Man fälle, siehe Figur 181, vom Punkte a eine Senkrechte zur Ebene $S_1 T_2$, indem man durch a_0 eine geometrische Senkrechte C_0 zur Nullspur $z_0 b_0$ der Ebene, durch a_1 eine axonometrische Senkrechte C_1 (parallel $o_0 p_0$) zur Horizontalspur S_1 zieht und bestimme den Schnittpunkt e_0 der Geraden C mit der Ebene $S_1 T_2$ (siehe Frage und Antwort 108); hierauf zeichne man in der Ebene $S_1 T_2$ eine axonometrische Senkrechte $e_0 f_0$ zur Geraden B_0 (mittels des Hilfsachsenkreuzes C_0, D_0, $e_0 c_0$), siehe Frage und Antwort 114. Von dem axonometrischen Bilde K_0 des Grundkreises des Kegels kennt man nun die Achsen der Lage nach (die grosse Achse steht senkrecht zu C_0, die kleine Achse fällt mit C_0 zusammen) und kann, indem man durch den Halbierungspunkt g_0 von $e_0 f_0$ eine Senkrechte zu C_0, durch deren Schnitt h_0 mit $e_0 c_0$ eine Senkrechte zu D_0 zieht und um i_0 als Mittelpunkt den Kreis durch f_0 beschreibt, die Endpunkte k_0 und l_0 der grossen Achse ermitteln. Hiermit sind aber auch die Endpunkte m_0 und n_0 der kleinen Achse bestimmt. Die Tangenten von a_0 an K_0 vervollständigen das axonometrische Bild des Kreiskegels.

Konstruktion des Selbstschattens. Ist durch $L_0 L_1$ die Lichtrichtung gegeben, so bestimme man den Schnittpunkt t_0 des die Kegelspitze enthaltenden Lichtstrahles mit der Ebene $S_1 T_2$, indem man zweckmässig die Schnittlinie $q_0 r_0$ der Ebene LC mit der YX-Ebene bestimmt, welche die Spur S_1 im Punkte s_0 trifft, die Verbindungslinie $e_0 s_0$ ist das axonometrische Bild der Schnittlinie der Ebene LC mit der Ebene $S_1 T_2$ und sie schneidet den Lichtstrahl L_0 in dessen Durchschnittspunkt t_0 mit der Ebene $S_1 T_2$. Die Tangenten von t_0 an K_0 bestimmen durch ihre Berührpunkte die Mantellinien der Selbstschattengrenze. In der Figur ist nur die sichtbare Mantellinie $u_0 a_0$ gezeichnet.

Konstruktion des Schlagschattens. Die Tangenten von t_0 an K_0 geben die Begrenzung des Schlagschattens auf der Ebene $S_1 T_2$ an, sie schneiden die Linie S_1 in zweien Punkten, welche mit dem Schnittpunkt q_0 des Lichtstrahles L_0 und

der XY-Ebene zu verbinden sind, um hierdurch die Begrenzung des Schlagschattens auf der XY-Ebene zu erhalten.

Figur 182.



Aufgabe 111. Ein Punkt m ist als Mittelpunkt einer Kugel von bekanntem Halbmesser gegeben. Man soll das axonometrische Bild der Kugel, ihren Selbstschatten sowie den Schlagschatten auf die XY-Ebene konstruieren.

Erkl. 179. In einfacher Weise ergeben sich die Achsen der Schlagschattenellipse der Lage nach. Denkt man sich nämlich die Projizierende $m_0 m$ über m_1 hinaus um ihre eigene Länge verlängert nach m_0', so kann man m_0' als axonometrisches Bild einer zweiten der gegebenen Kugel kongruenten Kugel nehmen und für diese, unter Voraussetzung einer Lichtrichtung $m_0'm'$, L_1 den Schlagschatten konstruieren; dieser deckt sich mit dem Schlagschatten der gegebenen Kugel. Zieht man wieder durch die Endpunkte der grossen Achse der Kugel Lichtstrahlen, so bilden diese mit den Lichtstrahlen durch a_0 und b_0 einen der Schlagschattenellipse umbeschriebenen Rhombus. Die Diagonalen desselben geben aber die Achsen der Schlagschattenellipse, d. h. diese fallen zusammen mit den Halbierungslinien

Auflösung. Das axonometrische Bild der Kugel ist ein Kreis, siehe Figur 182, um den Punkt m_0 mit dem gegebenen Halbmesser.

Konstruktion des Selbstschattens. Die Selbstschattengrenze einer Kugel ist der zur Lichtrichtung senkrechte grösste Kreis der Kugel. Ist durch $L_0 L_1$ die Lichtrichtung gegeben, so stellt sich das axonometrische Bild der Selbstschattengrenze als Ellipse dar, deren grosse Achse der zu L_0 senkrechte Kreisdurchmesser $a_0 b_0$ ist, während die kleine Achse mit L_0 zusammenfällt. Zur Bestimmung ihrer Länge ist noch ein weiterer Punkt der Selbstschattenellipse nötig. Um ihn zu erhalten, zeichnet man sich die Bilder der Spuren einer durch den Koordinatenanfangspunkt o_0 zur Ebene der Selbstschattengrenze gelegten Parallelebene, indem man $o_0 c_0$ axonometrisch senkrecht

des Winkels $m_0 m' m_0'$. Die Längen der Achsen bestimmen sich am einfachsten so wie in Antwort der Frage 117 gezeigt wurde.

zu L_1 und $c_0 d_0$ parallel $a_0 b_0$ zieht; $o_0 d_0$ ist die Vertikalspur der genannten Parallelebene. Zieht man noch $c_0 e_1$ parallel L_1 und bestimmt e_0 in der Ebene ocd, so ist $o_0 c_0 e_0$ axonometrisch ein rechter Winkel. Die Parallelen durch a_0 und b_0 zu den Linien $o_0 c_0$ und $c_0 e_0$ schneiden sich daher in einem Punkte g_0 der Selbstschattenellipse und man kann nun deren kleine Achse, wie früher gezeigt wurde, konstruieren.

Konstruktion des Schlagschattens auf die Ebene XY. Der axonometrische Grundriss von ab und ih ist beziehungsweise parallel zu $c_0 e_1$ und L_0. Konstruiert man daher die Schlagschattenpunkte a', b', i', h' als Schlagschatten der Punkte a, b, i und h, so hat man von der Schlagschattenellipse unmittelbar zwei conjugierte Durchmesser und kann hieraus die erstere punktweise bestimmen, siehe auch Erkl. 179.

---

k) Ungelöste Aufgaben.

Anmerkung 37. Bei den folgenden Aufgaben ist das Achsenkreuz beliebig wählbar und als gegeben vorausgesetzt.

Aufgabe 112. Drei Punkte a, b, c sind je durch axonometrisches Bild und Rissbild als Ecken des Normalschnittes eines dreiseitigen Prismas gegeben.

Man soll den Durchschnitt des Prismas mit den drei Koordinatenebenen zeichnen und die wahren Gestalten der Schnittdreiecke konstruieren.

Andeutung. Man zeichne durch die gegebenen Punkte a, b, c Senkrechte zur Ebene abc und bestimme die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit den drei Koordinatenebenen. Hierauf lege man letztere in die Bildebene um und ermittele hierdurch die wahre Gestalt der Schnittdreiecke.

Aufgabe 113. Drei Gerade A, B, C sind je durch axonometrisches Bild und Rissbild gegeben. Man zeichne das durch die Geraden bestimmte Parallelepiped.

Andeutung. Man lege durch jede der drei Geraden eine Ebene parallel zu jeder der beiden übrigen Geraden und bestimme die Schnitte dieser Geraden mit den sie nicht enthaltenden Ebenen, so bilden die Schnittpunkte sechs Ecken des gesuchten Parallelepipedes.

Aufgabe 114. Zwei Punkte a und b sind als Gegenecken (Endpunkte einer Hauptdiagonale) eines Würfels gegeben; eine dritte Ecke c soll in der XY-Ebene liegen. Man soll das axonometrische Bild des Würfels zeichnen.

Andeutung. Teilt man die gegebene Diagonale $\overline{ab}$ in drei Teile und legt durch die Teilpunkte Ebenen senkrecht zu $\overline{ab}$, so

liegen in diesen Ebenen die noch fehlenden Würfelecken. Da man ausserdem mittels der gegebenen Länge $\overline{ab}$ auch die Länge der Würfelkante kennt, so ist hierdurch die Lage jener Würfelecke c, welche in der XY-Ebene liegen soll, vollständig bestimmt.

Die Aufgabe ist nur innerhalb gewisser Grenzen lösbar.

Aufgabe 115. Zwei Punkte a und b sind als Gegenecken eines Oktaëders gegeben; eine dritte Ecke c soll in der XZ-Ebene liegen. Man soll das axonometrische Bild des Oktaëders zeichnen.

Andeutung. Man lege durch den Halbierungspunkt von $\overline{ab}$ eine Ebene senkrecht zu $\overline{ab}$, so liegt in dieser Ebene gleichfalls die Ecke c des Körpers; da ausserdem die Entfernung der Ecke c vom Mittelpunkt von $\overline{ab}$ bestimmbar ist, so ist die Lage der genannten Ecke festgelegt.

Aufgabe 116. Eine Pyramide, deren vierseitige Grundfläche in der XZ-Ebene liegt, ist axonometrisch dargestellt. Man soll durch den Schwerpunkt der Pyramide eine Ebene legen, welche den Pyramidenmantel nach einem Parallelogramm schneidet.

Andeutung. Die gesuchte Ebene ist parallel zu den Schnittlinien nicht aufeinanderfolgender Seitenflächen der Pyramide.

Aufgabe 117. Ein Würfel von gegebener Kantenlänge liegt mit einer Fläche in der XY-Ebene, derselbe wird durchdrungen von einem Oktaëder von gleichfalls gegebener Kantenlänge, von welchem ausserdem eine Hauptdiagonale senkrecht zur YZ-Ebene steht, während der Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Würfels zusammenfällt. Man soll die Durchdringung beider Körper zeichnen.

Andeutung. Man stelle die axonometrischen Bilder der Körper nach den Angaben der Aufgabe dar, bestimme die Schnittpunkte der Würfelkanten mit den Oktaëderflächen und hierauf jene der Oktaëderkanten mit den Würfelflächen.

Die Verbindung der Schnittpunkte mit einander geschieht zweckmässig nach dem auf Seite 81 des II. Teils dieses Lehrbuches angegebenen Verfahren.

Aufgabe 118. Es sind ein Punkt a und eine Gerade B gegeben. Man zeichne durch den Punkt a einen Kreis, dessen Punkte von der Geraden B gleich weit entfernt sind.

Andeutung. Man lege durch den Punkt a eine Ebene senkrecht zur Geraden B, siehe Frage und Antwort 113 und verfahre im übrigen wie in Antwort der Frage 120 gezeigt wurde.

Aufgabe 119. Es sind drei Punkte a, b, c gegeben. Man zeichne das axonometrische Bild des die Punkte a, b, c enthaltenden Kreises.

Andeutung. Man errichte auf den Verbindungslinien $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ in deren Mittelpunkten, in der Ebene abc axonometrische Senkrechten, die sich im Bilde des Kreismittelpunktes treffen und verfahre im übrigen wie in Antwort der Frage 120 gezeigt wurde.

Aufgabe 120. Es ist eine Ebene $S_1 T_2$ gegeben. Man soll in ihr jenen Kreis zeichnen, welcher die drei Koordinatenebenen berührt.

Andeutung. Man bestimme das Spurendreieck $a_0 b_0 c_0$ der gegebenen Ebene. Trägt man nun von den Ecken a_0, b_0, c_0 desselben auf den Seiten des Dreieckes gleiche Strecken ab und errichtet in deren Endpunkten zu den Seiten des Dreieckes axonometrische Senkrechten, so schneiden sich je zwei gleich weit von den Punkten a_0, b_0, c_0 abstehenden Senkrechten in Punkten der Winkelhalbierenden des Dreieckes. Die Verbindungslinien dieser Schnittpunkte mit den entsprechenden Dreieckspunkten geben daher die axonometrischen Bilder dieser Winkelhalbierenden und letztere schneiden sich im Kreismittelpunkte. Da man aber nunmehr auch die Berührungspunkte des Kreises mit den Dreiecksseiten kennt, so ist die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt.

6. Ueber die schiefwinklige Axonometrie.

A. Die schiefwinklige Axonometrie im allgemeinen.

a) Begriff und Zweck der schiefwinkligen Axonometrie.

Frage 122. Was versteht man unter der schiefwinkligen Axonometrie im allgemeinen?

Erkl. 180. Die drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 heissen wieder Koordinatenebenen, ihre Schnittlinien sind die Koordinatenachsen und sie bilden das Achsenkreuz.

Erkl. 181. Die **Pr. Eb.**, in welcher die Raumgrösse schief projiziert wird, heisst wieder die Bildebene.

Erkl. 182. Die schiefe Projektion einer Raumgrösse auf die Bildebene heisst ihr axonometrisches Bild. Man unterscheidet zwischen axonometrischem Grund-, Auf- und Seitenriss und versteht darunter wieder die schiefe Projektion des Grund-, Auf- oder Seitenrisses einer Raumgrösse.

Antwort. In gleicher Weise, wie aus den rechtwinkligen Projektionen einer Raumgrösse auf die drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 die rechtwinklige axonometrische Projektion auf eine vierte **Pr. Eb.**, die Bildebene abgeleitet wurde, kann man auch eine schiefwinklige axonometrische Projektion der Raumgrösse und ihrer Projektionen darstellen, wenn man die Raumgrösse in die genannte Bildebene unter einem von 90 Grad verschiedenen Winkel σ projiziert. Zwischen den so sich ergebenden schiefen Projektionen besteht nun wieder ein gewisser geometrischer Zusammenhang, mittels welchem man im Stande ist, aus einer der genannten Projektionen die anderen abzu-

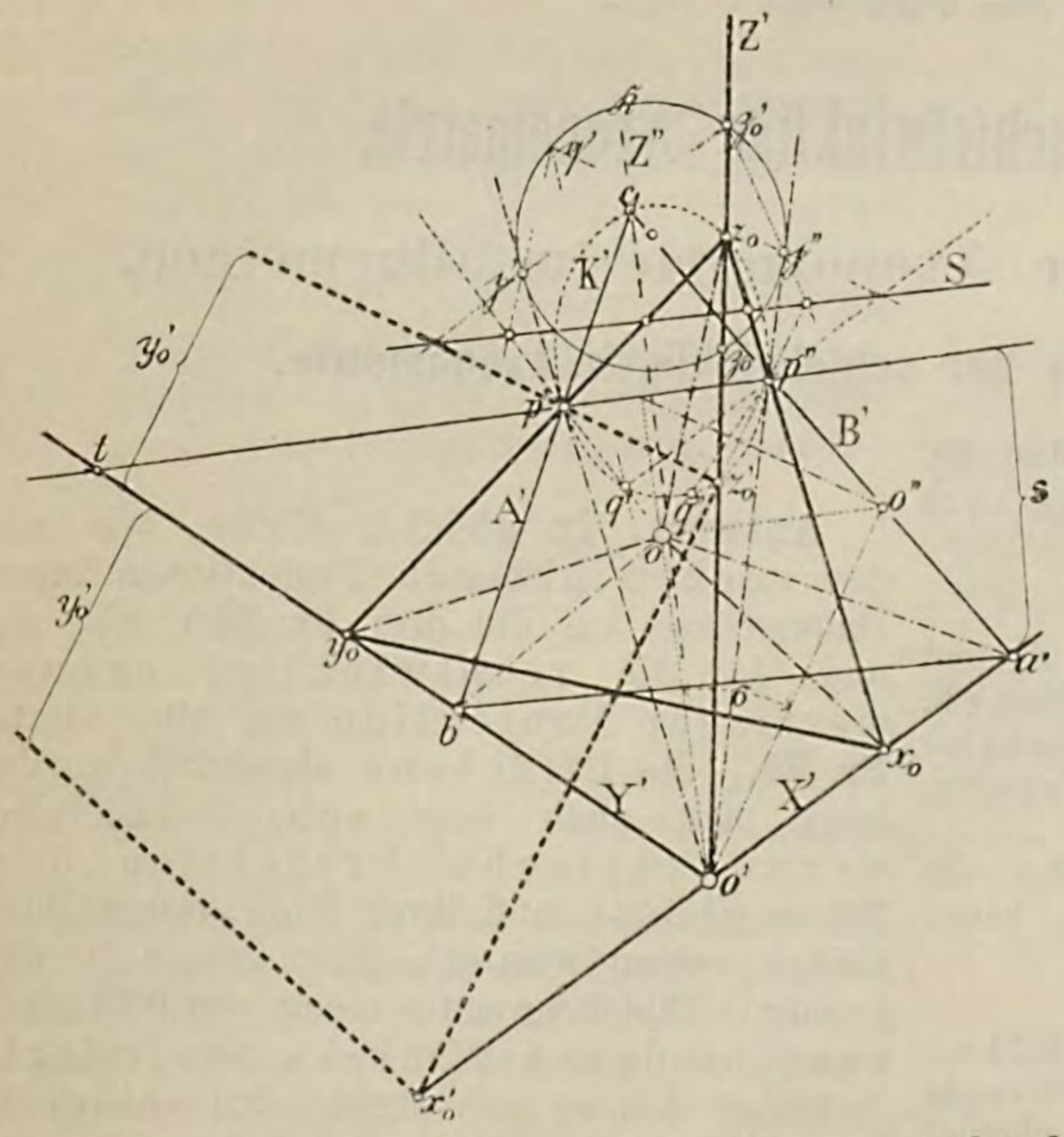
Erkl. 183. Kürzer kann man die axonometrischen Bilder der in den Koordinatenebenen befindlichen Raumgrössen auch als „Rissbilder“ bezeichnen und demnach ein erstes, zweites und drittes Rissbild unterscheiden, je nachdem die Raumgrösse in der XY-, XZ- und YZ-Ebene liegen soll.

Erkl. 184. Die Bezeichnung des axonometrischen Bildes und der Rissbilder einer Raumgrösse bei der Darstellung in schiefwinkliger Axonometrie soll sich von der Bezeichnung in rechtwinkliger Axonometrie in soferne unterscheiden, als man den Rissbildern noch einen Strich rechts oben anzufügen hat, bei dem axonometrischen Bilde selbst aber statt des Index: „Null rechts unten“ den „Strich rechts oben“ als Index wählt.

Bezeichnet man z. B. mit a bezw. A einen Punkt oder eine Linie im Raume, so heissen die bezüglichen Rissbilder a_1', a_2', a_3', A_1', A_2', A_3', die axonometrischen Bilder aber a' und A'.

Frage 123. Kann bei der schiefwinkligen Axonometrie bei gegebener **Pr. Eb.** und Projektionsrichtung das Bild des Achsenkreuzes beliebig gewählt werden?

Figur 183.



*) In der Figur 183 ist statt o_0 irrtümlich nur o gesetzt.

Antwort. Bei der rechtwinkligen Axonometrie konnte das Bild des Achsenkreuzes beliebig gewählt werden und es liess sich stets eine **Pr. Eb.** finden, in welcher die angenommenen drei Geraden X_0, Y_0 und Z_0 als die Projektionen dreier aufeinander senkrechten Geraden X, Y und Z sich darstellen. Ist jedoch die Projektionsrichtung unter einem von 90^0 verschiedenen Winkel σ gegen die **Pr. Eb.** geneigt, so ist das Bild des Achsenkreuzes nur innerhalb gewisser Grenzen beliebig wählbar.

Sind nämlich, siehe Figur 183, X' und Y' die axonometrischen Bilder von zweien der Achsen X und Y und ist ferner o' die schiefe, o_0*) die rechtwinklige Projektion des Koordinatenanfangspunktes und σ der Winkel der Projektionsrichtung mit der Bildebene, so kann man sich durch den Punkt o im Raume nach einem beliebigen Punkte a' von X' eine Gerade gezogen und zu dieser durch o eine senkrechte Ebene gelegt denken; diese schneidet die Bildebene nach einer Geraden A', gehend durch einen festen Punkt p', den Durchschnittspunkt der durch o zur Ebene $X'o$ gezogenen Senkrechten. Zieht man nunmehr durch den Schnittpunkt b' von A' und

Y' eine Gerade nach o und zu dieser Geraden wieder eine senkrechte Ebene durch o, so liefert diese mit der Bildebene eine Schnittgerade B', gehend durch den Punkt a' und durch den Schnittpunkt p'' der durch o senkrecht zur Ebene $Y'o$ gezogenen Geraden. Die Geraden A' und B' schneiden sich in einem Punkte c und bilden im Verein mit der Verbindungslinie $a'b'$ ein Dreiseit derart, dass die drei Geraden $a'o$, $b'o$, co aufeinander senkrecht stehen. Das Dreieck $a'b'c$ ist also ein Spurendreieck der Bildebene und durch c geht das Bild Z'' der dritten Achse des Achsenkreuzes hindurch.

Lässt man den Punkt a' die Gerade X' durchlaufen und wiederholt die angegebene Konstruktion, so bleiben die Punkte p' und p'' fest, der Punkt b' durchläuft die Gerade Y', der Punkt c dagegen beschreibt einen Kegelschnitt K'. Von diesem Kegelschnitt kennt man die beiden Punkte p' und p'', sowie die Tangenten in ihnen, denn diese sind die Verbindungslinien $o'p'$ und $o'p''$, ausserdem sind aber noch zwei Punkte q' und q'' unmittelbar gegeben. Denn nimmt man den unendlich fernen Punkt von X', so entspricht demselben die durch p' zu X' gezogene Senkrechte und diese wird von der Parallelen durch p'' zu X' in q' getroffen; in gleicher Weise entspricht dem unendlich fernen Punkt von Y' die durch p'' zu Y'' gezogene Senkrechte, welche von der Parallelen durch p' zu Y' in q'' geschnitten wird. Der Kegelschnitt K' ist demnach hinreichend bestimmt und kann punktweise konstruiert werden.

Der Kegelschnitt K' kann Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein und es wird die Art derselben abhängen von der Grösse der Winkel φ und ψ der Ebenen oX' und oY' mit der Bildebene. Soll nämlich ein Punkt c in unendliche Ferne rücken, so muss für diesen Fall der zugehörige Winkel $p'b'o_0$ ein Rechter sein, was nur möglich ist, wenn die Gerade X' den über $\overline{o_0p'}$ als Durchmesser beschriebenen Kreis schneidet. Dieser Fall tritt aber ein, wenn die Entfernung $\overline{o_0\mathfrak{o}}$ des Punktes o_0 von der Geraden Y' kleiner ist als die halbe Strecke $\overline{o_0p'}$. Nun ist aber $\overline{o_0\mathfrak{o}} = \operatorname{ctg}\psi$ und $\overline{o_0p'} = \operatorname{tg}\varphi$. Man hat somit als Bedingung dafür, dass der Kegelschnitt K' eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sei, die Beziehung:

$$\operatorname{ctg}\psi \gtreqless \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$$

Ist der Kegelschnitt K' eine Ellipse oder Parabel, so muss das Bild Z_0' der dritten Achse innerhalb des Winkels $p'o'p''$ liegen bezw. mit den Linien $o'p'$ oder $o'p''$ zusammenfallen. Im Falle der Kegelschnitt K' eine Hyperbel ist, darf das Achsenbild Z' in dem genannten Winkel nicht liegen. Die Grenzlagen bleiben die nämlichen wie vorhin.

Die Antwort auf Frage 123 lässt sich nach den vorstehenden Entwickelungen kurz wie folgt zusammenfassen:

„Bei gegebener **Pr. Eb.** und Projektionsrichtung können für eine Darstellung in schiefwinkliger Axonometrie nur zwei der Achsenbilder willkürlich gewählt werden. Die Lage des dritten Achsenbildes dagegen ist nur innerhalb gewisser Grenzen beliebig annehmbar."

Frage 124. Wie konstruiert man das Spurendreieck der Bildebene bei der Darstellung in schiefwinkliger Axonometrie, wenn die Bildebene und die Projektionsrichtung als bekannt vorausgesetzt werden?

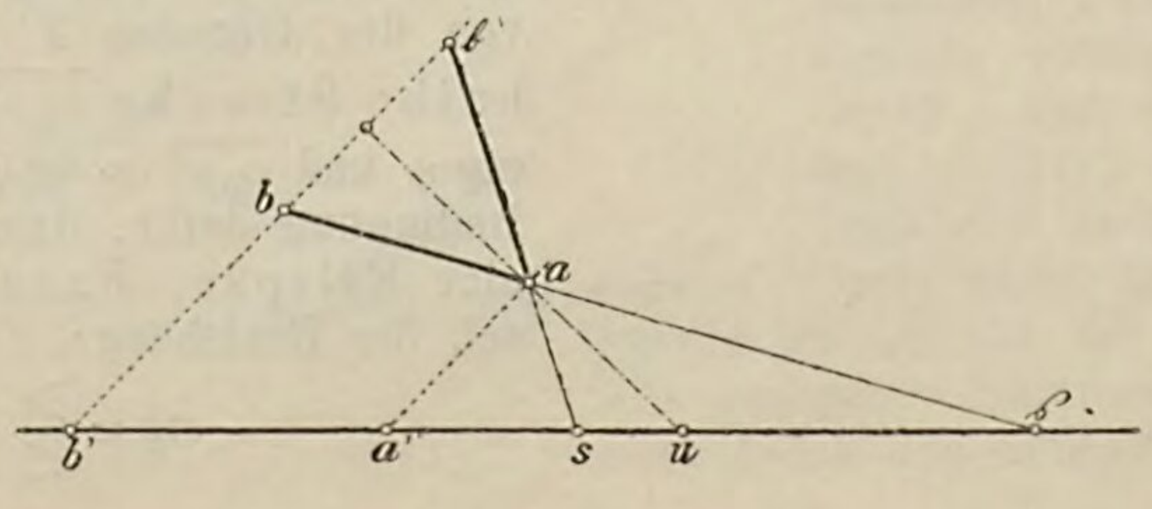
Antwort. Nimmt man zunächst, siehe Figur 183, die Achsenbilder X' und Y', den Punkt o_0 sowie die Strecke o_0o'' als Abstand des Punktes o von der Bildebene ganz beliebig an, und ermittelt die Durchschnittspunkte p' und p'' der den Punkt o enthaltenden Normalen zu den Ebenen oX' und oY', so erkennt man aus der Lage des Dreieckes $o'p'p''$, dass der in Antwort der Frage 123 genannte Kegelschnitt K' eine Ellipse ist.

Wählt man nun die Z'-Achse innerhalb des Winkels $p'o'p''$ ganz beliebig und bestimmt deren Schnittpunkte mit K', siehe Erkl. 185, so geben diese die Durchschnittspunkte der Z-Achse mit der Bildebene an. Da im allgemeinen zwei solcher Schnittpunkte z_0 und z_0' vorhanden sind, so gibt es für das in Figur 183 gewählte Achsenkreuz X', Y', Z' zwei Spuren-

Erkl. 185. Die Schnittpunkte z_0 und z_0' der Geraden Z' mit dem Kegelschnitt K' erhält man zweckmässig mittels eines zu K' centrisch-collinearen Kreises $\mathfrak{K}$, der etwa den Punkt p' enthält und ausserdem die Geraden $p'o'$ und $p''o''$ als Tangenten besitzt. Das Collineationscentrum fällt mit dem Punkte o' zusammen und als Collineationsachse ergibt sich die Gerade S. Den Schnittpunkten $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_0'$ von Z' mit dem Kreise $\mathfrak{K}$ entsprechen centrisch-collinear die Punkte z_0 und z_0'.

Erkl. 186. Dass es zwei Lagen einer Geraden im Raume gibt, denen in der nämlichen **Pr. Eb.** und bei der nämlichen Projektionsrichtung dasselbe schiefe Bild entspricht, erkennt man unmittelbar aus

Figur 184.



Figur 184, die beiden räumlichen Lagen von ab sind symmetrisch angeordnet zu einer Ebene, die senkrecht steht zur Projektionsrichtung.

Verlängert man, s. Figur 184, die Linien ab und $a\mathfrak{b}$ bis zum Schnitt s und $\mathfrak{s}$ mit der **Pr. Eb.**, so erkennt man in den vier Punkten a', u, s und $\mathfrak{s}$ vier harmonische Punkte. Der Punkt u ist nichts anderes als der Schnittpunkt der durch a senkrecht zur Projektionsrichtung geführten Ebene mit der schiefen Projektion $a'b'$ einer der Geraden ab oder $a\mathfrak{b}$.

In Rücksicht auf das eben Gesagte bilden, siehe Figur 183, die Punkte $x_0x_0'o's$, $y_0y_0'o't$, $z_0z_0'o'u$ je vier harmonische Punkte.

Frage 125. Welche Beziehung besteht zwischen der wahren Länge einer Strecke und ihrer schiefen Projektion auf eine gegebene **Pr. Eb.**?

Antwort. Zwischen der wahren Länge einer Strecke und ihrer schiefen Projektion auf eine **Pr. Eb.** besteht ein bestimmter Zusammenhang, der sich wie folgt ausdrücken lässt:

Bezeichnen η und γ die Winkel eines Projektionsstrahles mit den Geraden ab und $a'b'$, so hat man die Verhältnisgleichheit:

$$\overline{ab} : \overline{a'b'} = \sin\gamma : \sin\eta$$

oder:

$$150) \ldots \overline{a'b'} = \overline{ab} \cdot \frac{\sin\eta}{\sin\gamma}$$

Der Ausdruck $\frac{\sin\eta}{\sin\gamma}$ kann alle möglichen Werte von Null bis Unendlich annehmen und heisst der Reduktionskoeffizient für die in Rede stehende schiefe Projektion. Ist die Strecke $\overline{ab}$ gleich der Längeneinheit, so ist die Länge ihrer schiefen Projektion gegeben durch:

$$m = \frac{\sin\eta}{\sin\gamma}$$

Trägt man nun im Raume vom Koordinatenanfangspunkte aus auf die drei Koordinatenachsen X, Y, Z eine Strecke gleich der Längeneinheit ab, bestimmt die rechtwinkligen und schiefwinkligen axonometrischen Bilder dieser drei Abschnitte, so erhält man hierdurch die Stecken:

$$\overline{o_0a_0},\ \overline{o_0b_0},\ \overline{o_0c_0}$$

beziehungsweise:

$$\overline{o'a'},\ \overline{o'b'},\ \overline{o'c'}$$

und es bestehen zwischen den wahren Längen und den Längen der rechtwinkligen und schiefwinkligen Projektionen die folgenden Beziehungen:

$$\overline{o_0a_0} = \cos\alpha\,; \quad \overline{o'a'} = m'$$
$$\overline{o_0b_0} = \cos\beta\,; \quad \overline{o'b'} = n'$$
$$\overline{o_0c_0} = \cos\gamma\,; \quad \overline{o'c'} = p'$$

dreiecke der Bildebene und demnach im Raume zwei Lagen des Achsenkreuzes X, Y und Z, zu welchen das nämliche axonometrische Bild $X'Y'Z'$ gehört.

Die Grössen m', n', p', welche angeben, wie gross sich die auf den drei Achsen X, Y und Z abgetragene Längeneinheit in der gegebenen Projektionsrichtung auf die Bildebene projiziert, kann man wieder durch Zahlenwerte ausdrücken und diese Zahlenwerte als die zum Achsenkreuze gehörigen Verhältniszahlen bezeichnen. Sind dann x, y, z, drei Strecken auf den Achsen X, Y, Z, etwa die Koordinaten eines Punktes und x', y', z' ihre schiefen Projektionen auf den Achsen X', Y', Z', so hat man die Beziehungen:

$$x' = m \cdot x; \quad y' = n' \cdot y; \quad z' = p' \cdot z$$

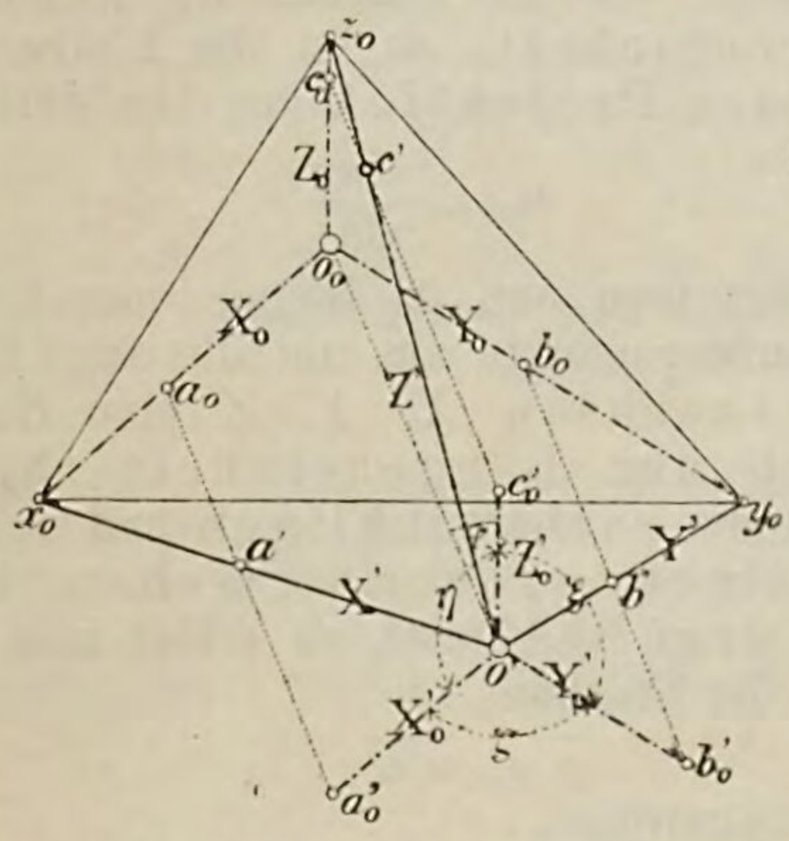
Aus diesen Beziehungen folgen die Verhältnisse:

$$\frac{x'}{x}, \quad \frac{y'}{y}, \quad \frac{z'}{z}$$

welche man wieder als die Verkürzungsverhältnisse bezeichnen kann, obgleich bei der schiefen Projektion die Projektion keineswegs kleiner als die wahre Länge einer Strecke zu sein braucht, im Gegenteil grösser als diese sein kann.

Frage 126. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Grössen der Verhältnisszahlen m', n', p' und der Grösse des Winkels σ der Projektionsrichtung mit der Bildebene?

Figur 185.



Antwort. Denkt man sich die rechtwinklige Projektion des Achsenkreuzes parallel zu sich selbst verschoben, so dass o_0 mit o' sich deckt, und bezeichnet die Endpunkte der vom Koordinatenanfangspunkt auf die drei Achsen aufgetragenen Längeneinheit vor und nach der Verschiebung mit a, b, c, die rechtwinkligen und schiefwinkligen Projektionen dieser Punkte aber beziehungsweise mit a_0', b_0', c_0' und a', b', c', ausserdem den Winkel der Z_0-Achse mit dem Bilde der Projektionsrichtung mit φ, so besteht zwischen den Verhältniszahlen m', n', p' und dem Winkel σ der Projektionsrichtung mit der Bildebene die Beziehung:

Es ist:

151) . . . $m'^2 + n'^2 + p'^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2\sigma$

siehe Erkl. 187.

Erkl. 187. Die Ableitung der in Antwort der Frage 126 aufgestellten Gleichung lässt sich wie folgt vornehmen:

Für die Dreiecke $o'a_0'a'$, $o'b_0'b'$, $o'c_0'c'$, siehe Figur 184, gelten die Beziehungen:

152) . . .
$$\begin{cases} \overline{o'a'^2} = \overline{o'b_0'^2} + \overline{a_0'a'^2} - \overline{2o'a_0'} \cdot \overline{a_0'a'} \cdot \cos(\eta \mp \varphi) \\ \overline{o'b'^2} = \overline{o'b_0'^2} + \overline{b_0'b'^2} - \overline{2o'b_0'} \cdot \overline{b_0'b'} \cdot \cos(\xi \mp \varphi) \\ \overline{o'c'^2} = \overline{o'c_0'^2} + \overline{o_0'c'^2} + \overline{2o'c'_0} \cdot \overline{c_0 \cdot c'} \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

Nun ist aber:

$$\overline{o'a_0'} = \cos\alpha$$
$$\overline{o'b_0'} = \cos\beta$$
$$\overline{o'c_0'} = \cos\gamma$$

ferner:

$$\overline{a_0'a'} = \sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\sigma$$
$$\overline{b_0'b'} = \sin\beta\cdot\operatorname{ctg}\sigma$$
$$\overline{c_0'c'} = \sin\gamma\cdot\operatorname{ctg}\sigma$$

endlich:

$$\overline{o'a'} = m'$$
$$\overline{o'b'} = n'$$
$$\overline{o'c'} = p'$$

In Rücksicht auf die oben angegebenen Beziehungen kann man die Gleichungen 152) auch so schreiben:

$$153)\ \ldots \begin{cases} \overline{m'^2} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\sigma - 2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\sigma\cdot\cos(\eta \mp \varphi) \\ n'^2 = \cos^2\beta + \sin^2\beta\cdot\operatorname{ctg}^2\sigma - 2\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta\cdot\operatorname{ctg}\sigma\cdot\cos(\xi \mp \varphi) \\ p'^2 = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma\cdot\operatorname{ctg}^2\sigma - 2\cdot\cos\gamma\cdot\sin\gamma\cdot\operatorname{ctg}\sigma\cdot\cos\varphi \end{cases}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen erhält man:

$$m'^2 + n'^2 + p'^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2\sigma$$

Erkl. 188. Kennt man für ein Achsenkreuz die Verhältniszahlen von vornherein, so ist hiermit zugleich der Winkel der Projektionsstrahlen gegen die Bildebene bestimmt, man erhält nämlich:

$$154)\ \ldots\ \operatorname{ctg}^2\sigma = m'^2 + n'^2 + p'^2 - 2$$

Das axonometrische Bild des Achsenkreuzes selbst kann aber noch ganz beliebig gewählt werden.

Frage 127. Wie konstruiert man das Spurendreieck der Bildebene bei der Darstellung in schiefwinkliger Axonometrie, wenn sowohl das axonometrische Bild des Achsenkreuzes als auch die Verhältniszahlen als bekannt vorausgesetzt werden.

Erkl. 189. Sind, siehe Figur 186, $\overline{o'a'}$, $\overline{o'b'}$, $\overline{o'c'}$ drei von einem Punkte ausgehende und unter beliebigen Winkeln zu einander geneigte Gerade von beliebiger Länge als Parallelprojektionen von dreien im Raume aufeinander senkrecht stehenden, durch einen Punkt gehenden Geraden von gleicher Länge gegeben, so lässt sich unschwer die Lage eines Projektionsstrahles gegen die Koordinatenebenen bestimmen. Denn nimmt man o' zugleich als rechtwinklige Projektion des Koordinatenanfangspunktes, eines Koordinatensystemes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, für welches die $\mathfrak{Z}$-Achse mit $o'c'$ sich deckt und die $\mathfrak{Z}\mathfrak{X}$-Ebene mit der Bildebene zusammenfällt, so steht die vertikale Projektion $o'a_2$ der $\mathfrak{X}$-Achse senkrecht auf

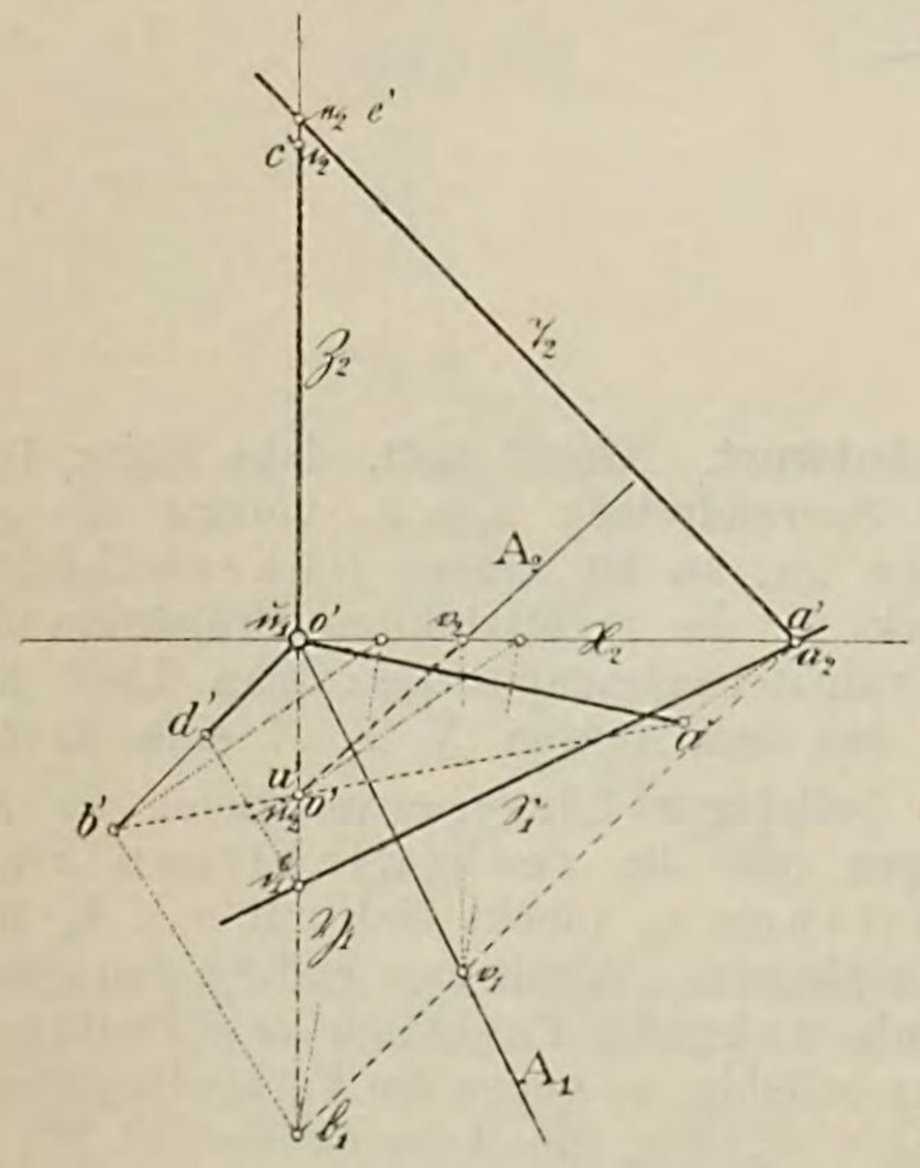
Antwort. Nimmt man, siehe Figur 187, das Spurendreieck $x_0y_0z_0$ vorerst als gegeben an, so ist dessen Höhenschnittpunkt o_0 die rechtwinklige Projektion des Koordinatenanfangspunktes; man kann nun auf den drei Achsen X, Y, Z eine Strecke von beliebiger Länge etwa gleich $\overline{ox}$ abtragen und die rechtwinkligen Projektionen a_0 (deckt sich mit x_0), b_0 und c_0 bestimmen. Wählt man endlich den Punkt o' als schiefe Projektion des Punktes o ganz beliebig, so geben die Verbindungslinien $o'x_0$, $o'y_0$, $o'z_0$ die Achsenbilder X', Y', Z' für die Darstellung in schiefwinkliger Axonometrie, und auf ihnen liegen die schiefen Projektionen a' (deckt sich mit a_0 und x_0), b' und c' der Endpunkte a, b, c. Legt man durch den Punkt a eine

$o'c'$. Die horizontale Projektion $o'\mathfrak{b}_1$ der $\mathfrak{Y}$-Achse ist senkrecht zu $o\mathfrak{a}_2$ und es sind die drei Strecken $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{c}_2} = \overline{o'c'}$, $\overline{o'\mathfrak{a}_2}$ und $\overline{o'\mathfrak{b}_1}$ einander gleich.

Der Durchschnittspunkt von $o'c'$ und $a'b'$ kann aufgefasst werden als Parallelprojektion eines Punktes u auf der Linie oc im Raume und eines Punktes v der Linie ab im Raume, also als Parallelprojektion eines Projektionsstrahles. Den Punkten u' und v' entsprechen aber in dem rechtwinkligen Koordinatensystem $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Punkte $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, welche die Strecken $\overline{\mathfrak{o}'\mathfrak{c}_2}$ und $\overline{\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1}$ in dem nämlichen Verhältnis teilen wie der Punkt $u'v'$ die Strecken $\overline{o'c'}$ und $\overline{a'b'}$ teilt. Die Linien $\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_2$ stellen daher die rechtwinkligen Projektionen der Projektionsrichtung dar. Legt man nun durch den Punkt $\mathfrak{a}$ eine Ebene senkrecht zum Strahle $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$, so steht die Vertikalspur $\mathfrak{T}_2$ dieser Ebene senkrecht zu $\mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_2$ und schneidet $o'c'$ in einem Punkte $\mathfrak{e}_2$, der mit der schiefen Projektion e' sich deckt; die horizontale Spur $\mathfrak{S}_1$ der vorhin genannten Ebene steht senkrecht zu $\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1$ und schneidet $\mathfrak{Y}_1$ in einem Punkte $\mathfrak{d}_1$, dem auf $\mathfrak{Y}'$ ein Punkt d' entspricht, gelegen auf der Parallelen durch $\mathfrak{d}_1$ zu $b'\mathfrak{b}_1$.

Das Dreieck $a'd'e'$ stellt somit die schiefe Projektion des Schnittdreieckes einer durch den Punkt a im Raume zur Projektionsrichtung uv senkrechten Ebene mit den drei Koordinatenebenen dar, entspricht also dem Dreieck $a'd'e'$ der Fig. 187.

Figur 186.



Erkl. 190. Um zu entscheiden, welche von den beiden Richtungen $d'g$ und $d'd_0$, siehe Figur 187, die Projektionsrichtung darstellt, hat man nur zu beachten, dass eine Parallele S durch a' zu einer der genannten Richtungen eine Ebene E senkrecht zur Projektionsrichtung und bestimmt die rechtwinklige Projektion $a'd_0e_0$ des Schnittdreieckes dieser Ebene E mit den drei Koordinatenebenen, so stehen die Seiten $a'd_0$, d_0e_0 und e_0a' beziehungsweise senkrecht auf den Achsenbildern Z', X' und Y'. Aus den Punkten d_0 und e_0 ergeben sich die schiefen Projektionen d' und e' in den Parallelen durch d_0 und e_0 zu o_0o' auf den Achsenbildern Y' und Z' beziehungsweise.

Zieht man nun $e'f$ senkrecht $e'e_0$ und fg parallel d_0e_0, ferner $e'h$ senkrecht Z' und $d'k$ senkrecht Y', so erkennt man die Aehnlichkeit der Dreiecke $e_0e'f$ und $gd'd_0$ und da in beiden Dreiecken die zur Hypotenuse gehörige Höhe gezogen ist, so besteht die Beziehung:

$$\frac{\overline{e_0h}}{\overline{hf}} = \frac{\overline{gk}}{\overline{kd_0}}$$

Ausserdem ist aber auch zufolge des Parallelismus der Linien e_0d_0, hi und fg:

$$\frac{\overline{e_0h}}{\overline{hf}} = \frac{\overline{d_0i}}{\overline{ig}}$$

daher auch:

$$\frac{\overline{gk}}{\overline{kd_0}} = \frac{\overline{d_0i}}{\overline{ig}}$$

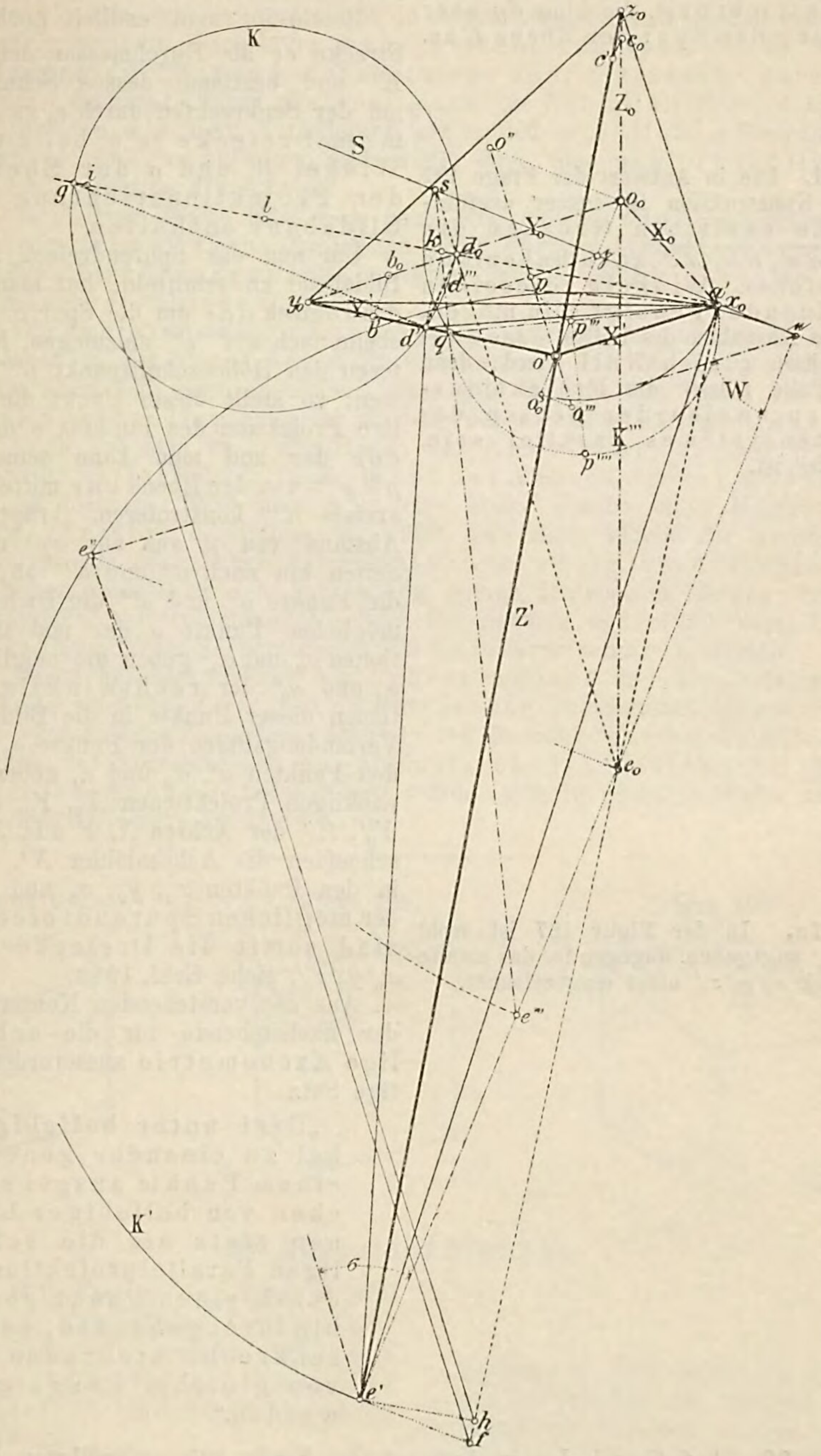
woraus die Gleichheit der Strecken gi und $\overline{kd_0}$ hervorgeht, und andererseits folgt, dass die Strecken $\overline{gd_0}$ und $\overline{ik}$ denselben Halbierungspunkt l besitzen.

Ein Kreis K um l als Mittelpunkt und gehend durch d' schneidet die Linie $a'd_0$ in zweien Punkten g und d_0 derart, dass die Verbindungslinie $d'd_0$ das Bild der Projektionsrichtung, die Linie gd' die Richtung der Spur S einer zur Projektionsrichtung senkrechten Ebene liefert.

Die in der Frage 127 enthaltene Aufgabe ist also gelöst, sobald man das Dreieck $a'd'e'$ kennt; die Punkte d' und e' sind aber sehr leicht zu ermitteln, siehe Erkl. 189.

Hat man das Dreieck $a'd'e'$, so wie in Erkl. 189 gezeigt ist, konstruiert, so zieht man $a'f$ und $a'g$ beziehungsweise senkrecht zu Y' und Z', hierauf durch e' die Senkrechte $e'h$ zu Z', durch d' die Senkrechte $d'k$ zu Y' und ausserdem die Senkrechte hi durch h zu X'. Um den Halbierungspunkt l von $\overline{ik}$ beschreibe man den Kreis K durch d', so liefert derselbe auf $a'g$ die Punkte g und d_0 und es gibt die Verbindungslinie $d'g$ die Richtung der Spur S der Ebene ade und $d'd_0$ das Bild der Projektionsrichtung, siehe Erkl. 190.

Figur 187.



solche Lage gegen die in Betracht kommenden Punkte d' und g bezw. d' und d_0 einnehmen muss, dass die rechtwinklige Projektion von d, also g oder d_0 stets zwischen d_0' und der genannten Parallelen S' durch a' sich befindet. Im Zieht man noch durch e' die Parallele $e'e_0$ zu $d'd_0$ bis zum Schnitt mit $a'h$, so ist e_0 die rechtwinklige Projektion des Punktes e. Man kennt nunmehr auch die

vorliegenden Falle trifft dies nur für den Punkt d_0 zu, die Linie $d'd_0$ gibt sonach das Bild der Projektionsrichtung, die Linie dg aber die Richtung der Spur der Ebene E an.

Erkl. 191. Die in Antwort der Frage 127 angegebene Konstruktion ist immer ausführbar, welche endlichen Grössen die Strecken $\overline{o'a'}$, $\overline{o'b'}$, $\overline{o'c'}$ auch haben und unter welchen Winkeln dieselben auch zu einander geneigt sein mögen, mit alleiniger Ausnahme des Falles, dass zwei der Strecken gleich Null sind, denn in diesem Falle müsste die Projektionsrichtung zu zweien der Achsen des Koordinatensystemes parallel sein, was unmöglich ist.

Erkl. 191a. In der Figur 187 ist wohl der Punkt o_0' angegeben, dagegen ist das zweite Spurendreieck $x_0'y_0'z_0'$ nicht eingezeichnet.

rechtwinklige Projektion $a'd_0e_0$ des Schnittdreieckes ade.

Beschreibt man endlich noch über der Strecke $\overline{ee}$ als Durchmesser den Halbkreis K' und bestimmt dessen Schnittpunkt e'' mit der Senkrechten durch e_0 zu $e'e$, so sind in dem Dreiecke $ee''e'$ bei e und e' die Winkel W und σ der Ebene E und der Projektionsrichtung mit der Bildebene enthalten.

Um nun das Spurendreieck $x_0y_0z_0$ der Bildebene zu ermitteln, hat man nur nötig, das Dreieck ade um die Spur S in die Bildebene nach $a'd'''e'''$ umzulegen, in dem letzteren den Höhenschnittpunkt p''' zu bestimmen, so stellt dieser Punkt die rechtwinklige Projektion des Punktes o in der Ebene ade dar und man kann seinen Abstand $p'''p''''$ von der Ebene ade mittels des Halbkreises K''' konstruieren. Trägt man diesen Abstand von p aus auf op' nach beiden Seiten hin nach o'' und o''' ab, so stellen die Punkte o'' und o''' die Umlegungen der möglichen Punkte o dar und ihre Projektionen o_0 und o_0' geben die möglichen Lagen o_0 und o_0' der rechtwinkligen Projektionen dieser Punkte in die Bildebene. Die Verbindungslinien der Punkte o_0 und o_0' mit den Punkten a', d_0 und e_0 geben die rechtwinkligen Projektionen X_0, Y_0, Z_0 und X_0', Y_0', Z_0' der Achsen X, Y und Z und diese schneiden die Achsenbilder X', Y' und Z' in den Punkten x_0, y_0, z_0 und x_0, y_0', z_0' der möglichen Spurendreiecke. Diese sind somit die Dreiecke $x_0y_0z_0$ und $x_0'y_0'z_0'$, siehe Erkl. 191a.

Aus der vorstehenden Konstruktion folgt der nachstehende für die schiefwinklige Axonometrie ausserordentlich wichtige Satz:

> „Drei unter beliebigem Winkel zu einander geneigte, von einem Punkte ausgehende Strecken von beliebiger Länge können stets als die schiefwinkligen Parallelprojektionen dreier durch einen Punkt des Raumes hindurchgehenden, aufeinander senkrecht stehenden Geraden von gleicher Länge genommen werden.“

Anmerkung 38. Auf Grund des in Antwort der Frage 127 aufgeführten Satzes, der nach seinem Entdecker Pohlke die Bezeichnung „Pohlke'scher Satz“ führt, und die Grundlage für alle Konstruktionen der schiefwinkligen Axonometrie bildet, kann man sowohl das Bild des Achsenkreuzes als auch die Verkürzungsverhältnisse für eine axonometrische Darstellung ganz willkürlich wählen.

Soll also z. B. von einem durch Grund- und Aufriss dargestellten Körper ein axonometrisches Bild konstruiert werden, so verfahre man in gleicher Weise, wie dies bei der Darstellung in rechtwinkliger Axonometrie gezeigt wurde, nur wähle man die Winkel der Achsenbilder und auch die zu denselben gehörigen Verkürzungsverhältnisse oder Massstäbe ganz beliebig. Man kann sie insbesondere alle drei gleich der Einheit wählen, d. h. man kann die axonometrischen Koordinaten gleich den wirklichen Koordinaten, also in wahrer Grösse auftragen und erhält dann eine schiefwinklige isometrische Projektion des Körpers.

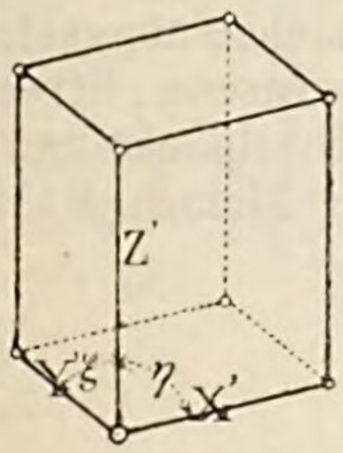
In gleicher Weise lässt sich auch eine schiefwinklige dimetrische, desgl. eine trimetrische Projektion eines Körpers herstellen, je nachdem man zwei der Verkürzungsverhältnisse einander gleich oder alle drei von einander verschieden wählt.

Die schiefwinklige Axonometrie gewährt, wie man sieht, die grösste Freiheit in der Wahl des Achsenkreuzes und der Achsenmassstäbe. Sie hat aber den einen Nachtheil, dass die dargestellten Bilder im allgemeinen weniger anschaulich ausfallen als jene der rechtwinkligen Axonometrie.

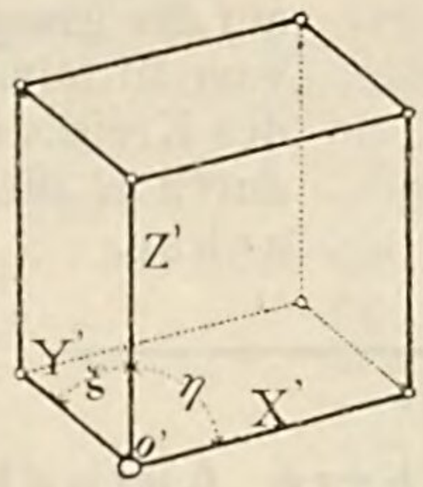
Doch hat man es in der Hand, die Abweichungen der Bilder von der wahren Gestalt durch die Wahl der Achsenwinkel mehr oder weniger gross zu nehmen. Will man z. B. eine ebene Fläche eines Körpers möglichst wenig verzerrt darstellen, so wählt man diese Fläche zur Koordinatenebene und nimmt den bezüglichen Achsenwinkel nur wenig verschieden von 90^0, die Längen parallel zu den Achsen aber gleich den wahren Längen; man kann den Achsenwinkel selbstverständlich gleich 90^0 nehmen und erhält dann im axonometrischen Bilde die betreffende Fläche in ihrer wahren Gestalt.

Durch besondere Wahl des Achsenkreuzes und der Bildebene hat man eine Reihe von besonderen axonometrischen Projektionen aufgestellt und denselben eigene Namen gegeben. Hiervon soll im nachstehenden die Rede sein. Was bezüglich der verschiedenen axonometrischen Ansichten bei der rechtwinkligen Axonometrie gesagt wurde, gilt in gleicher Weise auch für die schiefwinkligen Axonometrie.

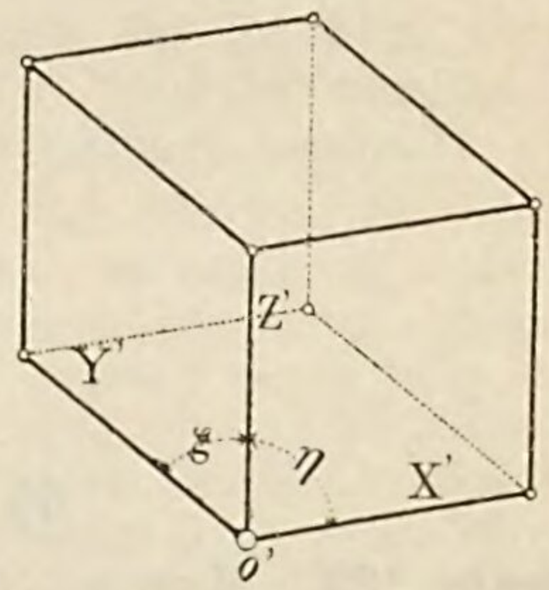
Figur 188.



Figur 189.



Figur 190.



c) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 121. Man zeichne einen Würfel von gegebener Kantenlänge l in allgemeiner schiefer axonometrischer Projektion, trimetrisch, dimetrisch und isometrisch und zwar in Obersicht links.

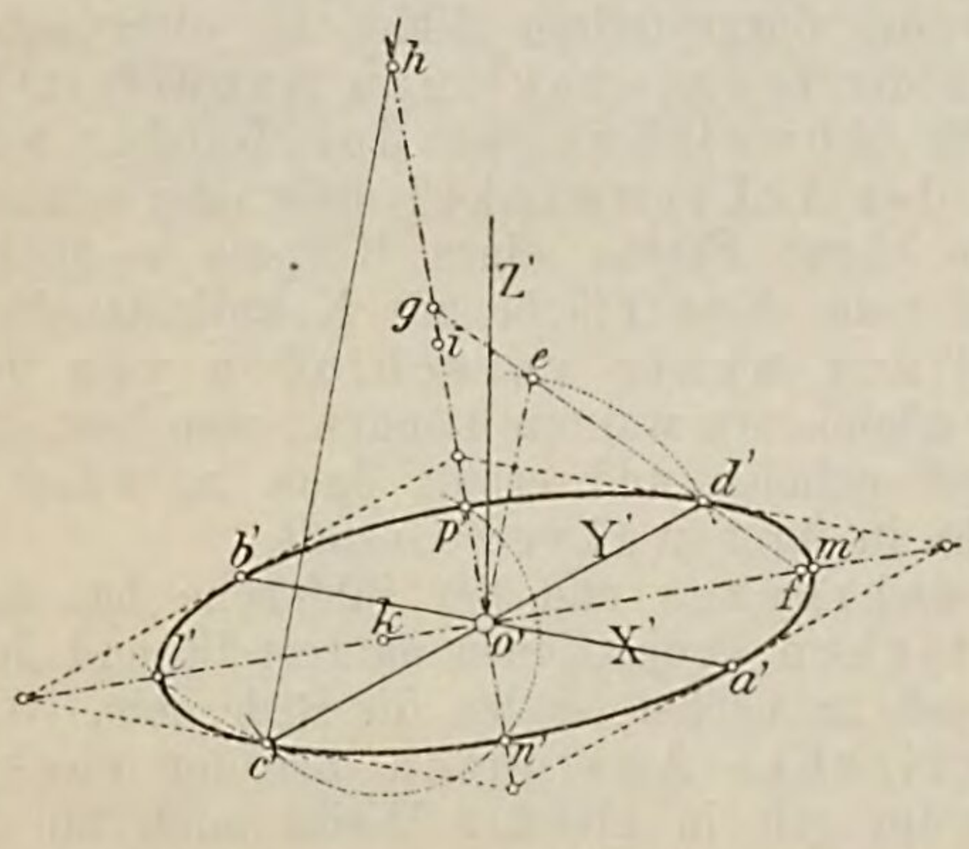
Auflösung. Man wähle das Achsenkreuz so wie die Figuren 188, 189 und 190 zeigen, und zwar die X-Achse rechts von Z' und die Winkel ξ und η kleiner als 90^0 und trage in Figur 188 auf X' einen beliebigen Teil der Würfelkante etwa $\frac{3}{4}l$, auf Y' $\frac{1}{2}l$, auf Z' die Würfelkante l selbst auf und ziehe durch die so sich ergebenden Endpunkte

Parallele zu den Achsenrichtungen, so erhält man hierdurch eine trimetrische Projektion des Würfels.

Die Figur 189 zeigt eine dimetrische Projektion des Würfels, die Figur 190 zeigt eine isometrische Projektion des Würfels.

Aufgabe 122. Man zeichne für ein beliebig gewähltes Achsenkreuz das isometrische Bild eines in der XY-Ebene liegenden Kreises.

Figur 191.



Auflösung. Ist, s. Figur 191, $X'Y'Z'$ das gewählte Achsenkreuz, so trage man den Kreishalbmesser r, unter der Voraussetzung, dass der Mittelpunkt des Kreisbildes mit o' zusammenfällt, auf den Achsen X' und Y' nach $\overline{o'a'}$, $\overline{o'b'}$, $\overline{o'c'}$ und $\overline{o'd'}$ ab; man kennt nun von der Ellipse unmittelbar zwei conjugierte Durchmesser von gleicher Länge. Die Achsen der Ellipse sind demnach die Halbierungslinien des Winkels $a'o'd'$; die Achsenlängen kann man auf mehrfache Weise ermitteln, entweder so wie in Aufgabe 84 gezeigt wurde, indem man $\overline{o'e}$ senkrecht $o'a'$ und gleich $\overline{oa'}$ zieht und $d'e$ verbindet, dann ist $\overline{ef} = \alpha$ und $\overline{eg} = \beta$, oder mittels des in Antwort der Frage 117 gezeigten Verfahrens, indem man in c' die Ellipsennormale $c'h$ senkrecht zu $o'a'$ zieht und um den Halbierungspunkt i von $\overline{o'h}$ den Kreis durch o' beschreibt; entsprechend ergibt sich mittels des Halbierungspunktes k der durch die Normale $c'h$ auf der grossen Ellipsenachse abgeschnittenen vom Mittelpunkte o' gemessenen Strecke, und des Kreises um k als Mittelpunkt und gehend durch c' die Länge der kleinen Ellipsenachse.

---

d) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 123. Man zeichne die in den Aufgaben 81, 85, 86 in rechtwinkliger Projektion dargestellten Körper für ein beliebig gewähltes Achsenkreuz und für beliebig gewählte Verhältniszahlen m', n', p' in schiefwinkliger Axonometrie, insbesondere isometrisch.

Aufgabe 124. Man führe die übrigen als ungelöst aufgeführten Aufgaben 82, 83, 87, 88, 89 und 90 in gleicher Weise in schiefwinkliger Axonometrie durch.

B. Ueber die besonderen schiefwinkligen axonometrischen Projektionsarten.

a) Die besonderen schiefwinkligen axonometrischen Projektionsarten im allgemeinen.

Frage 128. Wie leitet man aus der in Antwort der Frage 127 entwickelten allgemeinen schiefwinkligen axonometrischen Projektion besondere Projektionsarten ab?

Antwort. Besondere Projektionsarten erhält man durch Annahme einer besonderen Lage der Bildebene gegen die Koordinatenachsen, sowie durch Festsetzung einer bestimmten Projektionsrichtung.

Frage 129. Welche besonderen Lagen kann die Bildebene gegen die Koordinatenachsen einnehmen?

Antwort. Die Bildebene kann entweder

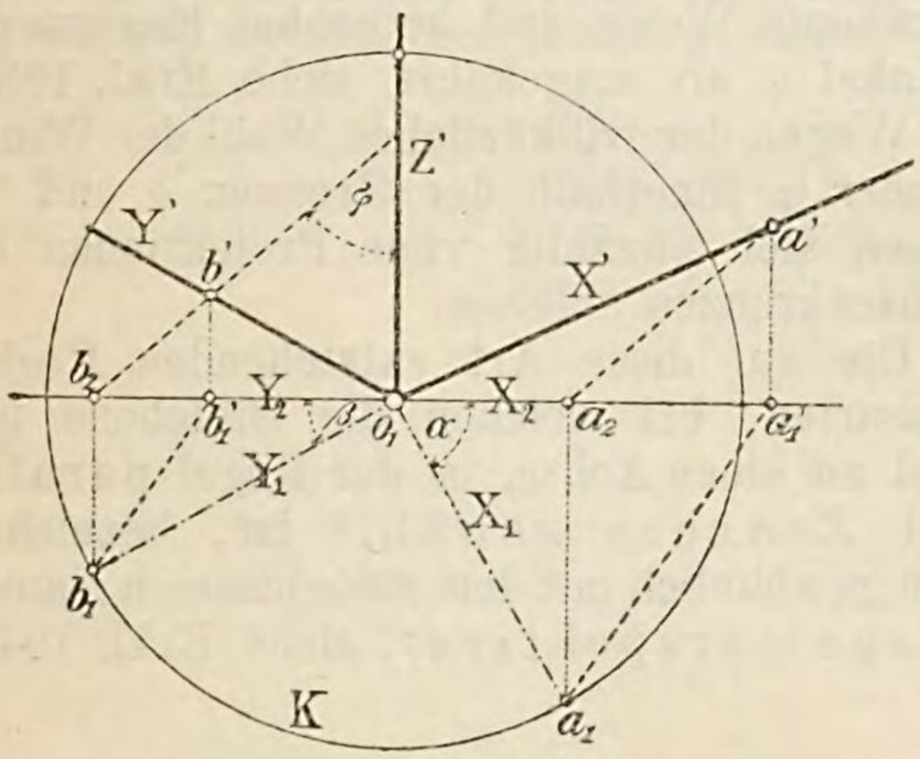
a) zu einer Achse oder

b) zu zweien der Achsen parallel laufen.

Frage 130. Welche Projektionsart entsteht, wenn die Bildebene zu einer Koordinatenachse parallel läuft.

Antwort. Wählt man beispielsweise die Bildebene parallel zur Z-Achse und zusammenfallend mit der **Pr. Eb.** E_2, so steht die XY-Ebene auf ersterer senkrecht; zeichnet man, s. Figur 192, zunächst die rechtwinkligen Projektionen $X_1 X_2$, $Y_1 Y_2$ und Z' eines Achsenkreuzes und trägt vom Koordinatenanfangspunkte o aus auf den drei Achsen je eine Strecke gleich der Einheit ab, wählt eine gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 unter beliebigen Winkeln geneigte Gerade als Projektionsrichtung, projiziert die Endpunkte a, b, c der Strecken $\overline{oa}$, $\overline{ob}$, $\overline{oc}$ auf die Bildebene, so erhält man die schiefen Projektionen a', b', c' (der Punkt c' fehlt in der Figur 192, er gehört an die Stelle des Durchschnittes des Kreises K mit Z') und daher in X', Y', Z' die schiefe Projektion des Achsenkreuzes. Bezeichnen α, β, γ die Winkel der Achsen X, Y, Z mit der Bildebene, ist ferner σ der Winkel der Projektionsrichtung mit der Bildebene, endlich φ der Winkel des Bildes der Projektionsrichtung mit dem Bilde der Z-Achse, so bestehen für die Strecken $\overline{o'a'}$, $\overline{o'b'}$, $\overline{o'c'}$ in Rücksicht auf die Gleichungen 152) die Beziehungen:

Figur 192.



Erkl. 192. Aus der Figur 192 erkennt man folgende Gleichheiten:

Es ist:

$$\overline{a_2 a_1} = \sin\alpha$$
$$\overline{a_2 a'} = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\sigma$$
$$\overline{a_2 a_1'} = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\sigma \cdot \sin\varphi$$
$$\overline{a' a_1'} = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\sigma \cdot \cos\varphi$$
$$\overline{o' a_1'} = \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\sigma \cdot \sin\varphi$$

Es ist:

$$155).\begin{cases} \overline{o' a'^2} = m'^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\sigma \mp 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\sigma \cdot \cos\varphi \\ \overline{o' b'^2} = n'^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\sigma \mp 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\sigma \cdot \cos\varphi \\ \overline{o' c'^2} = p'^2 = 1 \end{cases}$$

daher:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\overline{a'a_1'}}{\overline{o'a_1'}} = \frac{\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\sigma\cdot\cos\varphi}{\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\sigma\cdot\sin\varphi}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = -\frac{\operatorname{ctg}\sigma\cdot\cos\varphi}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\sigma\cdot\sin\varphi}$$

Entsprechend hat man:

$$\overline{b_2b_1} = \cos\alpha$$
$$\overline{b_2b'} = \cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\sigma$$
$$\overline{b_2b_1'} = \cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\sigma\cdot\sin\varphi$$
$$\overline{b'b_1'} = \cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\sigma\cdot\cos\varphi$$
$$\overline{o'b_1'} = \sin\alpha-\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\sigma\cdot\sin\varphi$$

daher:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\overline{b'b_1'}}{\overline{o'b_1'}} = \frac{\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\sigma\cdot\cos\varphi}{\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\sigma\cdot\sin\varphi}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{ctg}\sigma\cdot\cos\varphi}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\sigma\cdot\sin\varphi}$$

Erkl. 193. Nimmt man die Grösse des Winkels α, d. h. die Neigung der X-Achse zur Bildebene als bekannt an, so erhält man für den Winkel φ die Beziehung:

$$\cos\varphi = \frac{m'^2-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\sigma}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\sigma}$$

oder:

$$= \frac{m'^2-\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cdot(m'^2+n'^2-1)}{\sin 2\alpha}$$

oder:

$$= \frac{m'^2-\cos^2\alpha-m^2-n^2+1+\cos^2\alpha\cdot(m'^2+n'^2-1)}{\sin 2\alpha\cdot(m^2+n^2-1)}$$

$$\cos\varphi = \frac{1-n'^2-\cos^2\alpha\cdot(2-m'^2-n'^2)}{\sin 2\alpha\cdot(m'^2+n'^2-1)}$$

Den gleichen Ausdruck erhält man auch, wenn man $\cos\varphi$ aus der Gleichung für n'^2 berechnet.

Erkl. 194. Die Bezeichnung „Vogelperspektive“ ist eine ganz willkürliche und keineswegs zutreffende. Sie rührt wohl davon her, dass man sich den Standpunkt des Beschauers in der Projektionsrichtung in weiter Ferne (eigentlich in unendlicher Ferne) denken kann, von welchem aus der dargestellte Gegenstand betrachtet wird. Doch ist hierbei die Lage des Gegenstandes unter oder über dem Beschauer möglich, man erhält im einen Falle eine „Obersicht“, im anderen eine „Untersicht“ des betreffenden Gegenstandes.

Frage 131. Welche Projektionsarten entstehen, wenn die Bildebene zu zweien der Achsen parallel läuft?

Die Gl. 155) geht über in folgende:

156) . . . $m'^2+n'^2-1=\operatorname{ctg}^2\sigma$

somit hat man als Bedingung dafür, dass σ einen reellen Wert besitzt, die Beziehung:

157) . . . $m'^2+n'^2>1$

Für die Winkel ε und δ einer zur Z'-Achse senkrechten Geraden mit den Achsenbildern X' und Y' findet man, s. Erkl. 192, aus der Figur 192 unmittelbar folgende Beziehungen:

158) . . .
$$\begin{cases}\operatorname{tg}\varepsilon = \dfrac{\operatorname{ctg}\sigma\cdot\cos\varphi}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\sigma\cdot\sin\varphi}\\ \operatorname{tg}\delta = \dfrac{\operatorname{ctg}\sigma\cdot\cos\varphi}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\sigma\cdot\sin\varphi}\end{cases}$$

Hiermit sind auch die Winkel η und ξ bestimmt, denn man hat:

159) . . .
$$\begin{cases}\operatorname{ctg}\eta = \operatorname{tg}\varepsilon\\ \text{und}\\ \operatorname{ctg}\xi = \operatorname{tg}\delta\end{cases}$$

Wählt man für die Verhältniszahlen m' und n' beliebige Werte und ausserdem einen der Winkel α oder φ willkürlich, so ist hierdurch der Winkel σ und ausserdem im ersten Falle der Winkel φ bestimmt, somit die Projektionsrichtung festgelegt, im zweiten Falle ist dagegen der Winkel α und damit die Lage der X-Achse gegen die Bildebene gegeben.

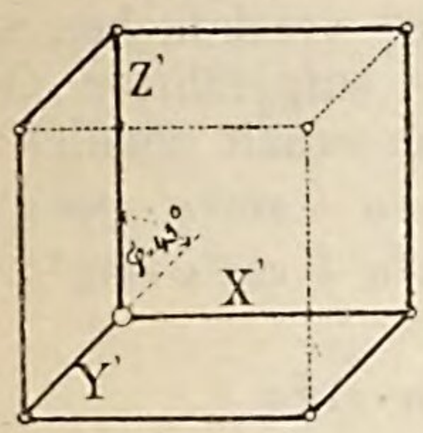
Man gibt zweckmässiger dem Winkel α bestimmte Werte und berechnet hieraus den Winkel φ als umgekehrt, siehe Erkl. 193.

Wegen der willkürlichen Wahl der Winkel α oder φ innerhalb der Grenzen o und 90^0 lassen sich unzählig viele Projektionen des Achsenkreuzes ableiten.

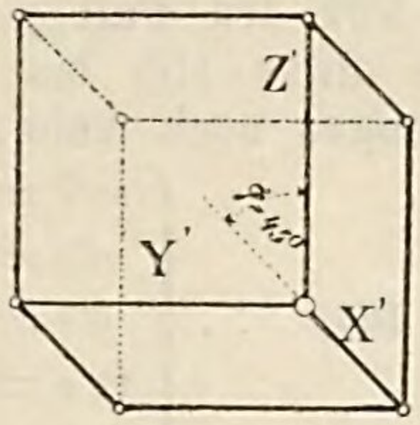
Die auf diese Art entstehenden Projektionsarten, bei welchen die Bildebene parallel zu einer Achse, in der Regel parallel zur Z-Achse gewählt ist, bezeichnet man gewöhnlich mit dem gemeinsamen Namen: „Vogelperspektive“, siehe Erkl. 194.

Antwort. Ist die Bildebene etwa parallel zur XZ-Ebne, siehe Figur 193, so erhält der Winkel α den Wert gleich

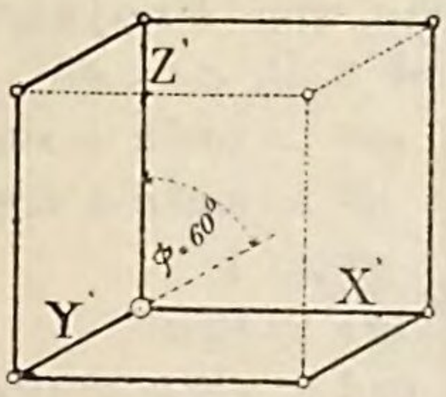
Figur 193.



Figur 194.



Figur 195.



Erkl. 195. Die Bezeichnung „Cavalierperspektive“ rührt wohl davon her, dass in dieser Projektionsart in der Regel die Pläne von Festungen, bei welchen bekanntlich die Benennung Cavalier für ein vorspringendes Aussenwerk auftritt, hergestellt wurden.

Null und die Gleichungen 155 bis 159 gehen über in folgende:

$$160) \ldots \begin{cases} m' = 1 \\ n' = \operatorname{ctg}\sigma \\ p' = 1 \\ \operatorname{tg}\varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$161) \ldots \operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{ctg}\sigma \cdot \cos\varphi}{0 - \operatorname{ctg}\sigma \cdot \sin\varphi} = -\operatorname{ctg}\varphi$$

Der Winkel φ ist beliebig.

Alle in der XZ-Ebene liegenden oder zu dieser parallelen Figuren projizieren sich in ihrer wahren Gestalt.

Ist der Winkel β gleich Null, so läuft die Bildebene parallel zur YZ-Ebene, siehe Figur 194, und man hat in Rücksicht auf die Gleichungen 155 bis 159:

$$162) \ldots \begin{cases} m' = \operatorname{ctg}\sigma \\ n' = 1 \\ p' = 1 \end{cases}$$

$$163) \ldots \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{ctg}\sigma \cdot \cos\varphi}{0 + \operatorname{ctg}\sigma \cdot \sin\varphi} = +\operatorname{ctg}\varphi$$

$$\operatorname{tg}\delta = 0$$

oder:

$$\varepsilon = \varphi = 90^0 - \eta$$

Was vorhin bezüglich der XZ-Ebene gesagt wurde, gilt nunmehr für die YZ-Ebene.

Da bei der vorstehenden Projektionsart sowohl die Grösse n' als auch der Winkel φ beliebig gewählt werden kann, so bietet dieselbe eine grosse Mannigfaltigkeit.

Wählt man beispielsweise $\varphi = 45^0$ und $n' = 1$, so wird $\sigma = 45^0$. Die so bestimmte Projektion bezeichnet man als Cavalierperspektive, siehe Figur 193 und 194.

Wählt man $\varphi = 60^0$ und $n' = \frac{1}{2}$, siehe Figur 195, so wird $\sigma = 63^0\,26'$ und man erhält jene Projektionsart, welche bereits im III. Teile, 1. Hälfte dieses Lehrbuches unter der Bezeichnung schiefe Projektion eingehender behandelt wurde.

Gibt man endlich dem Winkel φ die Werte 0 oder 90^0, so entsteht eine Projektionsart, welche man, ähnlich wie bei der rechtwinkligen Projektion als eine Uebereckprojektion bezeichnen kann.

---

b) Die Vogelperspektive und ihre besonderen Fälle.

Frage 132. Welche gebräuchlichsten Werte besitzen die Verhältniszahlen m' und n', bei der in Frage und Antwort als Vogelperspektive bezeichneten Projektionsart und

Antwort. Man kann den Verhältniszahlen m' und n' beliebige Werte beilegen und ent-

wie nimmt man bei derselben zweckmässigst die Werte für die Winkel φ oder α an?

weder dem Winkel α alle Werte von 0 bis 90^0, oder aber dem Winkel φ bestimmte Werte beilegen.

Gebräuchlich und angewendet sind nur jene Projektionen, für welche $\varphi = 0$ oder $\varphi = 90^0$ angenommen ist.

Für den Fall $\varphi = 0^0$ vereinfachen sich die unter 155 bis 159 aufgeführten Gleichungen noch mehr; man erhält nämlich:

$$164) \ldots \begin{cases} m'^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\sigma \\ n'^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\sigma \\ p'^2 = 1 \\ \operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\sigma \\ \operatorname{tg}\delta = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\sigma \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung $\varphi = 0^0$ hat man nun eine Reihe von Projektionsarten eingeführt. Ist z. B. $\sigma = 45^0$, so ist:

$$165) \ldots \begin{cases} m'^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \\ n'^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ p'^2 = 1 \\ \operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{tg}\delta = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

Diese so entstehende Projektion ist eine isometrische Projektion und führt vielfach auch die Benennung „Militärperspektive“, siehe Erkl. 196. Bei derselben sind die Bildebene und die XY-Ebene gegen die Projektionsstrahlen unter dem gleichen Winkel $\sigma = 45^0$ geneigt. Jede in der XY-Ebene liegende Figur projiziert sich in wahrer Gestalt.

Ein spezieller Fall dieser Projektionsart ergibt sich, wenn man den Winkel $\alpha = 45^0$ setzt, dann wird nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{tg}\delta = \operatorname{ctg}\alpha \end{array}\right\} \text{ d. h. } \alpha = \delta = 45^0$$

Die Bilder der X- und Y-Achse stehen aufeinander senkrecht und die entsprechende Projektion kann man wieder als Cavalierperspektive bezeichnen, sie unterscheidet sich jedoch von der in Erkl. 195 genannten Cavalierperspektive insoferne, als dort alle zur XZ-Ebene parallelen Figuren sich in wahrer Gestalt projizieren, während dies hier für die zur XY-Ebene parallelen Figuren der Fall ist.

Ausser den oben genannten isometrischen schiefen Projektionen kann man auch noch dimetrische und trimetrische Projektionen zulassen, indem man die Werte der Verhältniszahlen m' und n' festsetzt, etwa:

$$m' = n' = \frac{3}{4}, \text{ oder } m' = \frac{9}{10}, \; n' = \frac{5}{10}$$

ausserdem einen der Werte $\operatorname{tg}\varepsilon$ oder $\operatorname{tg}\delta$

beliebig annimmt und hieraus den anderen Wert sowie den Winkel α berechnet.

Für $m' = n' = \frac{3}{4}$ erhält man:

$$\operatorname{ctg}\sigma = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16} - 1} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1 \cdot 4142}{4} = 0{,}3535$$

oder:

$$\sigma = 70^0\,32'$$

Wählt man nun $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{3}{4}$, so ist:

$$\frac{3}{4} = \operatorname{tg}\alpha \cdot 0{,}3535$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4 \cdot 0{,}3535} = \frac{3}{1{,}4140} = 0{,}2121$$

$$\alpha = 11^0\,59'$$

Ferner hat man:

$$\operatorname{tg}\delta = 1 \cdot 666$$

$$= \frac{5}{3}$$

$$\delta = 59^0\,1'$$

Für $m' = \frac{9}{10}$; $n' = \frac{5}{10}$ erhält man:

$$\operatorname{ctg}\sigma = \sqrt{\frac{81}{100} + \frac{25}{100} - \frac{100}{100}} = \sqrt{\frac{106}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{6} = 0{,}2449$$

Hieraus folgt für σ der Wert:

$$\sigma = 76^0\,14'$$

Wählt man nun $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{8}$, so ist:

$$\frac{1}{8} = \operatorname{tg}\alpha \cdot 0{,}2449$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{8 \cdot 0{,}2449} = \frac{1}{1{,}9592} = 0{,}51041$$

$$\alpha = 27^0\,2'$$

Ferner hat man:

$$\operatorname{tg}\delta = 0 \cdot 48$$

oder abgerundet:

$$0 \cdot 5 = \frac{1}{2}$$

$$\delta = 25^0\,38'$$

Für den Fall $\varphi = 90^0$ werden die Winkel ε und $\delta = 0$, d. h. die Bilder der X- und Y-Achse stehen auf dem Bilde Z' der Z-Achse senkrecht. Die so entstehenden Projektionen kann man als schiefe Uebereckprojektionen bezeichnen. Es gibt auch hier unzählig viele Projektionen, da der Winkel α innerhalb der Grenzen 0 und 90^0 beliebig gewählt werden kann. Doch haben diese Projektionen keine praktische Bedeutung.

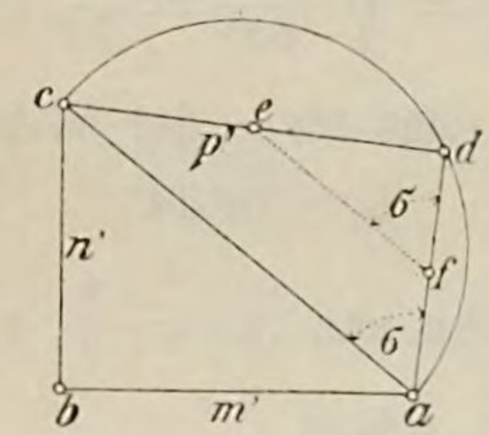
Erkl. 196. Für den Ausdruck „Militärperspektive“ lässt sich wohl die nämliche Begründung geben, wie für die Bezeichnung „Cavalierperspektive“, welche letztere ja nur ein spezieller Fall der ersteren ist.

Erkl. 197. Für die in Antwort der Frage 132 aufgeführten Projektionen lassen sich hierauf bezügliche Winkel wie in folgender Tabelle zusammenstellen:

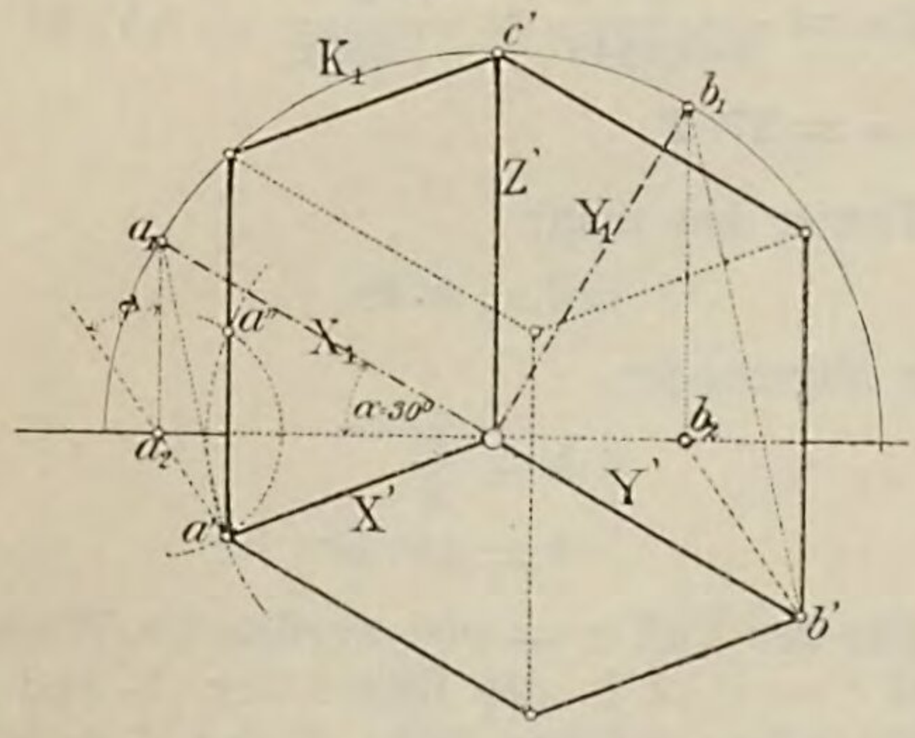
Art der Projektion	m'	n'	σ	α	ε	$\operatorname{tg}\varepsilon$	δ	$\operatorname{tg}\delta$	ξ	η
Isometrisch Militärperspektive	1	1	45^0	—	$36^0\,52'$	$\frac{1}{8}$	$36^0\,52'$	$\frac{1}{8}$	$53^0\,8'$	$53^0\,8'$
Isometrisch Cavalierperspektive	1	1	45^0	45^0	45^0	1	45^0	1	45^0	45^0
Dimetrisch	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$70^0\,32'$	$11^0\,59'$	$36^0\,52'$	$\frac{3}{4}$	$59^0\,1'$	$\frac{5}{3}$	$53^0\,8'$	$30^0\,59'$
Trimetrisch	$\frac{9}{10}$	$\frac{5}{10}$	$76^0\,14'$	$27^0\,2'$	$7^0\,7'$	$\frac{1}{8}$	$25^0\,38'$	$\frac{1}{2}$	$82^0\,53'$	$64^0\,22'$

Frage 133. Wie konstruiert man das Bild des Achsenkreuzes für eine Vogelperspektive mit gegebenen Verhältniszahlen m', n', p', wenn die X-Achse gegen die Bildebene unter einem Winkel $= 30^0$ geneigt sein soll?

Figur 196.



Figur 197.



Erkl. 198. Es gibt zwei zur Linie $a_2 b_2$, siehe Fig. 197, symmetrisch liegende Punkte a' und a'' als Schnittpunkte der Kreise mit den Mittelpunkten a_2 und o' und den Halbmessern $\overline{ad} = \operatorname{ctg}\sigma$ und m', daher sind auch zwei zur Linie $a_2 b_2$ symmetrisch liegende Achsenbilder X' und X'', entsprechend den beiden möglichen räumlichen Lagen von X, vorhanden. In gleicher Weise gibt es auch zwei symmetrisch zu

Antwort. Sind die Grössen m', n' und p' durch Strecken von beliebiger Länge gegeben, so konstruiere man zunächst, siehe Figur 196, den Winkel σ. Unter der Voraussetzung, dass $p' = 1$ ist, erhält man:

$$\operatorname{ctg}\sigma = \overline{ad}$$

Nimmt man die Z'-Achse, so wie die Figur 197 zeigt, an, und zeichnet die Umlegung X_1 der X-Achse unter dem Winkel von 60^0 gegen die Z'-Achse geneigt, so ergibt sich der Punkt a' im Durchschnitt zweier Kreisbögen mit den Mittelpunkten a_2 und o' und den Halbmessern:

$$\overline{a_2 a'} = \overline{a_1 a_2} \cdot \operatorname{ctg}\sigma = \overline{df} \text{ s. Figur 196}$$

(es ist in Figur 196 $\overline{de} = \overline{a_1 a_2}$ (s. Fig. 197), $\overline{ef}$ parallel ae) und $\overline{o'a'} = m'$ beziehungsweise.

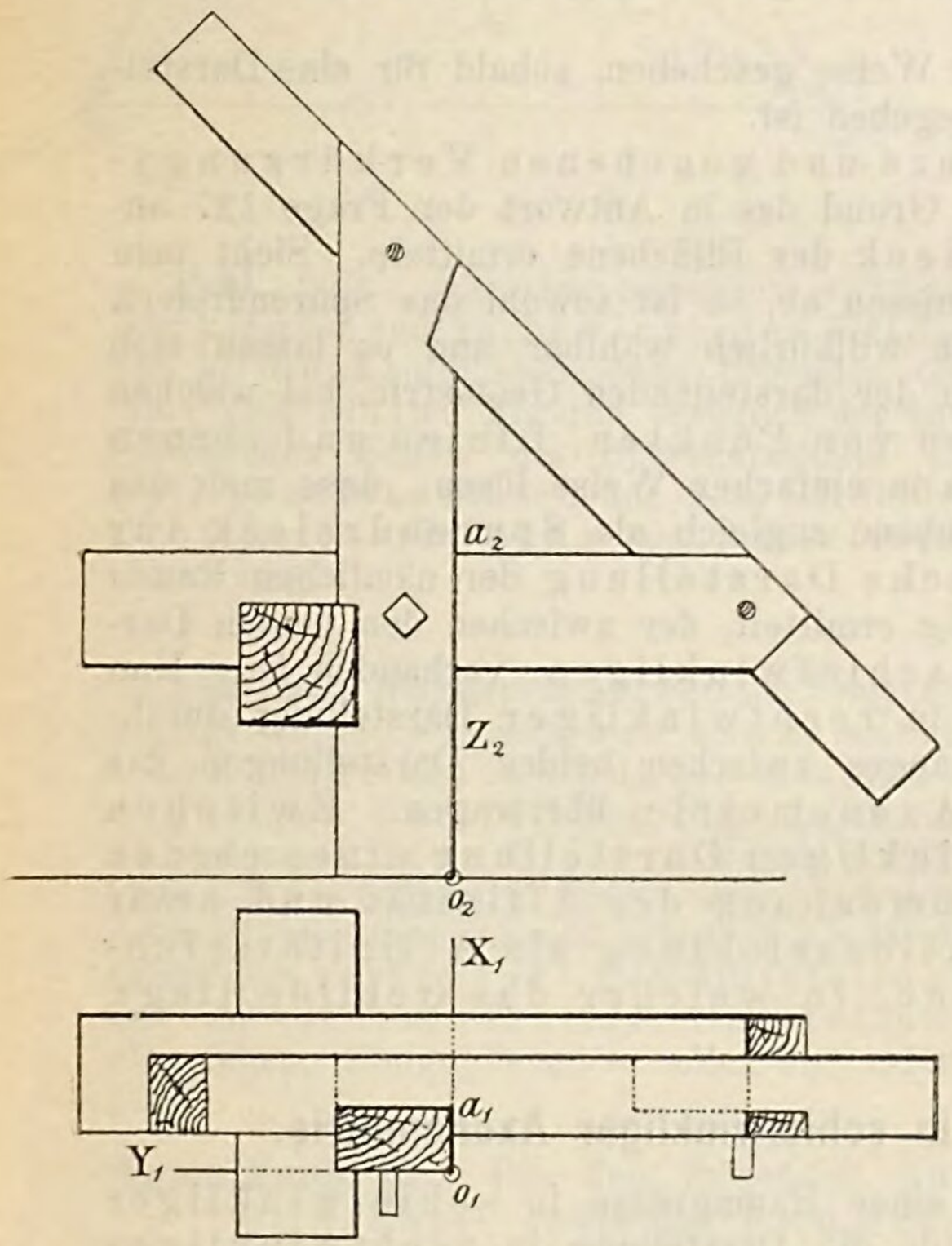
Zieht man endlich Y_1, siehe Figur 197, senkrecht zu X_1 und durch b' die Parallele $b_1 b'$ zu $a_1 a'$, so durchschneidet dieselbe den Kreis mit dem Mittelpunkte o' und dem Halbmesser $= n'$ in einem Punkte b' der Y'-Achse. Hiermit ist das Bild des Achsenkreuzes für die in Rede stehende Projektion gegeben und man erhält mittels der Parallelen durch die Punkte a', b' und c' zu den Achsenbildern das in Figur 197 dargestellte Bild eines Würfels.

$a_2 b_2$ liegende Bilder Y' und Y'' von Y. Das in Figur 197 dargestellte Achsenkreuz entspricht einer „Untersicht links“, das zweite mögliche Achsenkreuz $Z'X''Y'''$ entspräche einer „Obersicht links“. Aus den beiden genannten Achsenkreuzen leiten sich durch Verlängerung der Achsenbilder über den Koordinatenanfangspunkt hinaus noch zwei weitere Achsenkreuze ab, nämlich das Achsenkreuz für „Untersicht rechts“ und jenes für „Obersicht rechts“.

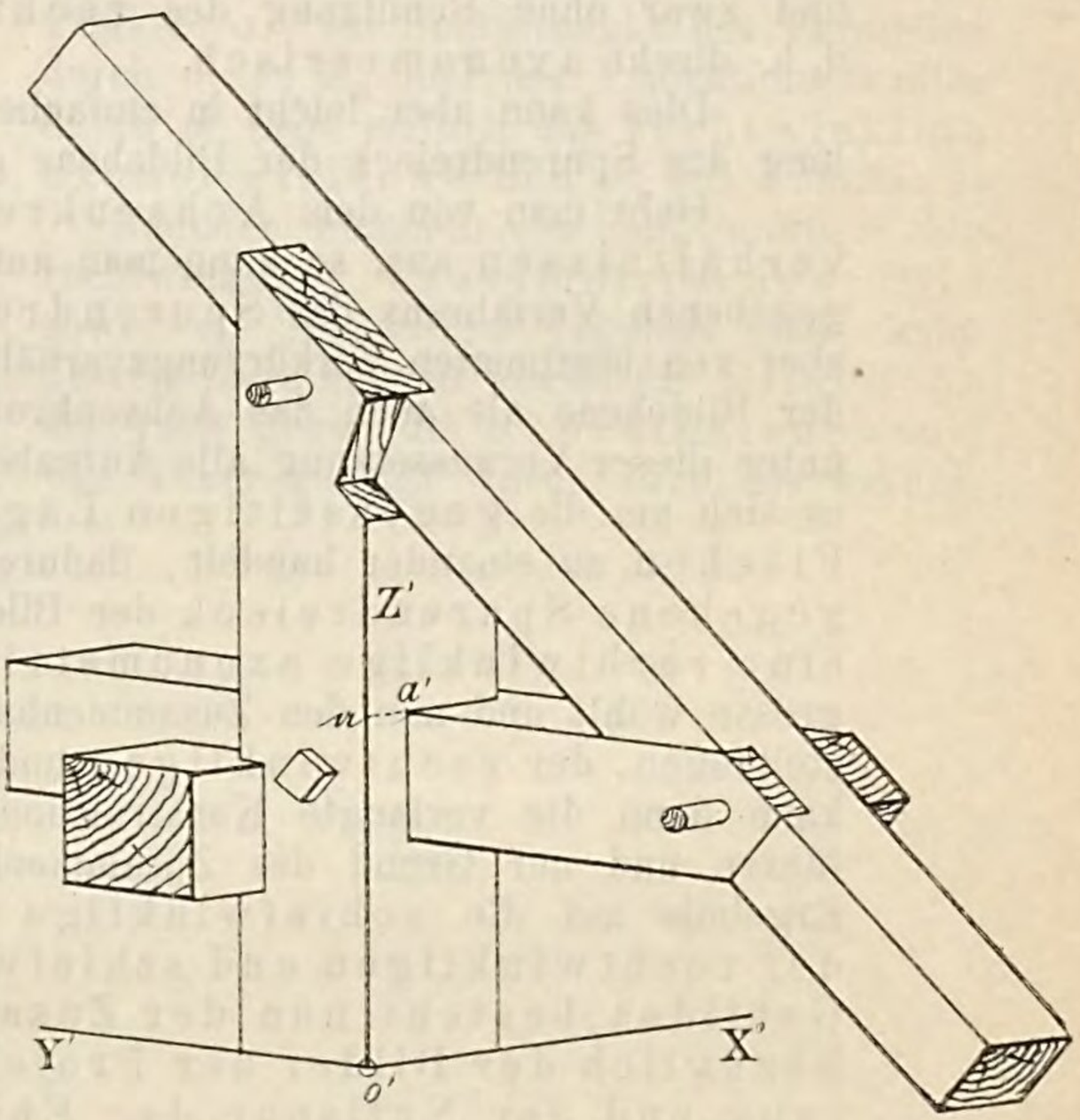
Erkl. 199. Für die in der Tabelle, siehe Erkl. 197, aufgeführten Projektionsarten konstruiert man das Achsenkreuz zweckmässig mit Benützung der Tangentenwerte der Winkel δ und ε in gleicher Weise wie dies bei der Darstellung in rechtwinkliger Axonometrie gezeigt wurde, siehe Frage und Antwort 87.

c) Gelöste Aufgaben.

Figur 198.



Figur 199.



Aufgabe 125. Die in Figur 198 im Grund- und Aufriss dargestellte Holzverbindung ist in der Vogelperspektive $m' : n' : p' = 1 : 1 : 1$ darzustellen und zwar in Obersicht links.

Auflösung. Man zeichnet auf Grund der Angaben in der Tabelle, siehe Erkl. 197, das Achsenkreuz für Obersicht links, siehe Antwort der Frage 37, und bestimmt in gleicher Weise wie bei der rechtwinkligen Projektion mittels der Koordinaten eines Punktes, dessen axonometrisches Bild, so ist z. B.:

$\overline{o'a}$ (Figur 199) $= \overline{o_2 a_2}$ (Figur 198)

$\overline{aa'}$ (Figur 199) $= \overline{o_1 a_1}$ (Figur 198)

d) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 126. Man führe die Aufgabe 123 für die in der Tabelle, s. Erkl. 197, aufgeführten Projektionsarten durch.

C. Ueber die direkten axonometrischen Konstruktionen in schiefwinkliger Darstellung unter Benützung eines gegebenen Achsenkreuzes und Spurendreieckes.

Anmerkung 39. In gleicher Weise wie bei der rechtwinkligen Axonometrie kann man auch bei Darstellungen in schiefwinkliger Axonometrie in die Lage kommen, Längen oder Winkel in wahrer Grösse bestimmen zu müssen und zwar ohne Benützung des rechtwinkligen Grund- und Aufrisses, d. h. direkt axonometrisch.

Dies kann aber leicht in einfacher Weise geschehen, sobald für eine Darstellung das Spurendreieck der Bildebene gegeben ist.

Geht man von dem Achsenkreuze und gegebenen Verkürzungsverhältnissen aus, so kann man auf Grund des in Antwort der Frage 127 angegebenen Verfahrens das Spurendreieck der Bildebene ermitteln. Sieht man aber von bestimmten Verkürzungsverhältnissen ab, so ist sowohl das Spurendreieck der Bildebene als auch das Achsenkreuz willkürlich wählbar und es lassen sich unter dieser Voraussetzung alle Aufgaben der darstellenden Geometrie, bei welchen es sich um die gegenseitigen Lagen von Punkten, Linien und ebenen Flächen zu einander handelt, dadurch in einfacher Weise lösen, dass man das gegebene Spurendreieck der Bildebene zugleich als Spurendreieck für eine rechtwinklige axonometrische Darstellung der nämlichen Raumgrösse wählt und nun den Zusammenhang ermittelt, der zwischen den beiden Darstellungen, der rechtwinkligen und schiefwinkligen, vorhanden ist. Man kann dann die verlangte Konstruktion in rechtwinkliger Darstellung durchführen und auf Grund des Zusammenhanges zwischen beiden Darstellungen das Ergebnis auf die schiefwinklige Axonometrie übertragen. Zwischen der rechtwinkligen und schiefwinkligen Darstellung eines ebenen Gebildes besteht nun der Zusammenhang der Affinität und zwar bezüglich der Bilder der Projektionsrichtung als Affinitätsrichtung und der Nullspur der Ebene, in welcher das Gebilde liegt, als Affinitätsachse.

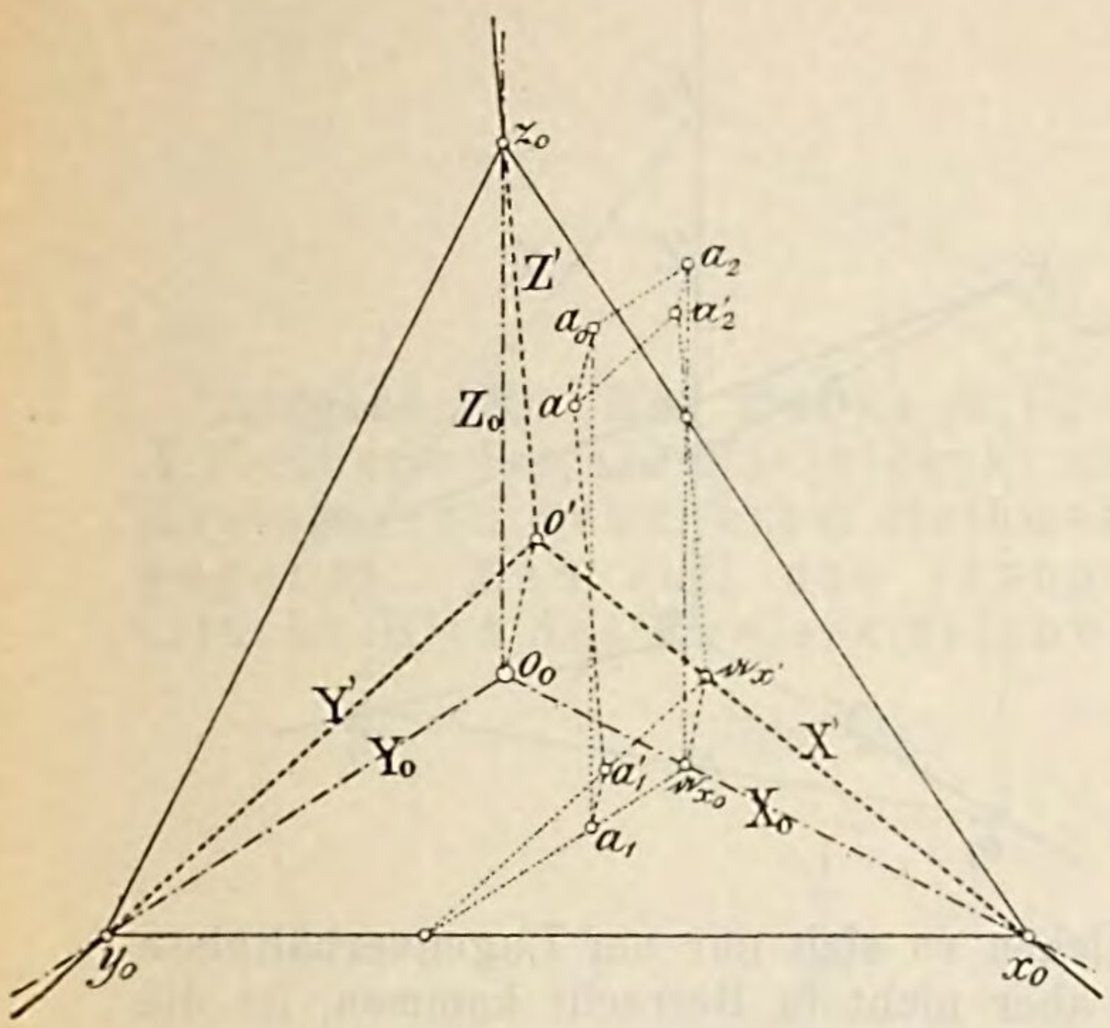
a) Darstellung der Raumgrössen in schiefwinkliger Axonometrie.

Anmerkung 40. Bezüglich der Darstellung einer Raumgrösse in schiefwinkliger Axonometrie gilt das Gleiche wie für die Darstellung in rechtwinkliger Axonometrie. Ein Punkt oder eine Linie wird demnach dargestellt werden durch das axonometrische Bild und ein Rissbild, oder durch zwei Rissbilder. Eine Ebene wird am zweckmässigsten dargestellt werden durch ihr Spurendreieck oder aber durch die, die räumliche Lage der Ebene bedingenden Bestimmungsstücke.

Frage 134. Wie konstruiert man bei Darstellung in schiefwinkliger Axonometrie für einen gegebenen Punkt aus dem axonometrischen Bilde und einem Rissbilde das zugehörige axonometrische Bild bezw. Rissbild in rechtwinkliger axonometrischer Darstellung?

Antwort. Ist z. B., siehe Figur 200, durch x_0, y_0, z_0 das Spurendreieck der Bildebene, durch X', Y', Z' das Bild des Achsenkreuzes für eine Darstellung in schiefwinkliger Axonometrie gegeben, so erhält man in den drei Höhen X_0,

Figur 200.



Erkl. 200. Die entsprechenden schiefwinkligen und rechtwinkligen Bilder der in den Koordinatenebenen liegenden Gebilde sind affine Figuren bezüglich der entsprechenden Seiten des Spurendreieckes als Collineationsachsen und dem Bilde der Projektionsrichtung als Affinitätsrichtung.

Erkl. 201. Nachdem in Antwort der Frage 134 gezeigt wurde, wie man zum axonometrischen Bilde eines Punktes in schiefwinkliger Darstellung das zugehörige axonometrische Bild in rechtwinkliger Darstellung findet, kann man nunmehr alle die bisher kennen gelernten Konstruktionen der rechtwinkligen Darstellung auf die schiefwinklige Darstellung übertragen. Einige Beispiele sollen dies erläutern.

Y_0 und Z_0 des Spurendreieckes der Bildebene das Bild des Achsenkreuzes für die zugehörige rechtwinklige Darstellung und in der Verbindungslinie $o' o_0$ das Bild der Projektionsrichtung. Ist nun ein Punkt a im Raume durch sein axonometrisches Bild a' sein Rissbild a_1' gegeben, so ergeben sich die zugehörigen rechtwinkligen Projektionen, wenn man durch a_1' eine Parallele zu Y' bis zum Schnitt mit $x_0 y_0$ und durch letzteren Punkt eine Parallele zu Y_0 zeichnet; auf dieser und dem Projektionsstrahle durch a_1' liegt der rechtwinklige axonometrische Grundriss oder das Rissbild a_1 des Punktes a. Im Schnittpunkt der Parallelen durch a_1 zu Z_0 und des Projektionsstrahles durch a' liegt endlich das rechtwinklige axonometrische Bild a_0 des Punktes a.

Nachdem nunmehr von dem Punkte a sein rechtwinkliges axonometrisches Bild sowie ein Rissbild gegeben sind, kann dessen Lage sowohl gegen die Bildebene als auch gegen die Koordinatenebene, wie früher gezeigt wurde, ermittelt werden.

Anmerkung 41. Bei den folgenden Aufgaben ist stets das Spurendreieck der Bildebene, sowie das Bild des Achsenkreuzes als gegeben vorausgesetzt.

---

b) Gelöste Aufgaben.

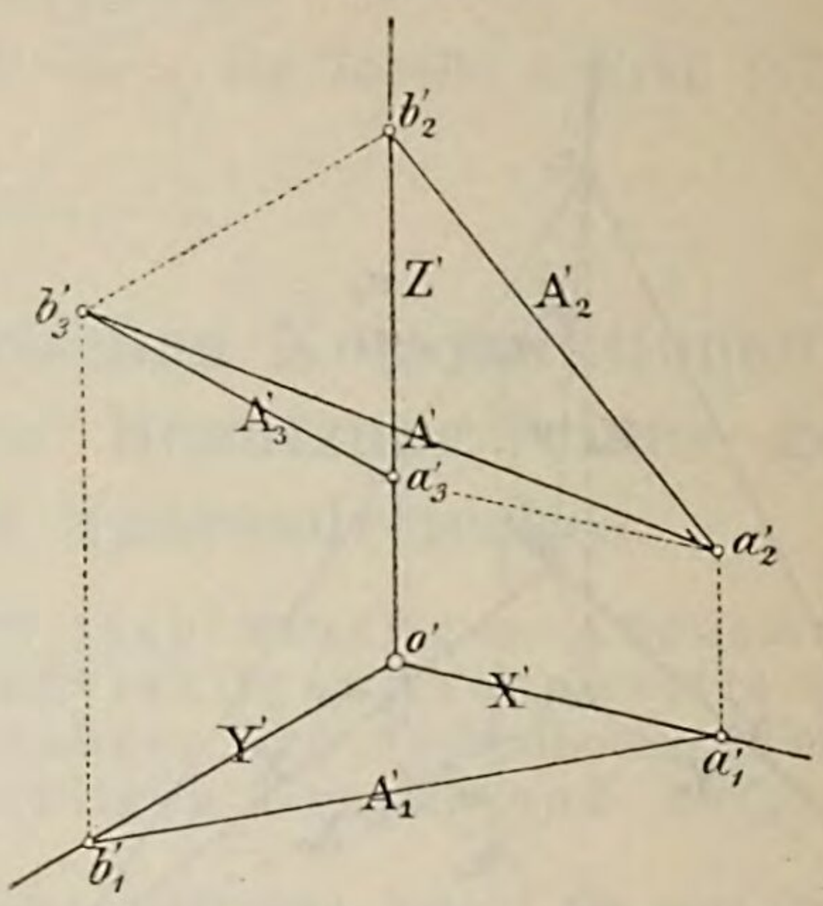
Aufgabe 127. Von einer Geraden A kennt man den axonometrischen Grund- und Aufriss. Man zeichne das axonometrische Bild der Geraden.

Auflösung. Sind, siehe Figur 201, A_1' und A_2' gegeben, so wähle man auf A_1' zwei Punkte ganz beliebig, zweckmässig gleich die Schnittpunkte a_1' und b_1' mit den Achsenbildern X' und Y', so entsprechen denselben als Aufrisse die Punkte a_2' und b_2'. Die Parallelen durch b_1' und b_2' zu Z' und Y' liefern den Punkt b_3' und die Verbindungslinie $a_2' b_3'$ gibt das axonometrische Bild A' der Geraden A.

Erkl. 202. Sucht man noch den Seitenriss a_3' von a, als Schnittpunkt von Z' mit der Parallelen durch a_2' zu X', so gibt die Verbindungslinie $b' a_3'$ den axonometrischen Seitenriss A_3' von A.

Erkl. 203. Wollte man die wahre Länge einer Strecke von A, etwa der Strecke $\overline{ab}$ ermitteln, so hätte man nur nötig, sich, wie in Antwort der Frage 134 gezeigt wurde, die rechtwinkligen Projektionen der Punkte a und b zu verschaffen und könnte dann, so wie in Antwort der Frage 102 sowie in Erkl. 177 angegeben ist, die wahre Länge der Strecke $\overline{ab}$ konstruieren.

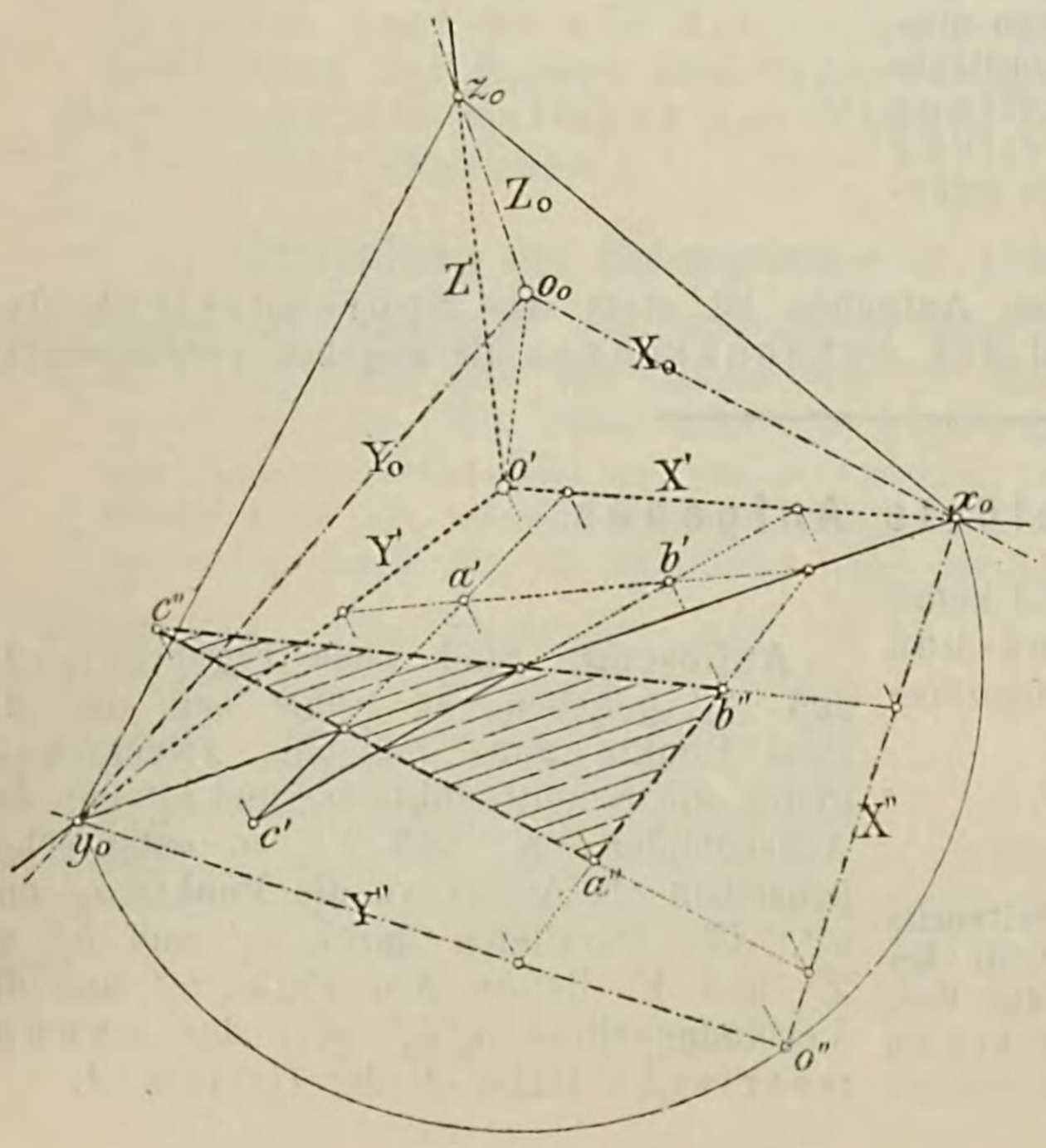
Figur 201.



Anmerkung 42. Für alle Konstruktionen, bei welchen es sich nur um Lagenverhältnisse der Raumgrössen handelt, Massverhältnisse aber nicht in Betracht kommen, ist die Kenntnis des Spurendreieckes der Bildebene nicht erforderlich und es bleibt die konstruktive Durchführung der Lösung von hierauf bezüglichen Aufgaben, z. B. Durchschnittsaufgaben, genau die gleiche wie bei der Darstellung in rechtwinkliger Axonometrie. Selbstverständlich ist aber die in Rede stehende Darstellung keine bestimmte schiefe Projektion, d. h. es lässt sich aus der Darstellung allein die räumliche Lage der Raumgrösse gegen die Koordinatenebenen nicht ermitteln.

Aufgabe 128. Es ist das axonometrische Bild einer in der XY-Ebene liegenden ebenen Figur gegeben. Man soll dessen wahre Gestalt konstruieren.

Figur 202.



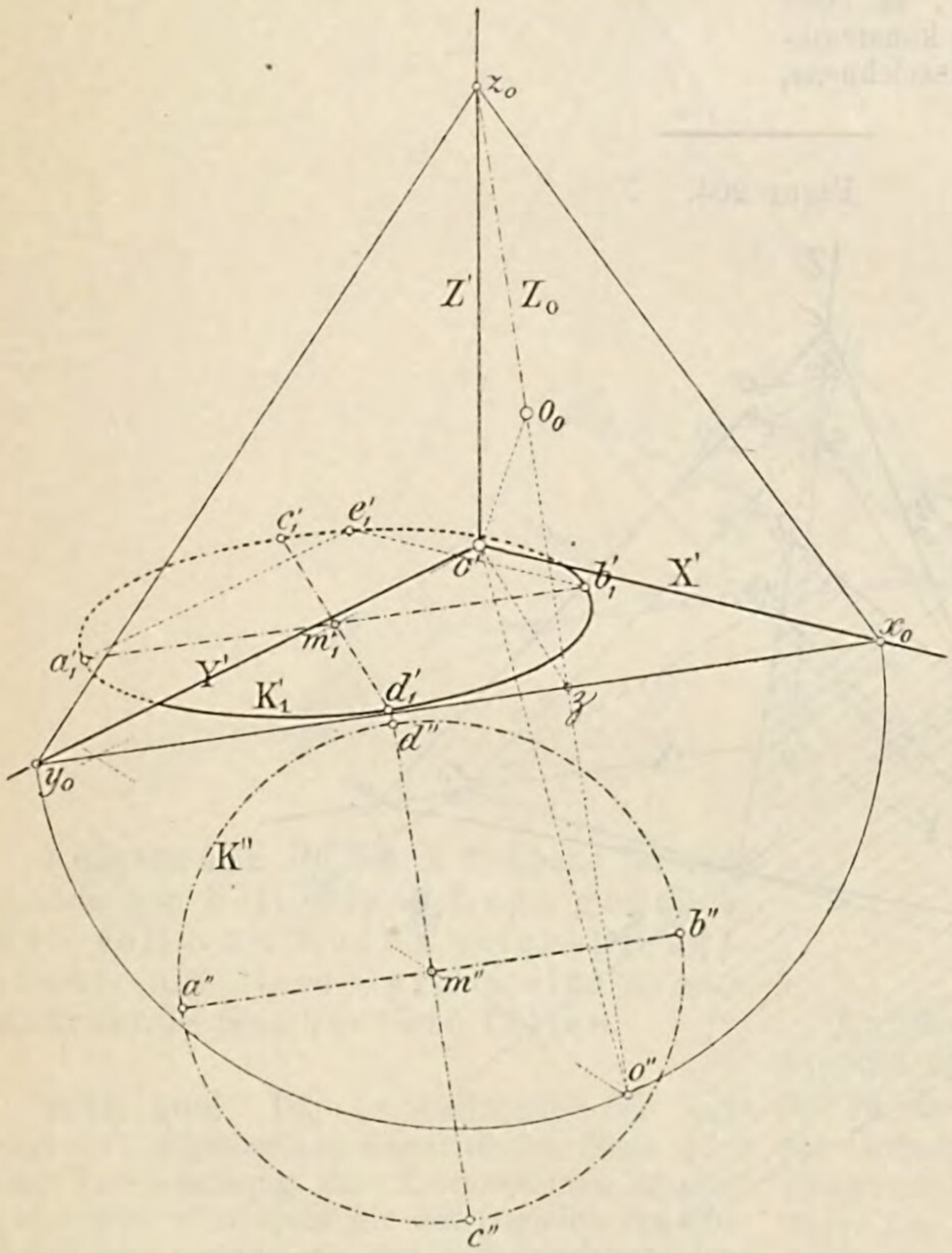
Auflösung. Die gegebene Figur sei das Dreieck $a'b'c'$, siehe Figur 202. Man wird die wahre Gestalt des Dreieckes abc am bequemsten durch Umlegung der Koordinatenebene XY in die Bildebene erhalten. Zu diesem Zwecke bestimme man den dem Punkte o' entsprechenden Punkt o_0. Legt man nunmehr die Koordinatenebenen XY in die Bildebene um, so kommt die Umlegung o'' des Koordinatenanfangspunktes o auf den über $\overline{x_0 y_0}$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreis und ausserdem auf die durch o_0 zu $x_0 y_0$ gefällte Senkrechte zu liegen.

Da nun die Umlegung und die rechtwinklige Projektion und ausserdem die rechtwinklige und die schiefwinklige Projektion affine Figuren sind, so stehen auch Umlegung und schiefwinklige Projektion einer ebenen Raumgrösse in affiner Beziehung zu einander. Die Umlegung $a''b''c''$ des Dreieckes abc und das axonometrische Bild $a'b'c'$ desselben sind also

affine Figuren, wobei die Verbindungslinie $o' o''$ die Affinitätsrichtung $x_0 y_0$ die Affinitätsachse darstellt. Das Dreieck $a'' b'' c''$ kann daher in bekannter Weise, siehe Figur 202, aus dem Dreiecke $a_1' b_1' c_1'$ auf Grund der genannten Affinitätsbeziehung konstruiert werden.

Aufgabe 129. Ein Punkt m in der XY-Ebene ist als Mittelpunkt eines Kreises von bekanntem Halbmesser gegeben. Man soll das axonometrische Bild des Kreises zeichnen.

Figur 203.



Erkl. 204. Man wird zweckmässig zur Ermittelung des Kreisbildes K_1' im Kreise K'' zwei aufeinander senkrechte Durchmesser wählen, von welchen der eine parallel zur Affinitätsachse $x_0 y_0$ läuft. Die Bilder dieser Durchmesser geben zwei conjugierte Durchmesser des elliptischen Bildes K_1'.

Erkl. 205. Berücksichtigt man, s. Fig. 203. dass der Durchmesser $a_1' b_1'$ parallel zu $x_0 y_0$ läuft und gleich der wahren Länge des

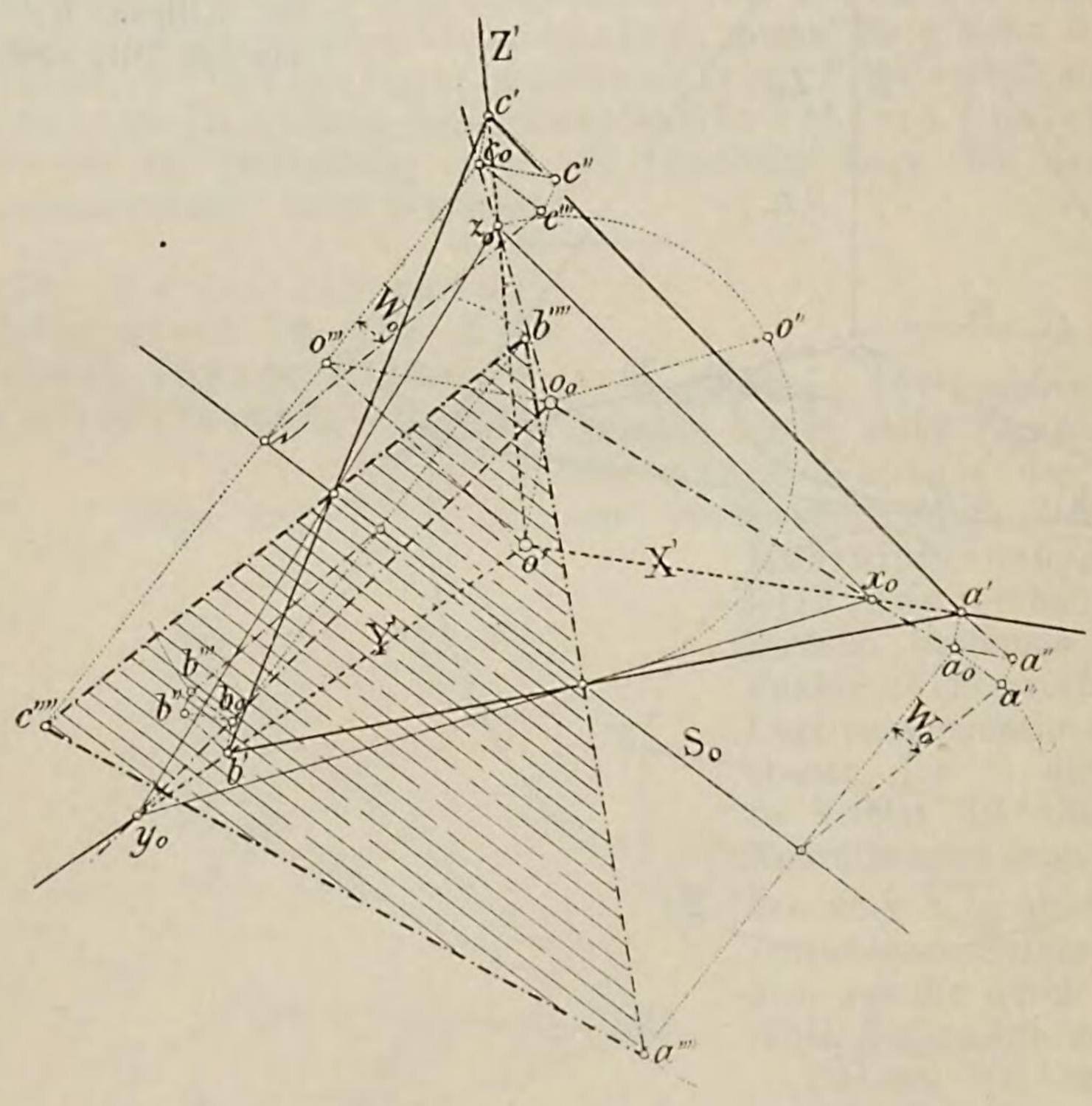
Auflösung. Man bestimme, s. Fig. 203, wieder o_0 und hieraus o'' wie in der vorhergehenden Aufgabe und hierauf den dem Punkte m_1' affin entsprechenden Punkt m'', am zweckmässigsten mittels der Verbindungslinie $o_1' m'$, die affin der Linie $o'' m''$ entspricht.

Beschreibt man nun um m'' als Mittelpunkt mit dem gegebenen Halbmesser den Kreis K'', so entspricht ihm affin die Ellipse K_1' als axonometrisches Bild des Kreises K.

Kreisdurchmessers ist, ferner den Umstand, dass $c_1' d_1'$ axonometrisch senkrecht steht zu $x_0 y_0$, also parallel zur Verbindungslinie o'_3 läuft, so lässt sich das axonometrische Bild K_1' von K direkt, d. h. ohne Benützung der Umlegung K'' konstruieren, sobald man ausser den Punkten a_1' und b_1' noch einen weiteren Punkt von K_1' kennt. Ein solcher Punkt ergibt sich aber unmittelbar durch Ziehen von Parallellinien durch die Punkte a_1' und b_1' zu den Achsenbildern Y' und X'; der Schnittpunkt e_1' dieser Parallelen ist ein Punkt von K_1', denn der Winkel $a_1' e_1' b_1'$ ist axonometrisch ein Rechter.

Von der Ellipse K_1' sind nunmehr bekannt ein Durchmesser $\overline{a_1 b_1'}$, die Richtung o'_3 des zu $a_1' b_1'$ conjugierten Durchmessers, sowie ein Punkt e_1', es lässt sich somit die Ellipse K_1' punktweise konstruieren, siehe Lehrbuch des Projektionszeichnens, I. Teil, Aufgabe 69.

Figur 204.



Aufgabe 130. Man soll die wahre Gestalt eines gegen die Koordinatenebene unter beliebigen Winkeln geneigten Dreieckes konstruieren.

Erkl. 206. In der Figur 204 wurde zweckmässig $\overline{o_0 o'''} = \overline{o_0 o''}$ senkrecht zu $o_0 o'$ und hierauf $c' c''$ parallel $o' o'''$ gezogen; es ist dann $\overline{c_0 c''}$ gleich dem Abstande des Punktes c von der Bildebene. Das Dreieck $c_0 c''' c$ ist wieder

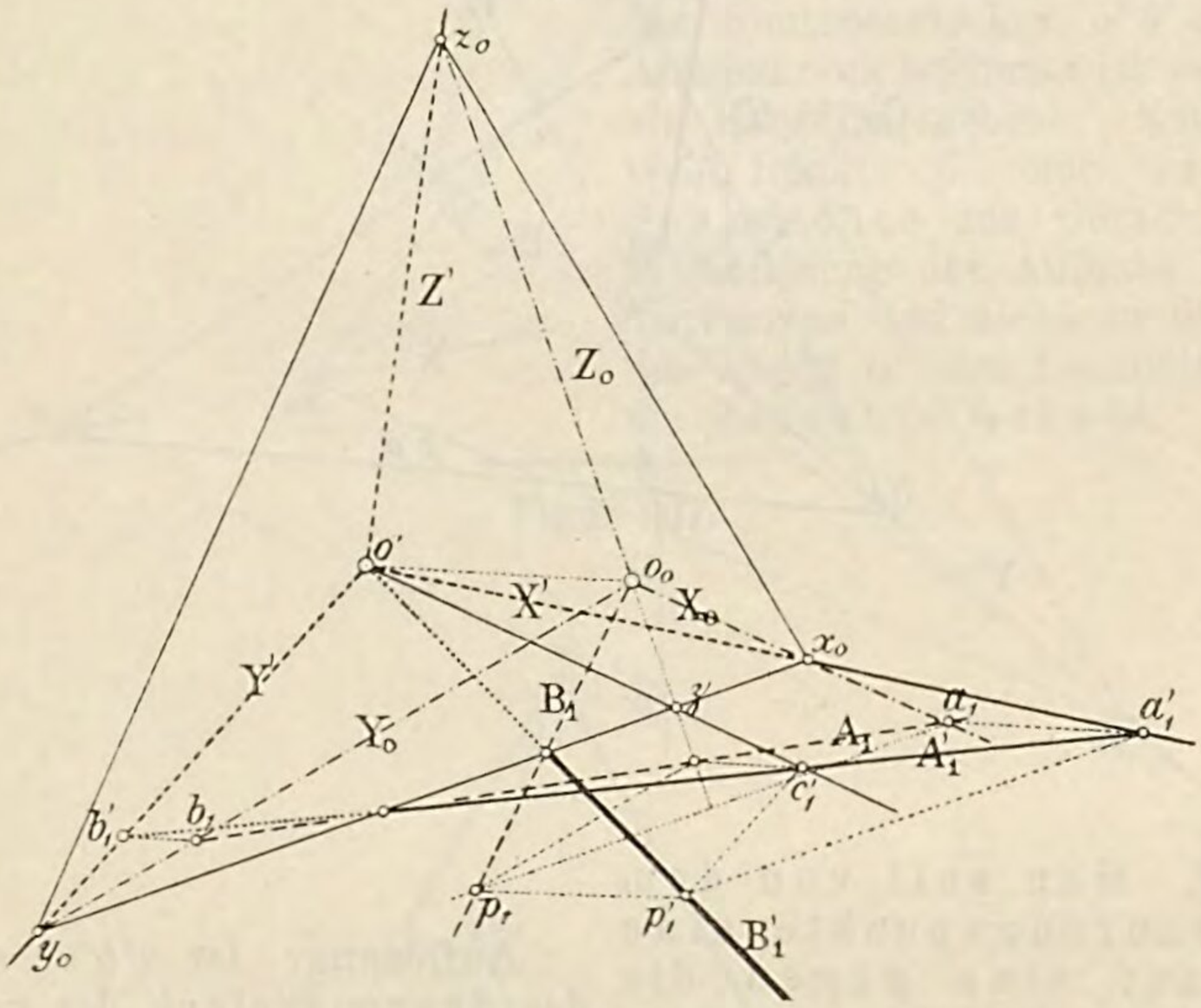
Auflösung Der Einfachheit wegen seien die Endpunkte des Dreieckes auf den drei Koordinatenachsen gewählt und zwar sei, siehe Figur 204, $a' b' c'$ das Bild des gegebenen Dreieckes.

Zunächst bestimme man die Nullspur S_0 der Dreiecksebene als Verbindungslinie der Schnittpunkte der Seiten des Dreieckes $a' b' c'$

das Konstruktionsdreieck des Punktes c; es enthält bei c den Winkel W_0 der Dreiecksebene mit der Bildebene.

Erkl. 207. Das Dreieck $a''''b''''c''''$, siehe Figur 204, ist sowohl affin zum Dreieck $a_0b_0c_0$ als auch zum Dreieck $a'b'c'$. Hat man also so wie in Auflösung der Aufgabe 130 angegeben ist, die Umlegung c'''' des Punktes c ermittelt, so kann man die übrigen Punkte b'''' und a'''' als affin entsprechend den Punkten b' und a' konstruieren, mit S_0 als Affinitätsachse und $c'c''''$ als Affinitätsrichtung.

Figur 205.



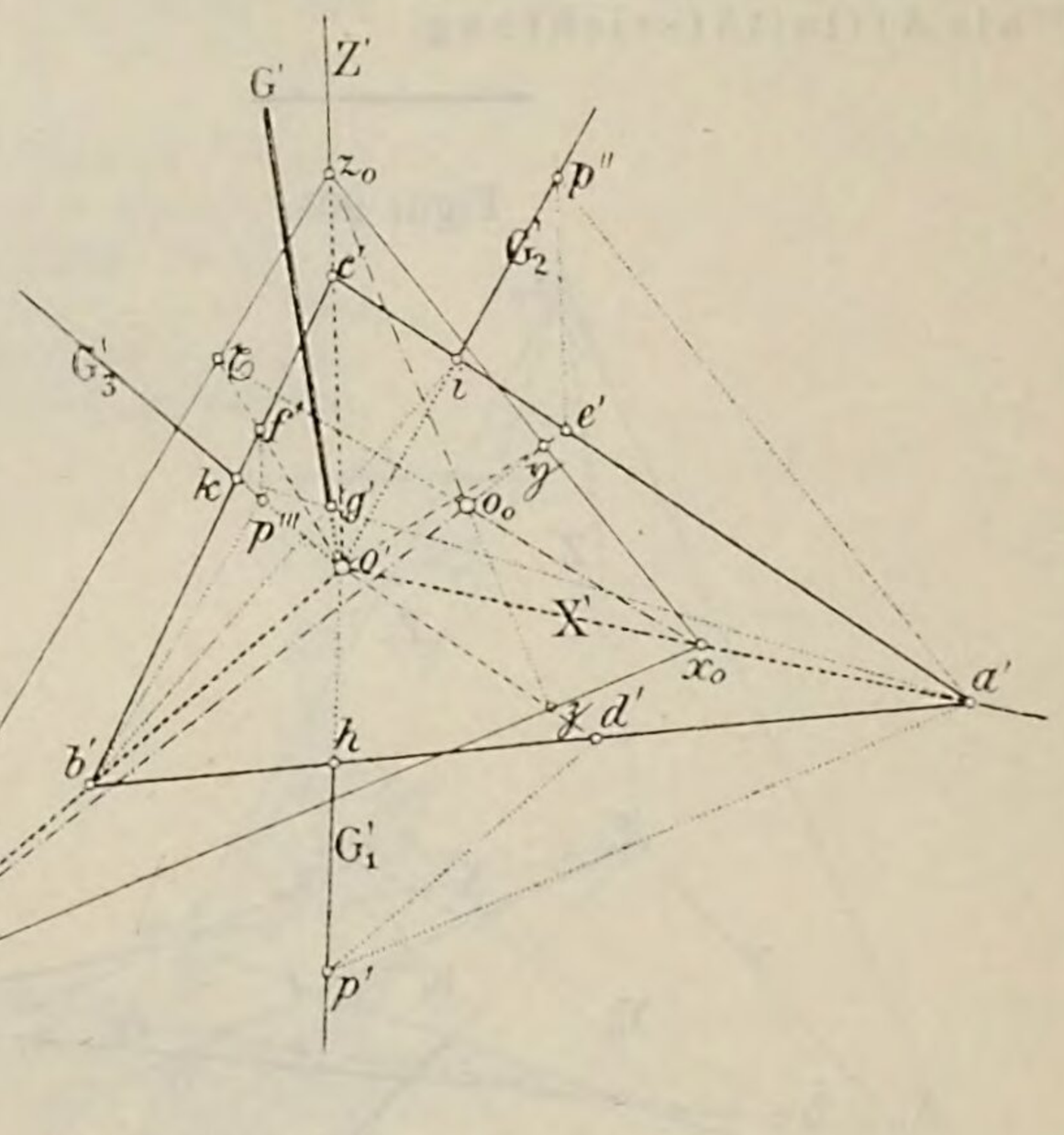
Aufgabe 131. In der XY-Ebene ist eine Gerade von beliebiger Lage gegeben. Man soll vom Koordinatenanfangspunkte auf diese Gerade eine axonometrische Senkrechte fällen.

Erkl. 208. Die in Auflösung der Aufgabe 131 angedeutete Konstruktion lässt noch eine Vereinfachung zu. Zeichnet man nämlich gleich von vornherein die der Geraden $o_0\mathfrak{z}$ entsprechende Gerade $o'\mathfrak{z}$ und berücksichtigt, dass der Senkrechten durch a_1 zu $o_0\mathfrak{z}$ als entsprechende Gerade eine Parallele durch a_1' zur Seite x_0y_0 zugehört, so lässt sich die Konstruktion der axonometrischen Senkrechten $o'p_1'$ ohne Benützung der entsprechenden rechtwinkligen Projektion o_0p_1 durchführen. Man braucht ja nur $o'\mathfrak{z}$ zu verbinden und den Schnittpunkt c_1' von $o'\mathfrak{z}$ und A_1' zu ermitteln. Die Parallelen durch c_1' und a_1' zu Y' und x_0y_0 beziehungsweise, enthalten den Punkt p_1', durch welchen die gesuchte axonometrische Senkrechte $o'p_1'$ hindurch geht.

Auflösung. Ist $a_1'b_1'$, siehe Figur 205, das Bild der gegebenen Geraden, so entspricht ihr in der rechtwinkligen Darstellung die Gerade a_1b_1, auf welche man nach dem vierten Konstruktionsverfahren, siehe Antwort der Frage 111, die Senkrechte o_0p_0 fällen kann; ihr entspricht affin die gesuchte Senkrechte $o'p_1'$.

Erkl. 209. Soll durch einen beliebigen Punkt der XY-Ebene eine axonometrische Senkrechte zu einer in der XY-Ebene liegenden Geraden gefällt werden, so kann diese Aufgabe in gleicher Weise gelöst werden wie die Aufgabe 131. Man fällt zunächst durch den Koordinatenanfangspunkt eine Senkrechte zur gegebenen Geraden und zieht durch den gegebenen Punkt eine Parallele hierzu.

Figur 206.



Aufgabe 132. Man soll von dem Koordinatenanfangspunkte eine Senkrechte auf eine gegen die Koordinatenebene beliebig geneigte Ebene fällen.

Erkl. 210. Die Linien $c'h$, $b'i$ und $a'k$ stellen die axonometrischen Bilder der Höhen des Dreieckes $a'b'c'$ dar, daher sind $b'a'$ und $c'h$ axonometrisch senkrecht zu einander; denkt man sich nun durch G' etwa eine Parallele H' zu $a'b'$ gezogen, so kann man die Linien G', $c'h$ und H' als Achsenbilder eines neuen Achsenkreuzes nehmen, für welches die willkürlich vorausgesetzte Ebene abc nunmehr Koordinatenebene ist. Die Durchschnittspunkte der Achsen dieses neuen Achsenkreuzes mit der Bildebene geben das neue Spurendreieck der Bildebene.

Auflösung. Ist $a'b'c'$, siehe Figur 206, das Spurendreieck der gegebenen Ebene, so fälle man zunächst von o' aus die axonometrische Senkrechte $o'p'$ zu $a'b'$, so stellt diese den axonometrischen Grundriss G_1' der gesuchten Geraden G dar. Fällt man ebenso von o' aus die axonometrischen Senkrechten G_2' und G_3' zu den Seiten $a'c'$ und $b'c'$ des Spurendreieckes $a'b'c'$, so erhält man hierdurch den axonometrischen Aufriss und Seitenriss der gesuchten Geraden, womit auch das axonometrische Bild G' derselben bestimmt ist, denn man braucht ja nur die Schnittpunkte h, i und k der Linien G_1', G_2' und G_3' und der Seiten $a'b'$, $a'c'$ und $c'b'$ des Spurendreieckes $a'b'c'$ mit den gegenüberliegenden Ecken c', b' und a' desselben zu verbinden, so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem Punkte g', durch welchen das axonometrische Bild G' der gesuchten Geraden hindurchgeht.

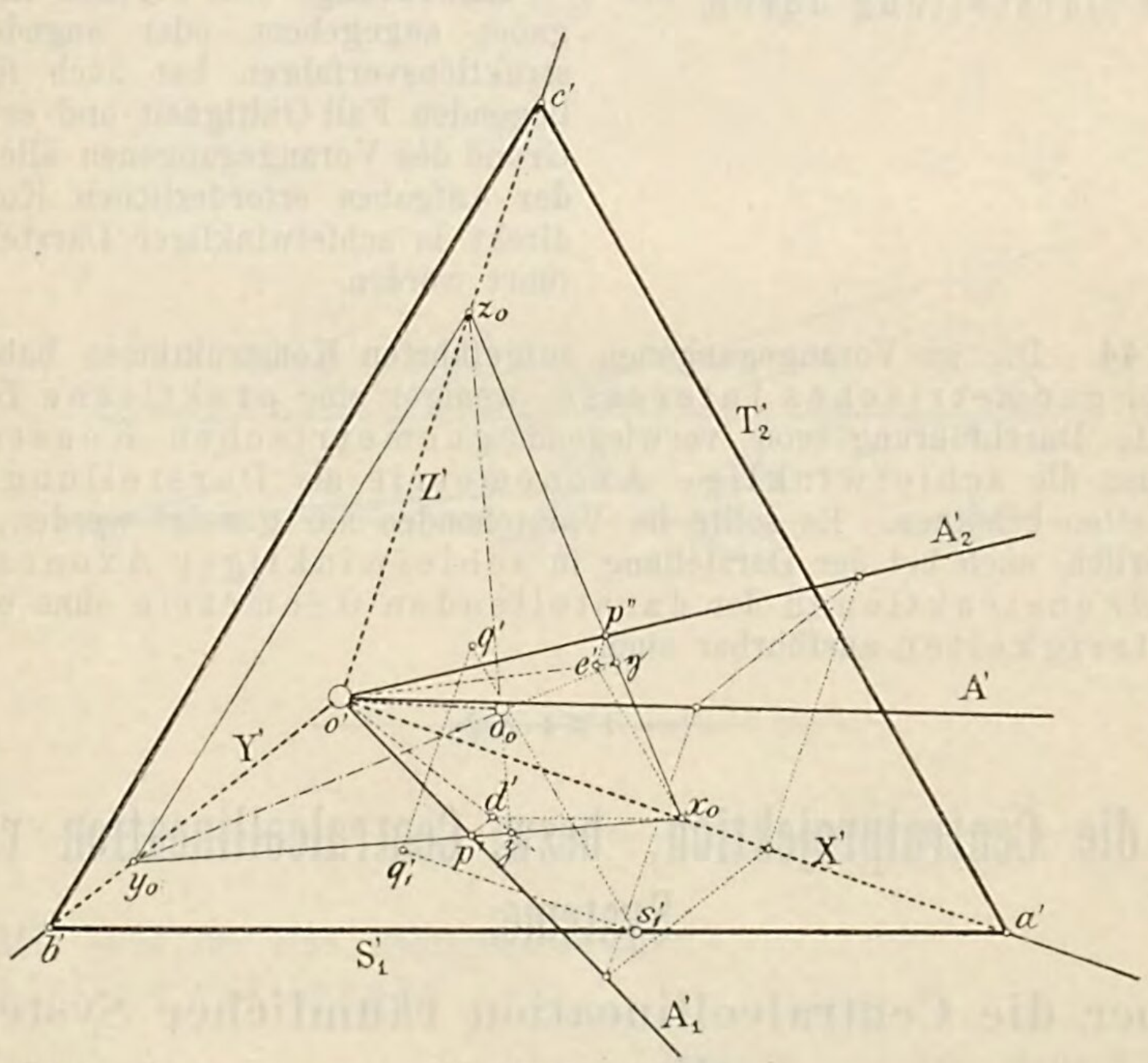
Anmerkung 43. Auf Grund der Auflösung der Aufgabe 132 und der Bemerkung in Erkl. 210 ist man im Stande, den Uebergang von einem gegebenen Achsen-

kreuze zu einem anderen, für welches die vorgegebene Ebene Koordinatenebene ist, zu bewerkstelligen und damit alle jene Konstruktionen, welche sich bisher nur auf eine Koordinatenebene bezogen, nunmehr auch in einer zu den Koordinatenebenen beliebig geneigten Ebene auszuführen, so insbesondere das Zeichnen einer axonometrischen Senkrechten zu einer Geraden in dieser Ebene.

Aufgabe 133. In einer gegen die Koordinatenebene beliebig geneigten Ebene *abc* ist ein Punkt *d* und eine Gerade *E* gegeben. Man soll von dem Punkte *d* eine axonometrische Senkrechte zur Geraden *E* fällen.

Auflösung. Man fälle zunächst durch den Koordinatenanfangspunkt eine Senkrechte zur Ebene *abc* ziehe durch deren Fusspunkt *g'* eine Parallele und eine axonometrische Senkrechte zur Seite *a' b'* des Spurendreieckes *a' b' c'*, wodurch ein Achsenkreuz bestimmt ist mit der Ebene *abc* als Koordinatenebene. Nunmehr fälle man vom Punkte *G* eine axonometrische Senkrechte zur Geraden *E* mittels des in Auflösung der Aufgabe 132 angegebenen Verfahrens und ziehe zu dieser Linie durch den Punkt *d'* eine Parallele, so ist letztere die gesuchte Gerade.

Figur 207.



Aufgabe 134. Zu einer gegebenen Geraden *A* soll durch einen gegebenen Punkt *q* eine senkrechte Ebene gelegt werden.

Auflösung. Die Gerade *A*, s. Fig. 207, sei der Einfachheit wegen als durch den Koordinatenanfangspunkt *o* gehend angenommen. Man verschafft sich nun zweckmässig aus *A'* und A_1' den axonometrischen Aufriss A_2'

der Geraden A und legt durch einen beliebigen Punkt der X'-Achse, etwa gleich durch den Punkt x_0 eine Gerade $x_0 d'$ axonometrisch senkrecht zu A_1' und eine Gerade $x_0 e'$ axonometrisch senkrecht zu A_2', so geben die Linien $x_0 d'$ und $x_0 e'$ die Richtung der ersten bezw. zweiten Spur der gesuchten Ebene an. Zieht man nun durch den gegebenen Punkt q eine Gerade parallel zur Richtung der zweiten Spur der Ebene, so geht durch den Schnittpunkt s_1' dieser Parallelen mit der XY-Ebene, parallel zu $x_0 d'$ die erste Spur S_1' der gesuchten Ebene hindurch. Durch den Schnittpunkt a' von S_1' und X' geht parallel zu $x_0 e'$ die zweite Spur T_2', sie schneidet Z' in einem Punkte c'. Das Dreieck $a'b'c'$ ist demnach das Spurendreieck der gesuchten Ebene.

---

c) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 135. Man führe die Aufgaben 102 bis 105, 107, 108, 109, 110, 112 bis 120 in schiefwinkliger axonometrischer Darstellung durch.

Andeutung. Das bei den einzelnen Aufgaben angegebene oder angedeutete Konstruktionsverfahren hat auch für den vorliegenden Fall Gültigkeit und es können auf Grund des Vorangegangenen alle zur Lösung der Aufgaben erforderlichen Konstruktionen direkt in schiefwinkliger Darstellung ausgeführt werden.

Anmerkung 44. Die im Vorangegangenen aufgeführten Konstruktionen haben ein vorwiegend geometrisches Interesse, weniger eine praktische Bedeutung. Für die Durchführung von vorwiegend geometrischen Konstruktionen wird man die schiefwinklige Axonometrie als Darstellungsmethode wohl selten benützen. Es sollte im Vorstehenden nur gezeigt werden, dass, wenn erforderlich, auch bei der Darstellung in schiefwinkliger Axonometrie alle Grundkonstruktionen der darstellenden Geometrie ohne erhebliche Schwierigkeiten ausführbar sind.

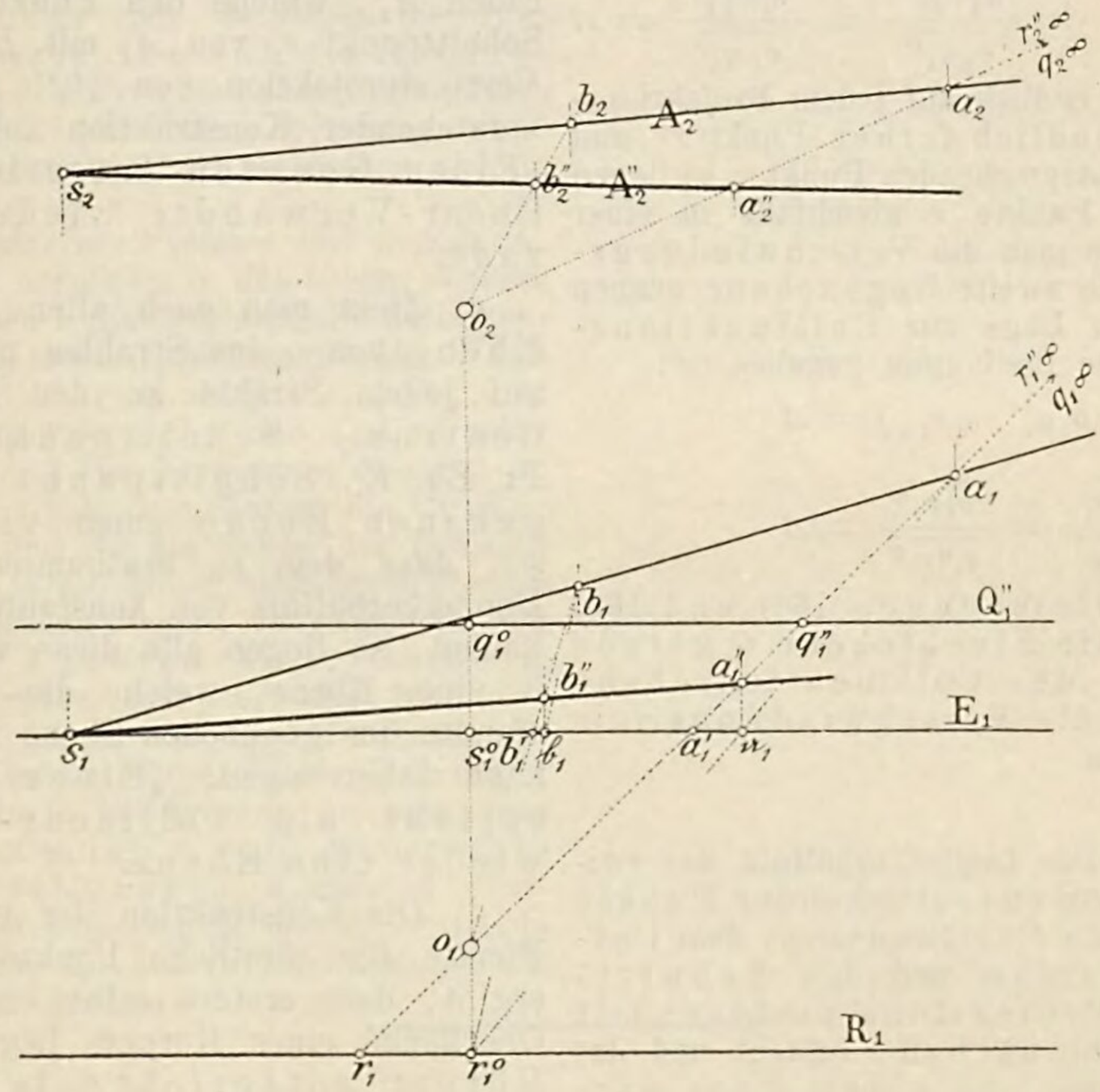
7. Ueber die Centralprojektion, bezw. Centralcollineation räumlicher Systeme.

A. Ueber die Centralcollineation räumlicher Systeme im allgemeinen.

Anmerkung 45. Am Schlusse dieses Buches soll noch kurzweg von der Darstellung einer Raumgrösse gesprochen werden, welche man zweckmässig als eine indirekte oder mittelbare Projektion der Raumgrösse bezeichnen könnte und zwar aus dem Grunde, weil man nicht die Raumgrösse selbst projiziert, sondern eine zweite mit der ursprünglichen in einem bestimmten geometrischen Zu-

sammenhange stehenden Raumgrösse. Dieser Zusammenhang kann von der mannigfaltigsten Art sein, in der Regel ist er wie folgt beschaffen: „Man denke sich eine Raumgrösse, eine **Pr. Eb.** und **Pr. C.** gegeben. Zieht man nun von dem **Pr. C.** nach allen Punkten der Raumgrösse Projektionsstrahlen, so treffen diese die **Pr. Eb.** in der Centralprojektion der gegebenen Raumgrösse auf die **Pr. Eb.** Nun kann man aber auf jedem Projektionsstrahle einen Punkt derart wählen, dass derselbe mit dem Punkte im Raume, dessen Centralprojektion und dem **Pr. C.** vier Punkte bildet, denen ein Doppelverhätnis von konstantem Werte zukommt. Die so bestimmten Punkte erfüllen eine zweite Raumgrösse, welche man als die centrisch-collineare Verwandte, oder auch als ein Relief oder endlich als ein Modell der ursprünglichen Raumgrösse bezeichnet. Diese centrisch-collineare Verwandte oder dieses Relief kann nun in bestimmter Weise, in der Regel rechtwinklig auf die gegebene und eine hierzu senkrecht stehende zweite **Pr. Eb.** projiziert werden und die entstehende Projektion ist die obenerwähnte indirekte oder mittelbare Projektion der ursprüglichen Raumgrösse.“ Im folgenden soll nun kurz der Zusammenhang erläutert werden, der zwischen der ursprünglichen Raumgrösse ihrer centrisch-collinear Verwandten und deren Projektionen auf die genannten **Pr. Ebn.** besteht.

Figur 208.



Frage 135. Was für eine Raumgrösse ist die centrisch-collineare Verwandte:

a) eines Punktes,
b) einer geraden Linie,
c) einer ebenen Fläche,
d) eines Körpers.

Antwort. a) Ist, siehe Figur 208, ein Punkt a durch seine rechtwinkligen Projektionen $a_1 a_2$, desgleichen das **Pr. C.** durch o_1, o_2, endlich durch E_1' die horizontale Projektion der Bildebene E', welche zu der vertikalen **Pr. Eb.** E_2 parallel sein soll, gegeben, und will man die Collinear-Ver-

Erkl. 211. Die Punkte der Ebene E' entsprechen sich selbst als Collinear-Verwandte, d. h. die Collinear-Verwandte der Ebene E' deckt sich mit E'. Man nennt deshalb die Ebene E' auch Collineationsebene. Jede Gerade und ihre Collinear-Verwandte schneiden sich in der Collineationsebene.

Erkl. 212. Zieht man vom Centrum nach den unendlich fernen Punkten des Raumes Strahlen und sucht die entsprechenden Punkte dieser unendlich fernen Punkte, so liegen dieselben in einer zur Collineationsebene E' parallelen Ebene Q'', welche man eine Gegenebene oder auch die Fluchtebene der räumlichen Collineation nennt. Ist q_∞ der unendlich ferne Punkt auf dem Projektionsstrahle $o\,a$, so entspricht ihm der Punkt q'' derart, dass die Beziehung stattfindet:

166) . . . $(o_1 a_1', \; q_{1\infty}\, q_1'') = \Delta$

$$= \frac{\overline{a_1'\, q_1''}}{\overline{o_1\, q_1''}} = \frac{\overline{s_1^0\, q_1^0}}{\overline{o_1\, q_1^0}} = \Delta$$

Nimmt man endlich auf jedem Projektionsstrahle den unendlich fernen Punkt r'' und sucht den ihm entsprechenden Punkt r, so liegen die sämtlichen Punkte r gleichfalls in einer Ebene R, welche man die Verschwindungsebene, d. h. die zweite Gegenebene nennen kann und deren Lage zur Collineationsebene durch die Bedingung gegeben ist:

167) . . . $(o_1 a_1', \; r_1 r_{1\infty}) = \Delta$

oder:

$$\frac{\overline{o_1\, r_1}}{\overline{a_1'\, r_1}} = \frac{\overline{o_1\, r_1^0}}{\overline{s_1^0\, r_1^0}} = \Delta$$

Aus den Gleichungen 166) und 167) folgt, dass die Fluchtebene Q gerade so weit von der Collineationsebene absteht, wie die Verschwindungslinie vom Centrum.

Erkl. 213. Das Doppelverhältnis, das zwischen einem Paar entsprechender Punkte der räumlichen Collineation, dem Collineationscentrum und dem Schnittpunkt des Projektionsstrahles mit der Collineationsebene besteht und das seinen Wert weder von einem Paar entsprechender Punkte zum anderen im nämlichen Strahle, noch von einem Strahle zum anderen nicht ändert, nennt man, wie bei der Collineation ebener Systeme, das charakteristische Doppelverhältnis, oder die Charakteristik der räumlichen Collineation, dieses Doppelverhältnis ist dem einfachen Teilverhältnis gleich, nach welchem die Fluchtebene Q'', bezw. die Verschwindungsebene R den Abstand zwischen Collineationsebene und Centrum teilt.

wandte des Punktes a konstruieren, so zieht man den Projektionsstrahl $o\,a$ im Grund- und Aufriss und nimmt auf ersterem den Punkt a_1'' derart an, dass das Doppelverhältnis $(o_1 a_1', \; a_1'' a_1)$ einen Wert von gegebener Grösse Δ besitzt, so ist a_1' die Horizontalprojektion des dem Punkte a centrisch-collinear entsprechenden Punktes, die zugehörige Vertikalprojektion a_2'' liegt auf $o_2 a_2$. „Einem Punkte entspricht somit centrisch-collinear wieder ein Punkt."

b) Ist etwa, siehe Figur 208, eine Gerade A gegeben, deren Collinear-Verwandte bestimmt werden soll, so darf man nur in den Horizontalprojektionen nach allen Punkten von A_1 Projektionsstrahlen ziehen und zu den drei Punkten b_1, b_1' und o_1 den vierten Punkt so konstruieren, dass $(b_1' o_1, \; b_1 b_1'') = \Delta$ konstant ist. Alle diese konstruierten Punkte liegen aber auf einer Geraden A_1', welche den Punkt a_1'' und den Schnittpunkt s_1 von A_1 mit E_1 enthält, die Vertikalprojektion von A_1'' ist A_2''. Aus vorstehender Konstruktion folgt der Satz: „Einer Geraden entspricht als Collinear-Verwandte wieder eine Gerade."

c) Zieht man nach allen Punkten einer Ebene von o aus Strahlen und konstruiert auf jedem Strahle zu den drei Punkten, Centrum, Schnittpunkt mit der **Pr. Eb.** E', Schnittpunkt mit der gegebenen Ebene einen vierten Punkt so, dass dem so bestimmten Punkte ein Doppelverhältnis von konstantem Werte zukommt, so liegen alle diese vierten Punkte in einer Ebene, welche die Collinear-Verwandte der gegebenen Ebene vorstellt. Man kann daher sagen: „Einer Ebene entspricht als Collinear-Verwandte wieder eine Ebene."

d) Die Konstruktion der entsprechenden Punkte für sämtliche Punkte des Körpers ergibt, dass erstere selbst wieder auf der Oberfläche eines Körpers liegen. „Einem Körper entspricht als Collinear-Verwandte wieder ein Körper."

Erkl. 214. Aus den bisherigen Entwickelungen ergibt sich, dass zwei centrisch-collineare räumliche Systeme mit der gleichen Charakteristik Δ durch jede das Centrum enthaltende Ebene nach zweien centrisch-collinearen ebenen Systemen geschnitten werden, für welche die Schnittlinien der Ebene mit der Collineationsebene und den Gegenebenen, die Collineationsachse und die Gegenachsen liefern. Schneidet man dagegen zwei centrisch-collineare räumliche Systeme durch ein Paar entsprechender Ebenen, so liefern diese gleichfalls zwei entsprechende centrisch-collineare Systeme mit einer von Δ verschiedenen Charakteristik. Dabei ist die Schnittlinie beider Ebenen mit der Collineationsebene die Collineationsachse, während die Gegenachsen durch die Schnittlinien der genannten Ebenen mit den zugehörigen Gegenebenen gegeben sind.

Erkl. 215. Hat man drei räumliche Systeme, von denen je zwei unter sich centrisch-collinear sind, so liegen die drei Collineationscentra auf einer Geraden, denn die drei Systeme haben je zu zweien eine Collineationsebene gemeinsam und die drei Collineationsebenen schneiden sich in einem Punkte s.

Zieht man im einen Systeme eine Gerade A_1, so entsprechen derselben in den beiden anderen Systemen die den Punkt s gleichfalls enthaltenden Geraden A_2 und A_3 beziehungsweise. Wählt man ferner mit A_1 zwei Punkte b_1 und c_1, so entsprechen denselben auf A_2 und A_3 die Punkte b_2, c_2 und b_3, c_3. Die Verbindungslinien $b_1 b_2$, $b_1 c_2$, $b_1 b_3$, $c_1 c_3$, $b_2 b_3$, $c_2 c_3$ liefern die Centra o_3, o_2 und o_1 und da die Ecken der Dreiecke $b_1 b_2 b_3$ und $c_1 c_2 c_3$ auf dreien nach einem Punkte s gehenden Geraden liegen, so schneiden sich die Seiten in Punkten einer Geraden, diese Schnittpunkte sind aber die Projektionscentra o_1, o_2 und o_3. Hat man beispielsweise zu einem Körper K sein Relief K'' für ein Centrum o konstruiert, so kann man für ein zweites Centrum o' zu K'' wieder seinen centrisch-collinearen Körper K' herstellen, dann müssen auch K und K' centrisch-collinear sein für ein auf der Verbindungslinie oo' befindliches Centrum o''.

B. Verschiedene Werte der Charakteristik einer räumlichen Centralcollineation.

Anmerkung 46. Bei der Collineation ebener Systeme wurden für die Charakteristik Δ spezielle Werte, nämlich $\Delta = o$, ∞, $+1$ oder -1 kennen gelernt und hierfür eine besondere Art des Entsprechens zusammengehöriger Elemente festgestellt. Die nämlichen Grenzwerte haben auch für die Collineation räumlicher Systeme Gültigkeit. Der Fall $\Delta = o$ tritt ein, wenn $\overline{s_1^0 q_1^0}$ und $\overline{o_1 r_1} = o$ ist, d. h. wenn das Centrum o in die Gegenebene R fällt und die Gegenebene Q'' mit der Collineationsebene sich deckt.

Einer beliebigen Geraden G als Original entspricht eine Gerade G'', gehend durch den Schnitt von G mit E' und jenen des Parallelstrahles durch o zu G mit Q''. Die Gerade G'' ist in diesem Falle nichts anderes als die Centralprojektion von G aus dem Centrum o in die Ebene E'.

Nimmt man dagegen eine Gerade F'' im Raume als entsprechend einer Originalgeraden F, so ist die Lage von F bestimmt durch den Schnittpunkt von F'' mit E' und ausserdem durch den dem unendlich fernen Punkt von F'' entsprechenden Punkt, d. i. das Centrum o. Der Geraden F'' entspricht also die Verbindungslinie des Centrums mit dem Schnittpunkte von F'' mit der Collineationsebene.

Ist $\Delta = \infty$, so muss $\overline{o_1 q_1{}^0} = \overline{s_1{}^0 r_1{}^0} = 0$ sein, und es fällt das Centrum in die Gegenebene Q'', während Collineationsebene und die Ebene R vereinigt sind.

Das gegenseitige Entsprechen verhält sich gerade umgekehrt wie beim vorangehenden Falle; einer beliebigen Geraden G als Original entspricht stets die Verbindungslinie des Centrums mit dem Schnittpunkt von G und der Collineationsebene, bestimmt man aber zu einer Geraden F'' das entsprechende Original, so ist dieses die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Geraden F und ihres Parallelstrahles durch das Centrum mit der Collineationsebene.

Für $\Delta = +1$ erhält man das Centrum in der Collineationsebene liegend, während die beiden Gegenebenen gleichweit von ersterer abstehen.

Ist endlich $\Delta = -1$, so hat man $\overline{s_1{}^0 q_1{}^0} = \overline{o_1 q_1{}^0}$ und $\overline{o_1 r_1} = -\overline{s_1{}^0 r_1{}^0}$, d. h. die beiden Gegenebenen R und Q'' decken sich und hälften den Abstand zwischen Centrum und Collineationsebene. Man nennt diese besondere Art der räumlichen Collineation die harmonische Centralcollineation räumlicher Systeme; sie ist dadurch ausgezeichnet, dass die Punkte, Geraden und Ebenen beider Systeme einander vertauschungsfähig entsprechen.

C. Arten der räumlichen Centralcollineation bei allgemeiner Charakteristik Δ.

Anmerkung 47. Bei der allgemeinen Charakteristik Δ können das Centrum und die Collineationsebene besondere Lagen einnehmen, wodurch wieder verschiedene Arten der räumlichen Centralcollineation bedingt sind. Folgende Lagen sind bemerkenswert:

1) Das Centrum liegt unendlich fern, die Collineationsebene dagegen im Endlichen. In diesem Falle liegen auch die Gegenebenen unendlich fern, parallelen Geraden und Ebenen entsprechen wieder parallele Geraden und Ebenen, die räumlichen Systeme stehen in dem Zusammenhange der Affinität und werden von Ebenen nach affinen ebenen Systemen geschnitten. Besitzt die Charakteristik Δ der räumlichen Affinität den Wert gleich -1, so tritt zur Affinität noch die Involution hinzu, d. h. man erhält die involutorische Affinität. Entsprechende Elemente liegen symmetrisch zur Collineationsebene, wobei man rechtwinklige und schiefwinklige Symmetrie unterscheiden kann.

2) Das Centrum liegt im Endlichen, die Collineationsebene dagegen unendlich fern. Die Gegenebenen liegen gleichfalls im Unendlichen, entsprechende Geraden und Ebenen sind zu einander parallel, die räumlichen Systeme heissen ähnlich.

Für den besonderen Wert der Charakteristik $\Delta = -1$ tritt zur Aehnlichkeit noch die Involution hinzu. Entsprechende Elemente liegen in Bezug auf das Centrum symmetrisch zur Collineationsebene, die räumlichen Systeme selbst sind kongruent.

3) Das Centrum und die Collineationsebene liegen unendlich ferne. Es findet sowohl Affinität als auch Aehnlichkeit zwischen den räumlichen Systemen statt, d. h. dieselben sind zu einander kongruent.

4) Das Centrum liegt in der Collineationsebene, es fallen dann auch die Gegenebenen mit der Collineationsebene zusammen und es entspricht jedem Punkte des Raumes das Centrum.

Anmerkung 48. Die centrische Collineation zweier räumlichen Systeme ist vollständig bestimmt, sobald man kennt, entweder

1) das Centrum und die Collineationsebene, die Charakteristik Δ, oder

2) das Centrum, die Collineationsebene und eine Gegenebene, oder endlich

3) das Centrum, die Collineationsebene und ein Paar entsprechender Punkte,

4) vier Paare entsprechender Punkte.

D. Collineation räumlicher Systeme in allgemeiner Lage.

Frage 136. Bleiben zwei centrisch-collineare räumliche Systeme nach Aufhebung der centrischen Lage auch noch in einer Beziehung zu einander und in welcher?

Erkl. 216. Aus der in Antwort der Frage 136 gegebenen Erklärung zweier collinearen räumlichen Systeme in allgemeiner Lage folgt unmittelbar, dass wenn zwei räumliche Systeme zu einem dritten räumlichen System collinear sind, sie unter sich selbst collinear sein müssen.

Antwort. Wird die centrische Lage zweier räumlichen Systeme aufgehoben, an der gegenseitigen Lage der Punkte, Linien und Flächen jedes Systemes aber nichts geändert, so bleiben die beiden Systeme in projektiver, d. h. collinearer Beziehung zu einander und zwar derart, dass jedem Punkte, bezw. jeder Punktreihe des einen Systemes wieder ein Punkt, bezw. eine Punktreihe des anderen Systemes entspricht, in gleicher Weise entspricht jeder Geraden bezw. jedem Strahlbüschel eine Gerade bezw. ein Strahlbüschel, jeder Ebene bezw. jedem Ebenenbüschel, eine Ebene bezw. Ebenenbüschel u. s. f. Die beiden Systeme befinden sich aber nicht mehr in centrischer, sondern in allgemeiner Lage. Zwischen je vier Elementen des einen Systemes und den entsprechenden Elementen des anderen Systemes besteht Doppelverhältnisgleichheit.

Frage 137. Wieviele Bestimmungsstücke können beliebig gegeben werden, damit zwei räumliche Systeme in collinearen Zusammenhang zu einander treten und wie konstruiert man zu jedem Elemente des einen Systemes das entsprechende Element im anderen?

Antwort. Die collineare Beziehung zweier Räume ist vollständig bestimmt durch fünf Punkte a, b, c, d, e des einen, von denen keine vier in einer Ebene liegen und die fünf entsprechenden Punkte a'', b'', c'', d'', e'' des anderen Raumes. Ist nun f ein sechster Punkt des ersten Raumes, so kann man drei der Verbindungslinien der Punkte a, b und c, z. B. ab, ac und bc als Achsen von Ebenenbüscheln wählen, welche

den Punkt f enthalten und die entsprechenden Ebenenbüschel im anderen Systeme konstruieren, die den Ebenen abf, acf und bcf entsprechenden Ebenen schneiden sich in dem dem Punkte f entsprechenden Punkte f_1 und bestimmen denselben unzweideutig.

Anmerkung 49. Eine Ueberführung zweier collinearen räumlichen Systeme aus der allgemeinen in die centrische Lage ist im allgemeinen nicht durchführbar.

Anmerkung 50. Die centrische Collineation räumlicher Systeme hat insbesondere für die Technik eine hervorragende Bedeutung, wenn darin das Collineationscentrum und die Raumgrösse, deren centrische Collinear-Verwandte bestimmt werden soll, auf verschiedenen Seiten der Collineationsebene sich befinden. Liegen dann ausserdem noch die beiden Gegenebenen Q'' und R auf verschiedenen Seiten der Collineationsebene, und zwar R auf der nämlichen Seite von o, so kann man sich das Centrum o ersetzt denken durch das Auge des Beschauers.

Dasselbe erblickt dann von der als gegeben vorausgesetzten Raumgrösse eine räumliche Abbildung, gewissermassen ein Modell derselben, das man als das Relief des Körpers bezeichnen kann.

Diesen besonderen Fall der centrischen Collineation räumlicher Systeme bezeichnet man als Reliefperspektive, im Gegensatz zu der gewöhnlichen Perspektive, bei welcher die Raumgrösse in die Bildebene projiziert wird.

Bei der Reliefperspektive entspricht also dem ganzen hinter der Collineationsebene befindlichen Raume, Originalraume, der zwischen Collineationsebene E' und Fluchtebene Q'' eingeschlossene Raum als Bildraum.

Damit das Relief eines Körpers letzteren selbst möglichst täuschend ersetze, müssen für die Entfernung des Auges von der Collineationsebene dieselben Voraussetzungen gemacht werden wie bei der gewöhnlichen Perspektive; die Charakteristik Δ ist stets ein echter Bruch.

Im Nachfolgenden soll nur an einigen Beispielen die Konstruktion des Reliefs für eine Anzahl von Körpern gezeigt werden.

---

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 136. Es sind die Projektionen des Reliefs eines Würfels darzustellen, wenn die Charakteristik Δ einen beliebigen Wert haben soll.

Erkl. 217. Die Projizierenden durch die Reliefpunkte a_1'', b_1'', c_1'' schneiden die Ebene E_1' in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1 \cdots$ und man kann aus der Figur 209 die Beziehung entnehmen:

Es ist:

$$\frac{\overline{a_1 f_1''}}{\overline{a_1 o_1}} = \frac{\overline{i f_1''}}{\overline{i q_1^0}} = \frac{\overline{\mathfrak{a}_1 f_1''}}{\overline{s_1^0 q_1^0}} = \frac{\overline{\mathfrak{a} f_1''}}{\overline{o_1 r_1^0}}$$

somit liegen die drei Punkte a_1, $\mathfrak{a}_1$ und r_1^0 in einer Geraden.

Zieht man also von dem Punkte r_1^0 nach den Eckpunkten des Würfels, so durchschneiden diese Linien die Collineationsebene in den Fusspunkten der von den Reliefpunkten auf die Collineationsebene gefällten Senkrechten. Mit anderen Worten: „Die rechtwinklige Projektion des Reliefs eines Körpers auf

Auflösung. Ist, siehe Figur 209, durch E_1' die Collineationsebene, durch o_1 und o_2 das Centrum dargestellt, so wähle man die Gegenebene Q_1'' parallel zu E_1' in beliebigem Abstande von E_1', aber nicht mit o auf der nämlichen Seite von E_1'. Hierauf nehme man die Gegenebene R_1 gleichfalls parallel zu E_1' an, und zwar mit o auf der nämlichen Seite von E_1' und gerade soweit vor dem Centrum o als Q_1'' hinter der Collineationsebene E_1' liegt, so dass also $\overline{q_1^0 s_1^0} = \overline{o_1 r_1^0}$ ist.

Um nun die den Würfelecken entsprechenden centrisch-collinearen Punkte zu erhalten, ziehe man von ersteren zunächst nach dem Centrum, d. h. von den ersten Projektionen nach o_1, von den zweiten Projektionen nach o_2 und fälle hierauf von den Würfelecken Senkrechte zur Collineationsebene. Diesen Senkrechten

die Collineationsebene fällt zusammen mit der gewöhnlichen Centralprojektion des Körpers auf die nämliche Ebene aus einem in dem Hauptstrahle durch o liegenden Centrum r_0, das um den Abstand der Ebenen E' und Q'' von der Collineationsebene weiter absteht als das Centrum o''.

In der Figur 209 ist also die vertikale Projektion $a_2'' \cdots f_2''$ des Reliefs nichts anderes als eine Centralprojektion des Würfels in die Ebene E_2' aus dem Centrum r_0 (r_2^0 deckt sich mit o_2).

Erkl. 218. Die Längen der von den Reliefpunkten auf die Collineationsebene gefällten Senkrechten, d. h. in der Figur 209, der Strecken $\overline{a_1 a_1''}$, $\overline{b_1 b_1''}$, $\overline{i_1 c_1''}$, $\overline{d_1 d_1''}$ geben die Abstände der bezüglichen Reliefpunkte von der Collineationsebene an. Man nennt diese Abstände auch die Relieftiefen der bezüglichen Punkte.

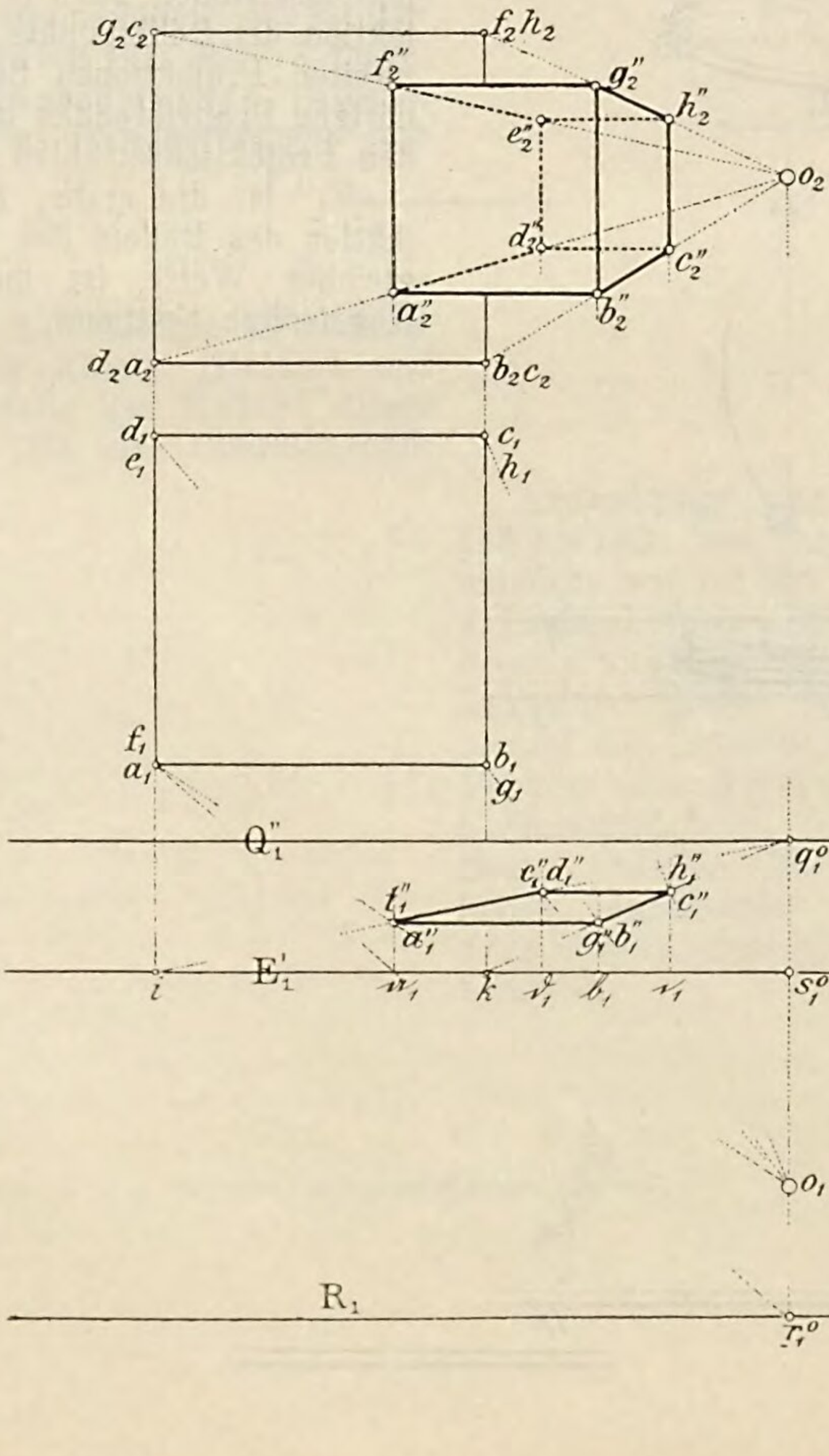
entsprechen centrisch-collinear Gerade, gehend nach demselben Fluchtpunkt q_1^0 und sie schneiden die oben erwähnten Projektionsstrahlen in Punkten der Reliefs des Würfels.

So entspricht z. B. der Senkrechten zur Collineationsebene durch die Würfelecken a, d, e, f in der ersten Projektion die Linie iq_1^0 und auf ihr liegen die ersten Projektionen a_1'', d_1'', e_1'', f_1'' der Reliefpunkte a'', d'', e'' und f''. Die zweiten Projektionen a_2'', d_2'' e_2'' und f_2'' liegen auf den bezüglichen Projizierenden und auf den Projektionsstrahlen durch a_2, d_2, e_2 und f_2.

Die Reliefpunkte der noch übrigen Würfelecken b, c, g, h liegen in der ersten Projektion auf der Linie kq_1^0, in der zweiten Projektion auf den Projektionsstrahlen durch b_2, c_2, g_2 und h_2.

Durch $a_1'' b_1'' c_1'' d_1'' e_1'' f_1'' g_1'' h_1''$ ist somit die erste, durch $a_2'' b_2'' c_2'' d_2'' e_2'' f_2'' g_2'' h_2''$ die zweite Projektion des Würfelreliefs dargestellt.

Figur 209.

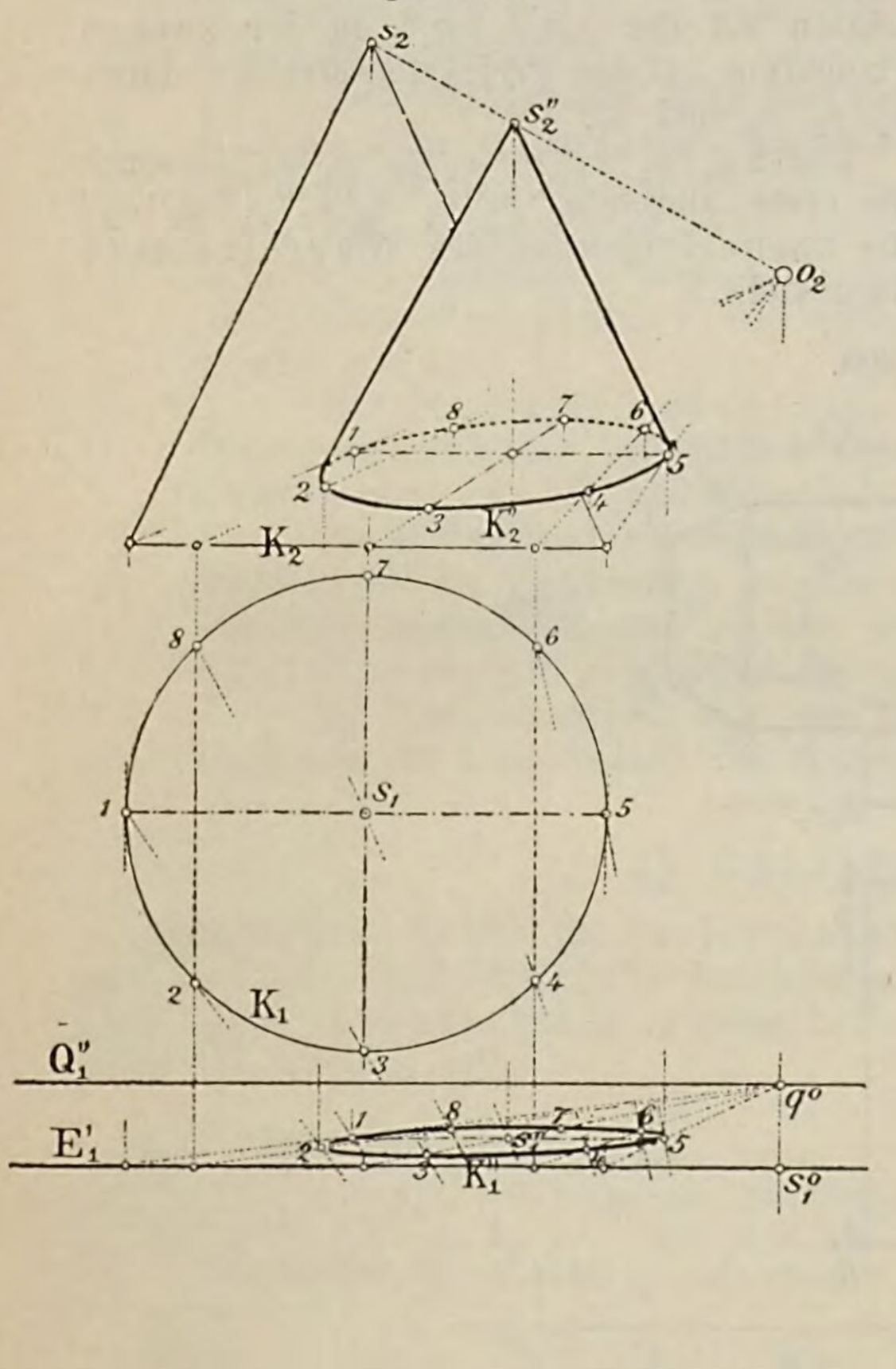


Anmerkung 51. Mittels des in den Erkl. 217 und 218 Gesagten ist man im Stande, das Relief eines Körpers zu modellieren, d. h. in einem bestimmten Materiale körperlich darzustellen.

Wollte man z. B. das in Figur 209 durch seine Projektionen dargestellte Relief körperlich darstellen, so hätte man nur nötig, zunächst einen rechtwinkligen prismatischen Körper von der Grundrissform $a_1''b_1''c_1''d_1''$ herzustellen, auf der vordersten Seitenfläche dieses Prismas die Vertikalprojektion $a_2''\cdots f_2''$ aufzuzeichnen, hierauf die Punkte c_2'', d_2'', e_2'', h_2'' auf die rückwärtige Seitenfläche zu übertragen und schliesslich die obere und untere Fläche $abcd$ bezw. $efgh$ zu bearbeiten.

Aufgabe 137. Es ist das Relief eines senkrechten Kreiskegels darzustellen für eine Charakteristik $\Delta = \frac{1}{8}$.

Figur 210.



Auflösung. Man wähle, siehe Figur 210, die drei Ebenen E_1', Q_1'' und R_1 parallel zur vertikalen **Pr. Eb.**, so dass die Abstände der Ebenen Q_1'' und R_1 von E_1' sich verhalten wie 1 : 8, gebe hierauf dem Centrum o einen Abstand = 7 von E_1 und verfahre im Uebrigen wie in Aufgabe 136.

In der Figur 210 ist der Grundkreis des Kegels in 8 Teile geteilt, von den Teilpunkten sind Senkrechte zu E_1' gezogen und deren Fusspunkte mit q_1^o verbunden; diese Verbindungslinien werden von den Projektionsstrahlen nach o_1 in der ersten Projektion der Reliefpunkte durchschnitten. Die zweiten Projektionen liegen auf den zugehörigen Projizierenden und den entsprechenden Projektionsstrahlen nach o_2.

K_1'' ist die erste, K_2'' die zweite Projektion des Reliefs des Grundkreises K. In gleicher Weise ist auch das Relief der Kegelspitze bestimmt.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 138. Man bestimme das Relief

a) von einem regelmässigen sechsseitigen Prisma,

b) von einer regelmässigen sechsseitigen Pyramide,

c) von einem senkrechten Kreiscylinder,

d) von den regelmässigen Polyedern,

e) von den archimedischen Polyedern.

Für den Fall, dass die unter *a* bis *d* genannten Körper die einfachste Lage gegen die **Pr. Ebn.** einnehmen, die Collineationsebene parallel zur vertikalen **Pr. Eb.** E_2 sein und die Charakteristik $\Delta = \frac{1}{10}$ betragen soll.

Aufgabe 139. Man bestimme das Relief für die in den Aufgaben 85, 86, 96 dargestellten Körperzusammenstellungen unter den nämlichen Voraussetzungen wie in Aufgabe 138.

Aufgabe 140. Man zeichne die Durchdringung zweier der Körper „Prisma und Pyramide“ und stelle das Relief dieser Durchdringung für eine Charakteristik $\Delta = \frac{1}{20}$ dar.

Andeutungen zur Lösung der Aufgaben 138 bis 140. Das Verfahren bleibt ganz das nämliche wie bei den Aufgaben 136 und 137, d. h. man bestimmt zunächst mittels der gegebenen Charakteristik Δ die gegenseitigen Lagen der Ebenen E_1', Q_1'' und R_1, nimmt hierauf das Centrum an, fällt von einzelnen Punkten des Körpers Senkrechte auf die Collineationsebene, bestimmt deren entsprechende Geraden und zieht durch die bezüglichen Körperpunkte im Grund- und Aufriss Projektionsstrahlen nach dem Centrum *o*.

8. Andeutungen zu den ungelösten Aufgaben.

Aufgabe 46. Auflösung a. Sind 1′, 2′, 3′, 4′ die vier Punkte und ist V′ die gegebene Tangente des Kegelschnittes K', so nehme man eine der Verbindungslinien der vier Punkte, etwa die Linie 1′2′ als Collineationsachse S und lege durch die Punkte 1′ und 2′ eine beliebige Kreislinie K. Zu dem Schnittpunkt x von 1′2′ und S konstruiere man für K' und K die Polaren P' und P; man erhält hierdurch zwei Paare entsprechender Geraden P', P und V′, V und damit in der Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte y' und y einen Ort für das Collineationscentrum o. Der Verbindungslinie $y'3'$ oder $y'4'$ entspricht im Kreise die Linie $y3$ bezw. $y4$, welche den Kreis K in dem dem Punkte 3′ bezw. 4′ entsprechenden Punkte 3 bezw. 4 schneidet. Die Verbindungslinie 33′ oder 44′ liefert einen zweiten Ort für das Centrum o. Die weitere Konstruktion ist die gleiche wie in Aufgabe 42.

Auflösung b. Die gegebenen Punkte heissen 1′, 2′, 3′ der Tangenten IV′ und V′. Durch 1′ und 2′ lege man eine beliebige Kreislinie K und konstruiere an diese die Tangenten IV und V entsprechend den Tangenten IV′ und V′. Die Verbindungslinie der Schnittpunkte x' und y' von IV′ V′ und IV V liefert einen Ort für das Centrum o. Der Verbindungslinie $x'3'$ entspricht der Linie $x3$ und sie schneidet aus K den Punkt 3, entsprechend dem Punkte 3′ aus, wodurch in der Verbindungslinie 33′ ein zweiter Ort für das Centrum o gegeben ist.

Auflösung c. Die gegebenen Punkte heissen 1′, 2′, die Tangenten III′, IV′ und V′. Durch 1′ und 2′ lege man eine beliebige Kreislinie K und bestimme an K die Tangenten III, IV und V entsprechend den Tangenten III′, IV′ und V′. Die den Verbindungslinien der Schnittpunkte entsprechenden Tangenten schneiden sich im Centrum o.

Auflösung d. Sind II′, III′, IV′ und V′ die gegebenen Tangenten und ist 1′ der gegebene Punkt, so kann man das Vierseit der vier gegebenen Tangenten auffassen als centrisch-collineare Figur eines Quadrates und dementsprechend die Lage des Collineationscentrums ermitteln. Dem Kegelschnitte K' entspricht dann der dem genannten Quadrate eingeschriebene Kreis K und dessen Mittelpunkte m der Diagonalschnittpunkt m' des gegebenen Tangentenvierseites. Die Verbindungslinie $\overline{m'1'}$ ist demnach die Projektion eines Kreishalbmessers; verlängert man diese Strecke central projektivisch um sich selbst, so erhält man hierdurch das Bild eines Kreisdurchmessers, d. h. einen zweiten Punkt des Kegelschnittes K'. Die Aufgabe ist somit auf die vorhergehende zurückgeführt.

Aufgabe 47. Auflösung a. Sind 1′, 2′, 3′ die drei Punkte und IV′ die Tangente, so lege man durch 1′2′ eine Kreislinie K, so ist die zur Verbindungslinie 1′2′ parallele Tangente R eine Gegenachse der Collineation. Der Tangente IV′ entspricht die Kreistangente IV und letztere schneidet R in einem Punkte r, welchem centrisch-collinear der unendlich ferne Punkt von IV′ entspricht; ein Ort für das Collineationscentrum ist daher die Parallele durch r zu IV′. Der Verbindungslinie $3'r$ entspricht centrisch-collinear eine Gerade, welche den Kreis im Punkte 3 schneidet. Die Linie 33′ liefert somit einen zweiten Ort für das Centrum o.

Auflösung b. Die gegebenen Punkte heissen 1′ und 2′, die Tangenten III′ und IV′. Man nehme 1′2′ als Collineationsachse und lege wieder durch 1′ und 2′ eine Kreislinie K. Den Tangenten III′ und IV′ entsprechen die Tangenten III und IV und liefern einen Schnittpunkt x, entsprechend dem Schnittpunkt x' von III′ und IV′. Heissen endlich r und r_1 die Schnittpunkte von III′ und IV′ mit R, so entsprechen den Verbindungslinien $2'r$ und $1'r_1$ die Parallelen durch 1′ und 2′ zu IV′ und III′ und bestimmen einen Schnittpunkt y' entsprechend dem Schnittpunkt y von $1'r$ und $2'r$. Die Verbindungslinie yy' gibt einen zweiten Ort für das Centrum.

Auflösung c. Die Aufgabe ist in gleicher Weise zu lösen wie die Aufgabe 46 d. Man benützt nämlich die unendlich ferne Tangente und verfährt hiernach wie in Auflösung der Aufgabe 46 a gezeigt ist.

Aufgabe 48. Auflösung a. Die Aufgabe kann ebenso gelöst werden wie Aufgabe 46 a, denn sie ist nur ein spezieller Fall von dieser. Man kann aber auch mittels des Paskalschen Satzes sich beliebige weitere Punkte verschaffen.

Um den Mittelpunkt zu bestimmen, kann man sich noch in zweien Punkten die Tangenten konstruieren. Die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Berührsehnen mit den zugehörigen Tangentenschnittpunkten (den Polen der Berührsehnen) schneiden sich im Kegelschnittmittelpunkte. Die Konstruktion der Hauptachsen kann nun nach Erkl. 74 vor sich gehen.

Auflösung b. Die Aufgabe ist ein spezieller Fall der Aufgabe 46 b, und kann daher wie dort angegeben, gelöst werden. Andererseits lassen sich aber auch mittels des Paskalschen Satzes beliebig viele Kegelschnittpunkte konstruieren. Die Konstruktion des Mittelpunktes und der Hauptachsen kann wie in Aufgabe 48 a durchgeführt werden.

Auflösung c. Die Aufgabe ist ein spezieller Fall der Aufgabe 46 d, daher auch die Auflösung wie dort.

Mit Benützung des Brianchonschen Satzes kann man aber auch beliebige viele weitere Kegelschnitttangenten konstruieren und hiernach den Mittelpunkt und die Hauptachsen nach Anleitung der Anmerkung 20 bestimmen.

Auflösung d. Die Aufgabe ist ein spezieller Fall der Aufgabe 46 c und erledigt sich wie dort.

Andererseits kann man sich mittels des Brianchonschen Satzes den Berührungspunkt auf der dritten Tangente und hierauf den Mittelpunkt und die Hauptachsen bestimmen.

Auflösung e. Sind 1, 2, 3, 4 die gegebenen Punkte, ist ferner p der gegebene Pol und P die zugehörige Polare, so liefern die drei Linien $p1$, $p2$ und $p3$ noch drei weitere Punkte des Kegelschnittes in den zu den Schnittpunkten der genannten Linien mit P hinsichtlich der Punkte $p, 1$, $p, 2$ und $p, 3$ conjugierten vierten harmonischen Punkten. Von dem Kegelschnitt kennt man also sechs Punkte und kann nun Mittelpunkt und Hauptachsen wie in Auflösung der Aufgabe 42 gezeigt wurde, bestimmen.

Auflösung f. Sind A und B die gegebenen Geraden, ist ferner c der gegebene Punkt des Kegelschnittes, so entspricht dem Schnittpunkt xy' von A und B in den zugehörigen Involutionen bezw. der Punkt x' auf A und der Punkt y auf B. Die Verbindungslinie $a'y$ ist die Polare des Schnittpunktes xy'. Heissen ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt u und v, so sind die Verbindungslinien cu und cv das gemeinsame Strahlenpaar der beiden mit den Punkteninvolutionen auf A und B bezw. perspektivisch liegenden Strahleninvolutionen mit dem Mittelpunkte c. Die Verbindungslinien xu und xv sind Tangenten des Kegelschnittes.

Auflösung g. Sind a und b die gegebenen Punkte und ist C die gegebene Tangente des Kegelschnittes, so entspricht dem Verbindungsstrahl XY' der Punkte a und b in den zugehörigen Involutionen bezw. der Strahl X' und Y, gehend durch a bezw. b. Der Schnittpunkt von X' und Y' ist der Pol p von $\overline{ab}$. Auf der gegebenen Tangente C schneiden nun die gegebenen Strahleninvolutionen zwei involutorische Punktreihen aus. Die Verbindungslinien des gemeinsamen Punktpaares dieser Involutionen mit p sind Tangenten des Kegelschnittes A.

Aufgabe 49. Auflösung a. Sind $1'$, $2'$, $3'$ die gegebenen Punkte der Parabel und stellt eine Gerade A' die Achsenrichtung dar, so nehme man etwa die Verbindungslinie $1'2'$ als Collineationsachse S und lege durch $1'2'$ eine beliebige Kreislinie K. Eine Tangente R parallel zu S an K liefert den dem unendlich fernen Punkte b' der Parabel entsprechenden Kreispunkt b.

Zieht man nun durch b eine Parallele zu A', so liegt auf ihr das Centrum o. Der Parallelen durch den Punkt $3'$ zu A' entspricht im Kreise die Verbindungslinie $b3$, gehend durch den Schnittpunkt s der genannten Parallelen mit S und sie enthält den dem Punkte $3'$ entsprechenden Kreispunkt 3. Das Centrum liegt nun auch noch auf der Verbindungslinie $33'$. Ist aber das Centrum o bestimmt, so vollzieht sich die weitere Konstruktion wie in Aufgabe 44.

Auflösung b. Durch die beiden gegebenen Punkte 1′ und 2′ lege man wieder eine Kreislinie K, so ist von der centrischen Collineation die Collineationsachse S (Verbindungslinie 1′2′) und die Gegenachse R (Tangente an K parallel zu S) gegeben.

Ausserdem kennt man einen Ort für das Centrum o in der Parallelen zur gegebenen Achsenrichtung durch den Berührungspunkt von K und R.

Ein zweiter geometrischer Ort für o findet sich mittels der gegebenen Tangente III′, in dem man deren Schnittpunkt mit der die Achsenrichtung darstellenden Geraden aufsucht, und den ihm centrisch-collinear entsprechenden Punkt bestimmt. Auf der Verbindungslinie dieser entsprechenden Punkte liegt gleichfalls das Centrum o.

Auflösung c. Die Aufgabe ist in gleicher Weise zu lösen wie die Aufgabe 47 c bezw. 46 d. Man kennt vier Tangenten und einen Durchmesser der Lage nach und verschafft sich auf demselben den einen im Endlichen befindlichen Endpunkt.

Auflösung d. Man bezeichnet die unendlich ferne und zur gegebenen Achsenrichtung senkrechte Tangente mit IV′, V′, die übrigen gegebenen Tangenten mit I′, II′, III′ und verfährt im übrigen wie in Aufgabe 43.

Auflösung e. Man bezeichnet den Berührungspunkt der gegebenen Tangente mit 3′, 4′, die übrigen beiden Punkte mit 1′ und 2′ und legt durch 1′2′ eine Kreislinie K etc.

Auflösung f. Man bezeichnet die Tangente mit gegebenem Berührpunkt mit III′, IV′, die beiden übrigen Tangenten mit I′ und II′, die unendlich ferne Tangente mit V′ und verfährt wie in Aufgabe 43.

Auflösung g. Die Parallelen durch den gegebenen Berührungspunkt zu den gegebenen Tangenten vollenden ein Parallelogramm, dessen die Berührungspunkte nicht enthaltende Diagonale die Achsenrichtung der Parabel bestimmt. Mittels eines die beiden Berührungspunkte enthaltenden Kreises kann man die Aufgabe in gleicher Weise wie die vorhergehende lösen. Die Anwendung des Brianchon'schen Satzes liefert aber direkt die Scheiteltangente und deren Berührungspunkt etc.

Aufgabe 50. Auflösung a. Sind u, v, w die Punkte des Poldreieckes, 1 und 2 die gegebenen Punkte, so liefern die Centralcollineationen, welche die Ecken des Poldreieckes als Centrum und die gegenüberliegenden Seiten als Achsen besitzen, aus den gegebenen Punkten unmittelbar sechs weitere Punkte des Kegelschnittes etc.

Auflösung b. Ist p der gegebene Pol und P die zugehörige Polare, ausserdem a der gegebene Punkt, so enthält zunächst die Verbindungslinie pa einen weiteren Punkt a' des Kegelschnittes in dem zum Punkte a hinsichtlich p und des Schnittpunktes von pa und P conjugierten vierten harmonischen Punkte. Sind dann xx' irgend ein Paar entsprechender Strahlen der Involution von p und xx' ihre Schnittpunkte mit P, so enthalten die Verbindungslinien ax, $a'x'$ $a'x$, ax' zwei weitere Punkte des Kegelschnittes

Ist statt des Punktes a eine Tangente T gegeben, so erhält man in dem vierten harmonischen Strahl zu den Strahlen T, P und tp, wenn t den Schnittpunkt von T und P bezeichnet, eine weitere Tangente des Kegelschnittes. Je zwei conjugierte Strahlen X und X' schneiden nun die beiden Tangenten T und T' in vier Punkten, deren noch mögliche Verbindungslinien zwei weitere Tangenten des Kegelschnittes darstellen.

Wie die Lösung sich gestaltet, wenn statt der Strahleninvolution durch p die Punktinvolution auf P gegeben ist, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung.

Auflösung c. Sind a, b, c die drei gegebenen Punkte, heisst ferner die gegebene Gerade P, so liefern die Verbindungslinien ab, ac und bc auf P die Punkte x, y und z, denen in der Involution die Punkte x', y' und z' entsprechen. Sind ferner die Punkte x_1, y_1 und z_1 die vierten harmonischen bezw. zu a, b, x, a, c, y und b, c, x, so schneiden sich die Linien $x'x_1$ und $y'y_1$ im Pol p von P. Zeichnet man nunmehr die Linien pa, pb und pc, so sind die vierten harmonischen Punkte hinsichtlich der Schnittpunkte dieser Linien mit P drei weitere Punkte des Kegelschnittes.

Auflösung d. Sind A, B, C die gegebenen Tangenten, heisst ferner der gegebene Punkt p, so liefern die Verbindungslinien von p mit den Schnittpunkten a, b, c der Tangenten drei Strahlen X, Y, Z, denen in der Involution die Strahlen X', Y' und Z' entsprechen. Sind ferner X_1, Y_1, Z_1 die vierten harmonischen Strahlen bezw. zu den Strahlen X, B, C, Y, A, C und Z, A, B, so schneiden sich die Linien X und X_1, Y und Y_1, Z und Z_1 in Punkten der Polare P von p etc.

Aufgabe 56. Auflösung a. Der gegebene Kreis berührt die Projektionsachse X in einem Punkte x, welcher zugleich ein Punkt der Hyperbel ist. Zieht man nun durch den gegebenen Mittelpunkt m_1 der Hyperbel unter dem gegebenen Asymptotenwinkel $W = 120^0$ zwei Gerade derart, dass ihre Schnittpunkte a und b mit der X-Achse von dem Punkte x gleichweit abstehen, so stellen diese Linien die Asymptoten der Hyperbel dar und ihnen entsprechen die Kreistangenten durch die Punkte a und b etc.

Auflösung b. Die Lösung bleibt die nämliche wie in der vorhergehenden Aufgabe, nur ist Winkel $W = 90^0$.

Aufgabe 57. Auflösung a. Das gesuchte Projektionscentrum ist der Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden G mit einer Kugel, für welche der die drei Punkte abc enthaltende Kreis ein grösster Kreis ist.

Auflösung b. Soll die eine Asymptote der Hyperbel mit einer gegebenen Geraden A der **Pr. Eb.** zusammenfallen, so lege man durch die gegebene Gerade G eine Ebene parallel zu A und bestimme deren Schnittlinie mit der Kreisebene abc. Diese Schnittlinie trifft die Kreislinie in zweien Punkten a und b. Das gesuchte Projektionscentrum liegt nun im Durchschnitt einer Parallelebene zur Hyperbelebene durch den Punkt a bezw. b mit der Geraden G.

Aufgabe 58. Auflösung. Die horizontale Spur der Kegelschnittebene ist die Collineationsachse und daher zugleich eine Kreistangente. Man kann somit den Kreis, da von ihm ein Punkt d und ausserdem eine Tangente und ihr Berührungspunkt bekannt sind, zeichnen. Um nun das Projektionscentrum zu bestimmen, verschafft man sich im Kegelschnitt den zur Collineationsachse parallelen Durchmesser und den conjugierten hierzu, und bestimmt die entsprechenden Linien und Punkte in der Kreisebene etc.

Aufgabe 59. Man legt parallel zur ersten Spur der Kreisebene an den Kreis abc Tangenten und durch letztere Parallelebenen zu E_1. Die Durchschnittspunkte dieser Parallelebenen mit der Geraden D sind die möglichen Projektionscentra.

Aufgabe 60. Damit die Kreisebene bestimmt ist, muss noch ein dritter Punkt derselben festgelegt werden; als solchen wählt man den dem unendlich fernen Parabelpunkt entsprechenden Punkt. Derselbe liegt einmal in der Parallelebene durch das Centrum zur **Pr. Eb.** E_1 und in der Parallelen durch das Centrum zur gegebenen Achsenrichtung; ausserdem kennt man seine Entfernung von dem Durchschnittspunkte s der Verbindungslinie ab mit der genannten Parallelebene etc.

Aufgabe 61. Auflösung. Legt man durch den gegebenen Punkt Parallelebenen zu den drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3, so sind deren Schnittlinien mit der gegebenen Ebene Kreistangenten. Hierdurch ist der Kreis bestimmt.

Aufgabe 62. Auflösung. Man erhält den Schnitt der Hyperbel und Kreisebene als Tangente an den gegebenen und den Ortskreis der Spuren aller durch o gehenden und zur Kreisebene unter 45^0 geneigten Ebenen. Im übrigen ist die Lösung wie in Aufgabe 56.

Aufgabe 63. Auflösung. Die Aufgabe ist ein spezieller Fall der Aufgabe 60.

Aufgabe 64. Auflösung. Das gesuchte Centrum liegt in der die kleine Ellipsenachse enthaltenden Parallelebene zur **Pr. Eb.** E_1. Im übrigen ist die Lösung wie in Aufgabe 56.

Aufgabe 65. Auflösung. Denkt man sich die drei gegebenen Kreise als grösste Kreise dreier Kugeln, so sind die Durchschnittspunkte dieser drei Kugeln die möglichen Projektionscentra.

Aufgabe 75. Auflösung a. Bezeichnet man drei der gegebenen Punkte mit 1, 2, 3, den Berührungspunkt auf der gegebenen Tangente mit 4·5, so kann man etwa die Punkte 2 und 4 als Mittelpunkte zweier projektiven Strahlbüschel nehmen, welche den Kegelschnitt hervorbringen, sie schneiden nun im Falle 1 auf der gegebenen Geraden zwei projektive Punktreihen aus, deren Doppelpunkte die Aufgabe lösen.

Im Falle 2 verbindet man zunächst den Punkt p, durch welchen die Tangenten an den Kegelschnitt gezogen werden sollen, mit zweien der gegebenen Punkte, etwa mit den Punkten 1 und 2 und ermittelt die zweiten Schnittpunkte $1'$ und $2'$ dieser Kegelschnittssekanten, wie im Falle 1, bestimmt zu den Punkten p, 1, $1'$ und p, 2, $2'$, je den vierten harmonischen Punkt, so liefert die Verbindungslinie dieser Punkte die Polare P von p und ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt sind die gesuchten Berührungspunkte der Tangenten durch p an den Kegelschnitt.

Auflösung b. Die beiden Berührungspunkte heissen 1, 2 und 3, 4, der dritte Punkt heisse 5. Hierdurch sind wieder die projektiven Strahlbüschel, welche den Kegelschnitt erzeugen, gegeben. Im übrigen bleibt die Lösung wie im Falle a.

Auflösung c. Man bestimmt mittels des Satzes, siehe Frage und Antwort 47, die Berührungspunkte auf den übrigen Tangenten und verfährt im übrigen, wie im Falle a.

Auflösung d. Man verfährt wie im Falle c.

Aufgabe 76. Auflösung a. Die Gegenseiten des durch die vier gegebenen Punkte bestimmten Viereckes schneiden auf der gegebenen Tangente eine Involution aus, in deren Doppelpunkten die möglichen Kegelschnitte die Tangente berühren.

Auflösung b. Die Verbindungslinie der Gegenecken des durch die vier gegebenen Tangenten gebildeten Vierseites mit dem gegebenen Kegelschnittpunkte bilden eine Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die Tangenten im gegebenen Punkte an die möglichen Kegelschnitte darstellen.

Aufgabe 77. Auflösung a. Die Seiten des durch die drei gegebenen Punkte gebildeten Dreieckes sind die Träger von involutorischen Punktreihen, gebildet aus auf einer Seite liegenden Kegelschnittpunkten und den Schnittpunkten dieser Seite mit den gegebenen Tangenten. Die Verbindungslinien der Doppelpunkte auf dem einzelnen Träger dieser Involutionen liefern die möglichen Berührsehnen für die gegebenen Tangenten.

Auflösung b. Die Schnittpunkte der gegebenen Tangenten sind die Mittelpunkte von Strahleninvolutionen, gebildet aus den den Schnittpunkt enthaltenden Tangenten und den Verbindungslinien des Tangentenschnittpunktes mit den beiden gegebenen Punkten. Die Doppelstrahlen dieser Involutionen gehen durch den Schnittpunkt der Tangenten in den genannten beiden Punkten etc.

Aufgabe 78. Auflösung. Man konstruiere für den gegebenen Kreis für die drei Ecken des Sechseckes die Polaren.

Aufgabe 79. Auflösung. Man nehme den Mittelpunkt des Leitkreises so an, wie in Antwort der Frage 69 angegeben ist und konstruiere für die einzelnen Punkte des gegebenen Kreises die bezüglichen Polaren.

Aufgabe 80. Auflösung. Ist p der gegebene Kegelschnittpunkt, P seine Polare, so kann man sich um p eine Gerade als Polare gedreht denken und durch ihren jedesmaligen Pol eine Senkrechte zu ihr ziehen. Alle diese Senkrechten umhüllen einen Kegelschnitt, dessen gemeinsame Tangenten mit dem gegebenen Kegelschnitte die Fusspunkte der durch p möglichen Normalen bestimmen.

Andererseits kann man aber auch um den Mittelpunkt des Kegelschnittes einen Durchmesser sich drehen lassen und zum jedesmaligen conjugierten Durchmesser durch p eine Senkrechte fällen, so erzeugen die beiden so bestimmten Strahlbüschel einen Kegelschnitt, der den gegebenen Kegelschnitt gleichfalls in dem Fusspunkte der durch p möglichen Normalen durchschneidet.

Die beiden im Vorstehenden genannten Kegelschnitte sind reciproke Polarfiguren, hinsichtlich des gegebenen Kegelschnittes als Leitkegelschnitt.

Druckfehler-Berichtigung.

Seite 22, Zeile 49 von oben lies: k_1 statt: K_1

„ 31, „ 2 „ „ „ $a^2 x^2$ statt: $a^2 + x^2$

„ 51, „ 34 „ „ „ $\sqrt{\frac{(a^2 - x^2)^2}{x^2} + y^2}$ statt: $\sqrt{\frac{(a^2 + x^2)^2}{x} + y^2}$

„ 194. Vor Frage und Antwort 123 setze die Ueberschrift:

b) Axonometrisches Bild des Achsenkreuzes.

Verlag von L. v. Vangerow, Bremerhaven und Leipzig.

Verzeichnis
der bisher erschienenen Bände
von
Kleyers Encyklopädie
der gesamten
mathematischen technischen und exakten Natur-Wissenschaften.
Herausgegeben unter Mitwirkung bewährter Fachmänner.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M., St. Louis, Athen.

Wer niedere und höhere Mathematik, z. B.: **bürgerliches und kaufmännisches Rechnen, Buchstabenrechnung, Gleichungen 1. 2. 3. und 4. Grades mit einer und mehreren Unbekannten, Differential- und Integralrechnung etc., Planimetrie, Stereometrie, analytische Geometrie, Projektionszeichnen (darstellende Geometrie). ebene uud sphärische Trigonometrie, Goniometrie (Winkelmessungslehre), Vermessungskunde (Geodäsie), Astronomie, Physik, Mechanik, Geostatik, Geodynamik, Hydrostatik, Hydrodynamik, Elektrizität, Chemie und deren Hilfswissenschaften** studieren, oder wer, in der Praxis stehend, in diesen Fächern sich weiterbilden oder seine Kenntnisse auffrischen will, erhält durch

Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften : : :

mit ca. 10,000 in den Text gedruckten Figuren,
herausgegeben unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner,

eine auch auf die praktischen Bedürfnisse des Technikers Rücksicht nehmende Auswahl von leichtverständlichen Lehrbüchern, die sowohl **dem Studierenden, dem Fachlehrer, als dem ausübenden Techniker** ein wohlvorbereitetes Material zum Studium und zum Nachschlagen darbieten; besonders wertvoll erscheinen dieselben dadurch, dass durch sie die Befähigung zur Lösung mathematischer und technischer Probleme ausserordentlich gefördert wird.

Jeder Band ist einzeln käuflich, und zu beziehen durch jede Buchhandlung des In- und Auslandes.

P. P.

Hiermit beehre ich mich, Ihnen das neueste Verzeichnis von:

Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften

zu überreichen.

Aus der überaus großen Zahl der anerkennendsten Besprechungen, welche in Schul-, technischen und Tagesblättern erschienen und von welchen eine kleine Anzahl dem Kataloge beigegeben sind, bringe ich besonders den folgenden Ausspruch des „Pf. Courier“ zum Abdruck:

„In einzig dastehender Weise werden hier die mathematischen und die damit verwandten technischen und exakten Natur-Wissenschaften in ihrem ganzen Umfang von den elementarsten Regeln der Arithmetik bis zu dem stolzen Gebäude der höheren Mathematik behandelt. Das Werk dient gleichmässig den Zwecken des Schulunterrichts, wie denjenigen des Selbststudiums. Es enthält nicht nur die sonst in jedem Lehrbuch vorkommenden Definitionen, Lehrsätze, Formeln usw., sondern auch ausser vielen ungelösten Aufgaben eine Reihe Aufgabenlösungen, die in Bezug auf die Exaktheit und Sauberkeit der Darstellung unübertroffen dastehen, daneben häufig historische Exkursionen. Wer an der Hand dieser Lehrmittel von Stufe zu Stufe fortschreitend die mathematischen Disziplinen durcharbeitet, wird unstreitig schöne Erfolge erzielen, und die oft verhängnisvolle Ansicht, dass es zum Betrieb der trockenen Mathematik besonderer Talente bedürfe, wird dann von manchem als unzutreffend aufgegeben werden müssen.“

Die Lehrbücher der Kleyerschen Encyklopädie eignen sich ganz besonders zur Unterstützung des Unterrichts und Vortrags an den verschiedensten Lehranstalten, zum Selbststudium, zur Forthilfe bei Schularbeiten, zur Repetition, zur Vorbereitung für Examina und zum Nachschlagen für Fachleute, da bei den ausführlichen Lösungen gut gewählter Aufgaben, welche alle Teile dieser Encyklopädie enthalten, überall die Anwendungen der Gesetze, der Sätze, Regeln, Formeln etc. gezeigt werden.

Jährlich erscheinen von diesem Werke eine Anzahl neuer Bände, und sowohl die beteiligten Autoren, als auch die Verlagsbuchhandlung lassen es sich angelegen sein, den Ausbau des grossen Unternehmens nach Möglichkeit zu fördern.

Hochachtungsvoll

Bremerhaven. **L. v. Vangerow,** Verlagsbuchhandlung.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

I. Mathematik.

(Grundrechnungsarten, Algebra, Geometrie, Stereometrie, Astronomie, Nautik).

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Erstes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen.** Mit 71 Erkl. und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **A. Frömter.** Preis: Mk. 3,—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Zweites Buch: **Das Rechnen mit benannten Zahlen.** Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Frömter** und **Neubüser.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Drittes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen. (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.)** Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. G. Maier.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen (Elemente der Buchstabenrechnung), **der Verhältnisse und Proportionen.** Erster Teil: Mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von **Prof. H. Staudacher.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen. Zweiter Teil: **Elemente der Zahlenlehre. Dezimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen.** Mit einer Sammlung von 277 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von Prof. **Hans Staudacher.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Erster Teil: **Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regeldetri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen.** Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer **Münz-, Mass- und Gewichtstabelle.** Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Richard Olbricht.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Zweiter Teil: **Die Prozent- und Zinsrechnung nebst ihren Anwendungen, mit Einschluss der Diskontrechnung, der Terminrechnung, der Kalkulationen und Kontokorrente.** Mit 130 Fragen, 444 Erklärungen, 27 Anmerkungen, 1520 Aufgaben, zahlreichen schematischen Figuren, einem Formelverzeichnis, einer Fristen- und Zinsenberechnungstabelle, sowie den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben. Bearbeitet von **Dr. R. Olbricht.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Adolf Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten. Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Otto Prange.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades. (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst den Abhandlungen des **Bachez de Méziriac,** im französischen Originale mit beigefügter deutscher Übersetzung. Bearbeitet zum Teil nach **System Kleyer** von **W. Fr. Schüler.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten (Quadratische Gleichungen). Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Dr. Aug. Blind.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit zwei und mehreren Unbekannten. (Quadratische Gleichungen.) Sammlung von 361 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 185 Erklärungen und 8 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades, nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen 2. Grades. Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Körperberechnungen. Erstes Buch: Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 184 Figuren. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Körperberechnungen. Zweites Buch: Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 742 Erklärungen und 256 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.

Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit 52 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 29 Erklärungen und 17 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 303 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren. Von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, der zusammengesetzten-, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen, nebst einer Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Kombinatorik. Ausführliche Darstellung der Lehre von den kombinatorischen Operationen. (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Mit 506 gelösten und analogen ungelösten Übungsbeispielen nebst den Resultaten der letzteren. Von **Prof. H. Staudacher.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Logarithmen nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: in einfachem Leineneinband Mk. 2.50.

Vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hilfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von **E. R. Müller.** Preis: kartonniert 60 Pfg.

Lehrbuch der Integralrechnung. Erster Teil: Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Integralrechnung. Zweiter Teil: Anwendung der bestimmten Integrale auf Quadratur, Rektifikation, Komplanation und Kubatur, sowie auf zahlreiche gelöste praktische Aufgaben aus der **Mechanik und Technik.** Mit 245 vollständig gelösten Aufgaben, 163 Figuren und 137 Erklärungen, nebst ausführlichem Formelverzeichnis. Zum Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Erster Teil: **Die einfache und wiederholte Differentiation explizieter Funktionen von einer unabhängigen Variablen.** Ohne Anwendung der Grenzen und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben und Formelverzeichnis. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—

Lehrbuch der Differentialrechnung. Zweiter Teil: **Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwickelungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima.** Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren, 230 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Dritter Teil: **Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven.** Nebst 425 gelösten Aufgaben, 164 Figuren, 138 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen. Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren. Mit einer Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Krüger.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Einführung in die Funktionentheorie. Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 Figuren. Von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 1.50. In einfachem Leinenband Mk. 2.—.

Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie. Mit 588 Erklärungen und 47 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung von erläuternden Beispielen und Übungsaufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen. Erster Teil: Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet nach **System Kleyer.** Von **Dr. G. Weichold.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Erster Teil: **Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 1.80. Geb. nur mit Teil II zus. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Zweiter Teil: **Der Winkel und die parallelen Linien.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer.** Von **Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 2.20. Geb. nur mit Teil I zus. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Dritter Teil: **Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 737 Erklärungen und 343 Figuren. Bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie)). Vierter Teil: **Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Örter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 529 Erklärungen und 230 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Fünfter Teil: **Die Flächen der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Sechster Teil: **Proportionalität der Strecken.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Siebenter Teil: **Die Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 394 Erklärungen und 76 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Achter Teil: **Die Anwendung der Ähnlichkeit auf die Lehre vom Kreis.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 505 Erklärungen und 135 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Tabelle der Elemente der regelmässigen Vielecke. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. —.50.

Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil: **Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 573 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Seipp.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Erster Teil: **Aufgaben, gelöst ohne Anwendung der Proportionenlehre.** Mit 1952 gelösten und ungelösten Aufgaben, 178 Anmerkungen, 207 Erklärungen und 214 in den Text gedruckten Figuren. Von **E. R. Müller.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Zweiter Teil: **Aufgaben, gelöst mit Anwendung der Proportionenlehre.** Mit 1327 gelösten und ungelösten Aufgaben, 126 Anmerkungen, 100 Erklärungen und 174 Figuren. Bearbeitet von **E. R. Müller.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Dritter Teil: **Verwandlungs- und Teilungsaufgaben, sowie Aufgaben über ein- und umbeschriebene Figuren.** Mit 510 gelösten und ungelösten Aufgaben, 40 Anmerkungen, 72 Erklärungen und 54 Figuren. Bearbeitet von **Prof. E. R. Müller.** Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Erster Teil: **Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden.** Mit einer Sammlung von 100 Aufgaben, 206 gelösten Übungsaufgaben und 92 in den Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet **nach System Kleyer** von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Zweiter Teil: **Analytische Geometrie der einzelnen Linien zweiten Grades.** Mit einer Sammlung von 116 Aufgaben, 286 gelösten Übungsaufgaben und 200 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie). Mit einer Sammlung von 153 gelösten Aufgaben und angewandten Beispielen, zahlreichen Erklärungen und 481 in den Text gedruckten Figuren. Unter Berücksichtigung des Selbstunterrichts für Geometer-Eleven, Studierende des Bau-, Berg- und Ingenieur-Faches, sowie zum praktischen Gebrauch für Feldmesser, Kulturtechniker, Katasterbeamte usw. Von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Das apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben. Sammlung von 163 gelösten und ungelösten Aufgaben und 200 Figuren. Zur Ergänzung des Schulunterrichts und zum Selbststudium. Nach **System Kleyer** durchaus neu bearbeitet. Zweite Auflage. Von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Geschichte der Geometrie für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt von **Richard Klimpert.** Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erklärungen, 563 in den Text gedruckten Figuren und 65 Anmerkungen nebst einem ausführlichen Formelverzeichnis von über 500 Formeln. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 18.—. Geb. Mk. 19.50.

Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre) mit 307 Erklärungen und 52 Figuren nebst einer Sammlung von 513 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Erster Teil: **Elemente und Grundgebilde. Projektivität. Dualität.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 361 Erklärungen und 97 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Zweiter Teil: **Harmonische Gebilde. Entstehung der Kegelschnitte. Sätze von Pascal und Brianchon.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 445 Erklärungen und 135 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.-—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Dritter Teil: **Pol und Polare. Mittelpunktseigenschaften. Involution. Brennpunktseigenschaften der Kurven zweiten Grades.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 550 Erklärungen und 172 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen. Mit 259 Fragen und Antworten, 199 Erklärungen, 502 meist gelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. A. Haas.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Erster Teil: **Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 271 Erklärungen und 226 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Zweiter Teil: **Über die rechtwinklige Projektion ebenflächiger Körper.** Mit 130 Erklärungen und 99 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Dritter Teil: Erste Hälfte: **Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie.** Mit 195 Erklärungen und 169 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Dritter Teil: Zweite Hälfte: **Centralcollineation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie.** Mit 218 Erklärungen und 210 Figuren. Von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Vierter Teil: Erste Hälfte: **Krumme Linien (ebene und räumliche Kurven). Krumme Oberflächen. Schatten- und Beleuchtungslehre.** Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Vierter Teil: Zweite Hälfte: In Vorbereitung.

Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 236 Erklärungen und 56 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der Astronomie und der mathematischen Geographie. Erster Teil: **Sphärische Astronomie.** Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten, bearbeitet von **Prof. Dr. W. Laska.** Preis Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Die Nautik in elementarer Behandlung. Einführung in die Schiffahrtkunde. Zur Förderung des Verständnisses der Schiffahrt in weiteren Kreisen, sowie zum Unterricht an Lehranstalten. Mit 90 vollständig gelösten Beispielen, 260 analogen ungelösten Aufgaben mit den Ergebnissen, nebst 88 Figuren, sowie Erklärung der Kunstausdrücke der Seemannssprache. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Fr. Bolte,** Direktor der Navigationsschule in Hamburg. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Kartographie. Die Kartographie nach Einführung der Terraindarstellung in Karten und Plänen. Erster Teil. Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Victor Wessely.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

II. Physik, Elektrizität, Chemie, Akustik.

Lehrbuch der allgemeinen Physik. (Die Grundbegriffe und Grundsätze der Physik.) Mit 549 Erklärungen, 83 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 120 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch über das spezifische Gewicht fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Mit 35 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.

Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen. Mit 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben, erläutert durch 189 in den Text gedruckten Figuren und 10 Karten. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik) mit 425 Erklärungen, 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 208 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik) mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis· Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.

Lehrbuch über die Percussion oder den Stoss fester Körper. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der Elastizität und Festigkeit mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 5.50. Geb. Mk. 6.50.

Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geodynamik) mit 690 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 500 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 13.50. Geb. 14.50.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Erster Band: **Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhrenleitungen bei konstanter, sowie veränderlicher Druckhöhe fliessen.** Mit 434 Erklärungen, mehr als 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 220 gelösten und ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Zweiter Band: Erste Hälfte: **Die Bewegungserscheinungen des Wassers in Kanälen und Flüssen, sowie der dabei ausgeübte Stoss und Widerstand.** Mit 282 Erklärungen, mehr als 150 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 134 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Zweiter Band: Zweite Hälfte: **Von der Anwendung der lebendigen Kraft des bewegten Wassers als Motor oder Beweger.** Mit 203 Erklärungen, 88 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 30 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch der Reibungselektrizität (Friktions-Elektrizität, statischen oder ruhenden Elektrizität), erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. **Von Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Lehrbuch der Kontaktelektrizität (Galvanismus) nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit 731 Erklärungen, 238 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Induktionselektrizität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik). Mit 432 Erklärungen und 213 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Ad. Krebs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Elektrodynamik. Erster Teil: Mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch des Elektromagnetismus. Mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. O. May** und **Ad. Krebs.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Erster Band. **Die Metalloide.** Mit 2208 Erklärungen, 332 Experimenten und 366 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Wilh. Steffen.** Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—

Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Zweiter Band. **Die Metalle.** Mit 573 Erklärungen 174 Experimenten und 33 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Wilh. Steffen.** Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—.

Lehrbuch der Akustik. Erster Band: **Periodische Bewegungen, insbesondere Schallwellen.** Mit 257 Erklärungen und 106 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 70 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 4,50. Geb. Mk. 5,50.

Lehrbuch der Akustik. Zweiter Band: **Die verschiedenen Tonerreger.** Mit 465 Erklärungen und 315 in den Text eingedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 114 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Akustik. Dritter Band. Erste Hälfte: **Die Fortpflanzungserscheinungen des Schalles, nebst den Erscheinungen zusammengesetzter Schwingungsbewegungen.** Mit 393 Erklärungen und 235 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 66 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Akustik. Dritter Band. Zweite Hälfte: **Praktische Akustik d. i. die Akustik in großen begrenzten Räumen, in Konzert- und Hörsälen, in Kirchen und Theatern.** Mit 136 Erklärungen und 85 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 3,50. Geb. Mk. 4,50.

Entstehung und Entladung der Gewitter, sowie ihre Zerstreuung durch den „Blitzkamm" (Fulgura frango). Eine metereologische Betrachtung von **Richard Klimpert.** Preis gebunden Mk. 2.—.

Anerkennungen aus dem Publikum

über Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Herr Pfarrer K a s p a r - Altlussheim schreibt: „Ich werde dieses vorzügliche Werk Ihres Verlages empfehlen, wo ich kann. Ich habe es als das einzige kennen gelernt, das die für Manchen etwas trockene Wissenschaft der Algebra und Geometrie mit Geist und Leben füllt und imstande ist, auch ohne Lehrer die größten Schwierigkeiten überwinden zu helfen. Es ist ein gewaltiges Stück Arbeit, das in den verschiedenen, nach einheitlichem, erprobtem Plane verfaßten Bänden liegt und für das jeder Lernende den Bearbeitern und dem Verlag vielen Dank schuldet. Ich wünsche Ihrem Unternehmen im Interesse der Lernenden die weiteste Verbreitung."

Bonn. Mit vielem Interesse habe ich Ihre Unternehmung verfolgt, eine praktische math.-naturwissenschaftliche Bibliothek zu schaffen, und in der Erkenntnis, wie sehr eine solche billige Bibliothek dem allgemeinen Bedürfnis entspricht, werde ich nach Kräften für ihre weitere Verbreitung mich bemühen. Ich bin Ihnen dankbar für die Erleichterung, welche Sie auch mir durch Ihr Werk bei meinen Studien geschaffen haben. Namentlich freue ich mich, dass in der Differentialrechnung, bei welcher ja eine einfache, dem Wissen des Anfängers entsprechende Darstellung große Schwierigkeiten bietet, eine so praktische, mit Konsequenz durchgeführte Darstellungsweise von Ihnen gegeben worden ist u. s. f.

F r. B l e n c k e, stud. rer. nat.

Dahbruch b. Siegen. . . . . . Im Uebrigen kann ich von Ihren Lehrbüchern nur lobenswertes erwähnen und wünsche nur, dass dieselben ein Jahrzehnt eher zur Welt gekommen wären. Es ist mir bis jetzt noch kein Werk in die Hände gekommen. das in so leicht faßlicher Weise dem Schüler die exakten Wissenschaften beizubringen imstand wäre, u. s. f.

W. A l t p e t e r, Ing.

Budapest. Vor allem sei es mir gestattet, Ihnen für den Verlag der Kleyerschen Encyklopädie meine vollste Anerkennung auszusprechen. — Einem Bedürfnis in wirklich vorzüglicher Weise abhelfend, behandeln die Publikationen der erwähnten Sammlung, die mathematischen Disziplinen nach theoretisch und praktisch richtiger Lehrmethode, was ich aus eigener Erfahrung als Lehrer an einer Militärbildungsanstalt vollauf bestätigen kann; indem die handlichen Heftchen mit ihrem reichen Stoff ein wirkliches Lehrbuch für den Schüler und ein vorzügliches Hilfsbuch für den Lehrer bilden. . . . .

F e r d. v o n J e r z a b e k, k. k. Leutnant.

Engelberg, Benediktiner-Stift. Da Ihr Werk „math.-tech.-naturwissenschaftliche Encyklopädie", soweit es bis heute vollendet vorliegt, auch an unserem Gymnasium allseitig wohlverdiente Anerkennung gefunden hat, so möchte speziell ich, als Lehrer der Mathematik, Ihnen heute die Gefühle meines Dankes und meiner Hochachtung für das treffliche Werk bekunden. Die bis ins Detail gehende, dabei doch so übersichtlich geordnete, leicht faßliche, klare Entwicklung der Beweise ist es ganz besonders, die mir Ihr Werk lieb und teuer macht, deswegen meinen herzlichsten Dank für Ihre mühevolle, so meisterhaft ausgeführte Arbeit, u. s. f.

P. B a s i l i u s F e l l m a n n, O. S. B.

Oberwinterthur. . . . . Vor allem empfangen Sie meinen wärmsten Dank für die Initiative und im allgemeinen glückliche Ausführung der Idee. Gewiß kann jeder mit fleißiger Benutzung Ihrer geschätzten Hefte durch Selbstunterricht schöne Erfolge in dieser Disziplin erzielen, u. s. f.

J a c o b F l u r, Lehrer.

Hartford (Connecticut). Ich wünsche Ihnen unaufgefordert meinen Gefallen über den Vorteil auszudrücken, welchen ich bei verschiedentlichem Gebrauch bei der Behandlung Ihrer wirklich ausgezeichneten Kleyerschen mathematisch-technischen-naturwissenschaftlichen Encyklopädie gehabt habe. Ich habe nicht allein eine große persönliche Begeisterung für sie, sondern ich habe dieselbe mit Nutzen auch in meiner Schule gebraucht. Ich bin Lehrer der Mathematik an der Public Highe School (gleichbedeutend mit Ihren Gymnasien und Realschulen), u. s. f. Homer W. Brainard.

Berlin. Seit zwei Jahren beziehe ich nun schon von meiner Buchhandlung Ihre Kleyer-Bandausgaben. Welche Dienste sie mir geleistet, vermag ich auf diesem kleinen Raume nicht auszusprechen. H. Schaepel jr., Gymnasiast.

Herr **Dr. Otto Willareth in Sand i. Elsass** schreibt an den Verleger: Vermutlich macht es Ihnen Freude und ist es in Ihrem Geschäfts-Interesse wichtig, meine Anzeige über Ihr Verlagsunternehmen **Kleyers Encyklopädie** zu erhalten, welche ich in der **„Straßburger Post"**, dem größten Blatt von Südwest-Deutschland, No. 809 vom 11. September 1901, habe erscheinen lassen. Deshalb gestatte ich mir, Ihnen diese Besprechung als Drucksache zu übersenden. Mit dieser Besprechung möchte ich Ihnen und den Verfassern dieser Encyklopädie eine Dankesschuld abtragen für eines der segensreichsten litterarischen Unternehmen der Gegenwart. Ich besitze einen bedeutenden Teil Ihrer Encyklopädie und stets ist es mir eine Freude, darin zu arbeiten. Jedenfalls liegt es im Interesse der Sache, dass sie möglichst bekannt und verbreitet wird, damit Ihnen und den Herren Verfassern die Lust nicht an dem mühevollen Unternehmen ausgeht etc.

Berlin. Durch einen glücklichen Zufall wurde ich vor Kurzem mit Kleyers Encyklopädie bekannt und ich bemerkte nach kurzem Studium derselben, dass ein vortreffliches Werk im Erscheinen begriffen sei, u. s. f. Edm. Koebke, stud. math.

Währing b. Wien. . . . . Da das unter Ihrer werten Leitung erscheinende voluminöse Werk leider erst einige Teile vollständig enthält, aber entschieden das Vortrefflichste in Bezug auf Selbststudium leistet, u. s. f. Joseph Hackenberg, Beamter.

Traunstein. Es würde mich herzlich freuen, wenn es mir in meiner Besprechung gelungen wäre, das Interesse eines weiteren Leserkreises für Ihr großartiges, wahrhaft zeitgemäßes und eminent praktisches Unternehmen nachhaltig anzuregen.
R. Knilling, Lehrer.

Braunschweig . . . . ich war überrascht und hocherfreut über ein Unternehmen (bezieht sich auf den chemischen Teil der Encyklopädie. Die Redakt.), welches mir so ganz aus der Seele herausgeschrieben war. . . . Wie Sie den Stoff behandeln, wird er noch von keiner Seite auch nur annähernd gehandhabt, abgesehen von Katechismen, u. s. f. . . . . Gestatten Sie mir als praktischem Lehrer der Chemie, der viele heterogene Elemente zu unterrichten hat, Ihnen zu diesem schönen Werke meinen verbindlichsten Glückwunsch auszusprechen. Möge es Ihnen vergönnt sein, das Werk in dem Sinne des Prospektus zu Ende zu führen, und glaube ich fest, dass die wirklichen Lehrer der Chemie Ihnen zu vollem Dank verpflichtet sein werden, u. s. f.
Dr. Ed. Freise, Direktor der Droguisten-Fachakademie.

Cambridge (England). Während meines Besuches in Kreuznach habe ich mich interessiert, einige deutsche Schulbücher mit unseren englischen zu vergleichen. Ich habe mehrere Hefte der Kleyerschen Encyklopädie durchgeblättert und finde, dass dieselben höchst praktisch und brauchbar sind, besonders für die zuwachsende Anzahl selbstunterrichtender Studenten. Ich bin ein Sachkenner in der reinen und angewandten Mathematik, Ehrengraduatus (etwa wie deutscher Ph.-Doktor) und Dozent in der Cambridge Universität und würde sehr gerne helfen, einige Hefte zu übersetzen. Ich werde auch Mitarbeiter finden können, dass es möglich wird, nach und nach vielleicht das ganze Werk in englisch herauszugeben. Wenn Ihnen dieser Vorschlag gefällt, können wir später Näheres darüber erörtern. Ich glaube, dass eine Uebersetzung einen sehr guten Verkauf haben würde, nicht nur in Großbritannien und Irland, sondern auch in Amerika und in den britischen Kolonien.
Theodore E. Worlledge.

Wien. Gestatten Sie uns, Ihnen unsern Dank für Ihre einzig dastehende Aufgabensammlung, die wir schon bei ihrem ersten Erscheinen mit Freuden begrüßten, u. s. f. . . . Genehmigen Sie deshalb den Dank für Ihre ausgezeichnete Encyklopädie.
Mehrere Studierende der Wiener Universität.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Sundswall (Schweden). Im Besitze einiger Hefte der ausgezeichneten Kleyerschen Encyklopädie bin ich so frei gewesen, in der beigefügten Zeitung die Aufmerksamkeit des schwedischen Publikums darauf zu richten und ist es meine Hoffnung, sowohl den Interessenten, als Ihnen einen Dienst erwiesen zu haben. Das Werk ist in Schweden leider zu wenig bekannt. D. F. Lundgren.

Brünn. Als erster Abnehmer Ihrer in der Tat sehr vortrefflichen Encyklopädie, u. s. f. . . . . Meine zahlreichen Schüler machen den besten Gebrauch von dieser einzig dastehenden Aufgabensammlung und bitten unaufhörlich, zu veranlassen, dass weitere Teile erscheinen. Franz Schwaben, Lehrer.

Bergedorf bei Hamburg. Bereits im Besitze mehrerer Bände der Kleyerschen Encyklopädie habe ich die vortrefflichen Werke schon vielen Interessenten mit Erfolg empfohlen. Albert Zander, Lehrer an der Hansaschule.

Gleiwitz. . . . . .; deshalb habe ich mit Freuden Ihr Werk begrüßt, u. s. f. . . . ,; ich aber mit förmlicher Begierde Ihre so klar gelösten Aufgaben, u. s. f. George Feumer.

Coburg. Bitte um sehr gefl. Mitteilung, bis wann die Lehrbücher über Bau- und Ingenieurwissenschaften nach System Kleyer erscheinen werden. Mit derartigen Büchern würden Sie die ganze Welt erfreuen. Ist Integralrechnung II. Teil erschienen? J. Eichhorn, Zivilingenieur und Patentanwalt.

Selmeczbanya (Ungarn). . . . . und ich muß offen gestehen, dass, wenn ich mich auch der deutschen Sprache noch nicht mächtig genug fühle, so werde ich doch am schnellsten aus diesem Werke zum Ziel gereichen, und eher lerne ich die Sprache, als dass ich das Werk nicht benutze, u. s. f. Ludwig Veress.

Linz. . . . . Anschließend spreche ich Euer Wohlgeboren meinen herzlichsten Dank aus für die Herausgabe Ihrer trefflichen Aufgabenhefte, die mir Gelegenheit verschaffen, mir privat und ohne große Auslagen Kenntnis von allen Partien der reinen und angewandten Mathematik zu verschaffen, u. s. f. Herrmann Bauernberger, stud. theol.

Bochum i. W. . . . . Ew. Hochwohlgeboren im Erscheinen begriffenes, so lehrreiches und auch von Laien leichtverständlich gehaltenes Werk: „Die elektrischen Erscheinungen und Wirkungen" habe ich mit Freuden begrüßt, u. s. f. C. P. Kupfer.

Urteile der Presse

über Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Pädagogisches Jahrbuch von Emil Schneider. Dem Verlage von L. v. Vangerow, Bremerhaven, gebührt das Verdienst, durch Herausgabe der Kleyerschen Encyklopädie ein Werk geschaffen zu haben, das durch die Art seines Erscheinens und durch die Eigentümlichkeit in der Behandlung des Stoffes auch diejenigen, die keine gelehrte Schule besucht haben, in den Stand setzt, sich durch eigenen Fleiß ein reiches und gründliches Wissen zu erwerben. Der vorliegende Band ist in jeder Beziehung eine Musterleistung und wird hiermit wie das ganze Werk nachdrücklichst empfohlen. Man kann nur wünschen, dass uns der rühmlichst bekannte Verfasser bald mit einem nach demselben Plane bearbeiteten Lieferungswerke über die beschreibenden Naturwissenschaften beschenken möge.

Naturae Novitates. Die Kleysersche Encyklopädie ist dem Studierenden schon längst ein wohlbekanntes, unentbehrliches Hilfsmittel geworden, so dass man als die beste Empfehlung der neu vorliegenden Bände bezeichnen kann, dass diese sich in Inhalt und Form würdig ihren Vorgängern anschließen.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Literaturblatt für höhere Schulen. Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil. Wenn man nach der vorliegenden Schrift die ganze Kleyersche Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften beurteilen darf, so verdient dieses Unternehmen weit mehr Beachtung und Unterstützung, als es bislang in Kollegenkreisen gefunden hat. Offen gestanden bin ich mit dem Verdachte an die Lektüre dieses Buches herangetreten, dass es, als für den Selbstunterricht und die elementare Technik berechnet, in wissenschaftlicher Beziehung manches zu wünschen übrig lassen werde. Aber ich bin sehr angenehm enttäuscht worden; das Buch ist durchaus wissenschaftlich angelegt und weit gründlicher durchdacht, als die meisten Lehrbücher der Stereometrie; dass es dabei auch vielfach auf die Praxis des Lebens eingeht, kann ihm nur zur weiteren Empfehlung gereichen. Mir ist keine Schrift bekannt, welche die räumlichen Lageverhältnisse von Geraden und Ebenen mit der Allgemeinheit und Gründlichkeit untersucht, wie die vorliegende Stereometrie. Ganz besonderen Wert hat das Buch auch dadurch, dass eine große Menge konstruktiver Aufgaben erschöpfend oder wenigstens mit Andeutungen zur Lösung vorgeführt wird; besonders sorgfältig ist stets die Determination behandelt. Allen Kollegen, die bislang die konstruktive Seite der Stereometrie weniger beachtet haben, sei hiermit das Seippsche Buch nachdrücklichst empfohlen; ebenso seien die Studierenden zur Ausbildung ihrer Raumanschauung darauf hingewiesen, um so lieber, als die Zeichnungen durchweg mustergültig sind.

Pfälzische Lehrerzeitung. Von diesem großartigen, bis jetzt unerreicht dastehenden Unternehmen liegen uns weitere Bände vor. Für die Zwecke des Selbststudiums sind diese Werke das Beste, was es giebt. Auch in Schulen dürften sie mit großem Nutzen zu gebrauchen sein.

Literaturblatt für katholische Erzieher. Bezüglich dieser nach Kleyers System bearbeiteten Lehrbücher können wir uns kurz fassen. „Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen etc. Wissenschafen bietet, wie bereits allgemein anerkannt, die besten Unterrichtsmittel."

Pädagogisches Literaturblatt. Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Anlage und Ausführung des Sachsschen Lehrbuchs sind vorzüglich. Der Verleger hat für eine gute Ausstattung Sorge getragen, die Figuren insbesondere zeichnen sich durch wohltuende Klarheit und Schärfe aus. Gesamturteil: das Buch ist für den Selbstunterricht, wie auch zum Gebrauch an entsprechenden Unterrichtsanstalten nach jeder Richtung hin aufs beste geeignet.

Der Techniker, New York. Die systematische Einteilung und Behandlung des umfangreichen Lehrmaterials mit zahlreichen erläuternden Aufgaben und Beispielen, wie in dem vorliegenden Werke, ist sehr fördernd und anregend für das Studium und ein allseitig anerkannter Vorzug der Kleyerschen Unterrichtsmethode; so verfaßte Lehrbücher sind nicht allein für Schulunterricht, sondern auch zum Selbststudium und als Nachschlagebücher für den praktischen Fachmann von hohem Nutzen.

Zeitschrift für Realschulwesen, Wien. Hovestadt, Lehrbuch der absoluten Masse u. Dimensionen der physikalischen Größen. Das Buch, welches den Gegenstand mit der möglichsten Vollständigkeit behandelt, zeigt bei einer anfangs ausführlichen, später knappen Darstellung doch durchgehends jene Klarheit, die gerade für diesen Teil der Wissenschaft nötig ist. Es wird sich dasselbe daher überall als eine gute Einleitung in das wissenschaftliche Studium der Physik empfehlen.

Magazin für Pädagogik. Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Erster und Zweiter Teil. An solchen Werken haben wir freilich noch keinen Ueberfluß und wir möchten einem jeden raten, der sich ohne Hilfe eines Lehrers tiefer in dieses Gebiet einzuarbeiten wünschte, sei es zum Zwecke der Erstehung einer Prüfung, sei es aus besonderer Liebhaberei zu diesem schönen Zweig der Mathematik, zu diesem ausgezeichneten Werke zu greifen. Nur mit hoher Befriedigung und reichem Gewinn wird er dasselbe aus der Hand legen.

Prakt. Physik. Der Verfasser hält vollkommen, was er verspricht; er ist ein Meister in der Entwicklung und Klarstellung der Grundbegriffe und macht dadurch seine Arbeit vor allem für den angehenden Lehrer und für die Selbstausbildung geeignet, und mancher ältere Lernende wird sagen: Hätte man mir solches in meiner Jugend geboten!

Verlag von L. v. Vangerow in Bremerhaven und Leipzig.

Baukunde.

Statik für Hoch- und Tiefbautechniker. Ein Lehrbuch für den Unterricht an bautechnischen Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht und Nachschlagen mit 194 Uebungsaufgaben und 486 Figuren nebst einem Anhang von Tabellen. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. 3. Auflage. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 5,50.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Erster Teil: **Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittelungen.** Mit 345 Figuren. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn.** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W.. 2. Auflage. Preis: Mk. 3.—. In Schuleinband Mk. 3,30.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Zweiter Teil: **Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers, Schiftung bei Dächern, Windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppenkrümmlings, Steinschnitt, Centralperspektive.** Anhang: **Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern.** Mit 354 Figuren. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. 2. Auflage. Preis: 3.—. In Schuleinband Mk. 3,30.

Vorlegeblätter für den Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen. Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen usw. **12 Tafeln mit erläuterndem Texte.** Entworfen und gezeichnet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. In Mappe: Mk. 5,50.

Das Zeichnen der Stereometrie. Als Vorschule zur darstellenden Geometrie und zum Fachzeichnen für Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. 28 Tafeln mit Text. Von **Prof. A. Brude.** Preis: Mk. 6.—.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Vonderlinn, Jakob

Lehrbuch des Projektionszeichnens für den Schulunterricht und das Selbststudium bearbeitet nach System Kleyer

Bd.: 3,2

[1891]

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.190-m(4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11841095-7